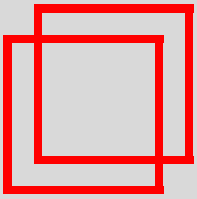
Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. А. Абрамов, Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1989, том 29, номер 11, 1611–1620

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 99.251.157.19
8 ноября 2024 г., 20:34:41

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 29, 1989 № 11

УДК 519.63:519.68

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

АБРАМОВ С. А.

(Москва)

Рассматриваются линейные дифференциальные и разностные уравнения с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми частями. Решается задача построения всех рациональных решений уравнения.

Введение

Поиск алгоритмов решения дифференциальных уравнений — это одна из главных проблем компьютерной алгебры. Значительный интерес представляют и разностные уравнения, алгоритмическая теория которых является менее разработанной. Ниже рассматриваются линейные дифференциальные и разностные уравнения произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами. Допускается, что уравнение может быть неоднородным и его правой частью при этом служит полином. Решается задача построения всех рациональных решений уравнения.

Для дифференциальных уравнений указанного типа эта задача рассматривалась еще в прошлом веке. Предлагаемый здесь алгоритм не требует разложения полиномов на неприводимые множители и, в частности, не требует построения полных совокупностей корней алгебраических уравнений. Кроме этого, делаются довольно широкие предположения относительно поля, к которому принадлежат коэффициенты полиномов. Что касается разностных уравнений, то, по-видимому, подобные задачи ранее рассматривались только для линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами специальных видов.

Ранее в [1] автором были рассмотрены разностные уравнения с постоянными коэффициентами и рациональными правыми частями. В настоящей работе развивается предложенный в [1] подход. По-прежнему в качестве полей коэффициентов привлекаются так называемые подходящие поля.

Определение. Подходящим называется поле K характеристики 0 с алгоритмом нахождения целочисленных корней уравнений вида $p(x)=0$, где $p(x)\in K[x]$. При этом под целочисленным корнем понимается корень вида $n1$, где $n\in\mathbf{Z}$, а 1 — единица поля K.

Поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является, очевидно, подходящим. Нетрудно видеть, что простое алгебраическое расширение $K(\theta)$ (алгебраическое или трансцендентное) подходящего поля K само подходящее. Отсюда, в частности, следует, что подходящими полями будут, например, поле $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ рационально-комплексных чисел, поле $\mathbf{Q}(t_1, \ldots, t_m)$ рациональных функций над $\mathbf{Q}$ от произвольного числа переменных, поле алгебраических функций над $\mathbf{Q}$ от произвольного числа переменных $t_1, \ldots, t_m$ и т. д.

В дальнейшем всюду под полем K понимается произвольное подходящее поле.

Примем следующее соглашение. Если $p(x)\in K[x]$ — коэффициент некоторого уравнения, то, утверждая, что $p(x)\neq 0$, будем подразумевать, что $p(x)$ не равен нулю как элемент кольца полиномов от x, т. е. что среди его коэффициентов имеется отличный от нуля. В аналогичном смысле надо понимать утверждение о равенстве полинома нулю.

Отметим, что алгоритмы поиска полиномиальных решений уравнений указанного типа рассмотрены в [2] и на эти чисто полиномиальные алгоритмы опираются алгоритмы, излагаемые ниже. Случаи дифференциального и разностного уравнений будут разобраны раздельно.

§ 1. Рациональные решения дифференциальных уравнений

Пусть дано уравнение

$$(1)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)F^{(\nu)}(x)=b(x),$$

где $a_0(x),\dots,a_n(x)$, $b(x)\in K[x]$. Перейдем временно от исходного поля коэффициентов K к его замыканию $\overline{K}$. Пусть $F(x)\in\overline{K}(x)$ — решение (1). Разложение функции $F(x)$ в поле $\overline{K}(x)$ в сумму простейших дробей позволяет установить, во-первых, что каждый корень $\xi\in\overline{K}$ знаменателя функции $F(x)$ (точнее, знаменателя несократимой формы этой функции) является также корнем полинома $a_n(x)$ и, во-вторых, что показатель степени множителя $x-\xi$ в знаменателе несократимой формы $F(x)$ является модулем некоторого отрицательного целочисленного корня алгебраического уравнения, называемого в теории дифференциальных уравнений определяющим уравнением [3]. Определяющее уравнение получается следующим образом. Представим входящие в (1) коэффициенты $a_0(x),\dots,a_n(x)$ в виде

$$(2)\qquad a_\nu(x)=(x-\xi)^{\alpha_\nu}h_\nu(x),\qquad \nu=0,1,\dots,n,$$

где $h_\nu(x)$ — полином, не делящийся на $x-\xi$ при $a_\nu(x)\neq 0$; если $a_\nu(x)=0$, то $\alpha_\nu=\infty$, $h_\nu(x)=0$. Пусть полином $d(r)$ — это коэффициент при наименьшей степени $x-\xi$ в выражении

$$(3)\qquad \prod_{\nu=0}^{n} r(r-1)\dots(r-\nu+1)h_\nu(\xi)\,(x-\xi)^{\alpha_\nu-\nu};$$

тогда $d(r)=0$ — определяющее уравнение.

Отметим сразу, что в силу формулы Тейлора имеет место равенство

$$h_\nu(\xi)=a_\nu^{(\alpha_\nu)}(\xi)/\alpha_\nu!\,,$$

поэтому выражение (3) переписывается в виде

$$(4)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} r(r-1)\dots(r-\nu+1)\frac{a_\nu^{(\alpha_\nu)}(\xi)}{\alpha_\nu!}(x-\xi)^{\alpha_\nu-\nu}.$$

Определяющее уравнение дает возможность получить верхнюю оценку для степени, в которой $x-\xi$ входит в знаменатель рационального решения дифференциального уравнения (1): в качестве такой оценки

можно взять модуль наименьшего неположительного целочисленного корня определяющего уравнения. Существенно, что при этом можно не переходить от K к $\overline{K}$, а ограничиться поочередным рассмотрением простых алгебраических расширений вида $K(\xi)$, $u_\mu(\xi)=0$, где $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $\in K[x]$ — неприводимые в $K[x]$ множители полинома $a_n(x)$. Но можно предложить и более простой алгоритм получения верхних оценок показателей кратностей, который не требует факторизации (т. е. разложения на неприводимые множители) полиномов. Опишем его. При обсуждении иногда будем говорить о корнях уравнений вида $u(x)=0$, $u(x)\in \in K[x]$. Эти корни могут принадлежать либо полю K, либо некоторому его расширению (например, полю $\overline{K}$). Рассмотрение этих корней требуется только для обоснования алгоритма, сам же алгоритм не нуждается в построении расширений такого рода.

Прежде всего несложными действиями можно перейти от полинома $a_n(x)$ к полиному $a_n^*(x)$, который имеет тот же набор неприводимых множителей, но при этом свободен от квадратов: если $u_1^{\beta_1}(x)u_2^{\beta_2}(x)\ldots$ — разложение $a_n(x)$, то $u_1(x)u_2(x)\ldots$ — разложение $a_n^*(x)$.

Пусть уравнение (1) обладает решением $F(x)\in K(x)$. Пусть $u(x)$ — неприводимый в $K[x]$ множитель полинома $a_n(x)$. Пусть $u(x)$ разлагается на линейные множители $x-\xi_1$, $x-\xi_2$, ... в $\overline{K}[x]$. Тогда $u(x)$ входит в знаменатель несократимой формы $F(x)$ в той же самой степени, в которой входит в него каждый из множителей $x-\xi_1$, $x-\xi_2$, ..., коль скоро $F(x)$ рассматривается как принадлежащее полю $\overline{K}(x)$ решение уравнения (1). Далее, набор чисел $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, определяемый в соответствии с (2), одинаков для всех $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Этот набор таков, что

$$a_\nu(x)=u(x)^{\alpha_\nu}\hat{h}_\nu(x), \quad \nu=0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $\hat{h}_\nu(x)\in K[x]$, и $\hat{h}(x)$ делится на $u(x)$, только если этот полином равен 0.

Связывая таким способом с произвольным неприводимым полиномом $u(x)\in K[x]$ набор $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, будем называть последний мультипоказателем $u(x)$ в уравнении (1). Полином, являющийся произведением нескольких неприводимых полиномов, которые обладают одинаковыми мультипоказателями, будем называть уравновешенным по отношению к уравнению (1).

Пользуясь операцией нахождения наибольшего общего делителя (НОД) полиномов и не прибегая при этом к факторизации, можно представить $a_n^*(x)$ в виде произведения уравновешенных по отношению к (1) полиномов. Вместе с этими полиномами можно получить и соответствующие мультипоказатели. Эта процедура легко получается из более простой процедуры, которая позволяет по свободному от квадратов $f(x)\in K[x]$ и произвольному ненулевому $p(x)\in K[x]$ представить $f(x)$ в $K[x]$ в виде произведения $v_1(x)\ldots v_\sigma(x)$ таким образом, что

$$p(x)=\hat{p}(x)v_1(x)^{\beta_1}\ldots v_\sigma(x)^{\beta_\sigma},$$

где $\hat{p}(x)$ взаимно прост с $f(x)$, а неотрицательные целые $\beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ попарно различны. Опишем эту последнюю процедуру, считая, что результатом ее применения должна быть последовательность пар $(v_1(x), \beta_1), \ldots$ ..., $(v_\sigma(x), \beta_\sigma)$ и при этом $0\leqslant\beta_1<\ldots<\beta_\sigma$.

Прежде всего находим $g(x)=\text{НОД}(f(x), p(x))$. Если $\deg g(x)=0$, то применение процедуры заканчивается и результатом будет последователь-

ность, состоящая из одной пары $(f(x), 0)$. Предположим, что $\deg g(x)>0$. Пусть $f(x)=\breve{f}(x)g(x)$, $p(x)=\breve{p}(x)g(x)^{\beta}$, где $\beta>0$, а $\breve{p}(x)$ не делится на $g(x)$; можно считать, что либо $\breve{f}(x)=1$, либо $\deg \breve{f}(x)>0$. Применим теперь нашу процедуру рекурсивно к полиномам $g(x)$ и $\breve{p}(x)$. Пусть это применение дает результат $(w_1(x), \gamma_1), \ldots, (w_\rho(x), \gamma_\rho)$. Если $\breve{f}(x)=1$, то результатом, соответствующим исходным данным $f(x)$, $p(x)$, будет $(w_1(x), \gamma_1+\beta), \ldots, (w_\rho(x), \gamma_\rho+\beta)$, иначе будет $(f(x), 0)$, $(w_1(x), \gamma_1+\beta), \ldots$ $\ldots, (w_\rho(x), \gamma_\rho+\beta)$.

Для решения задачи представления $a_n^*(x)$ в виде произведения уравновешенных по отношению к (1) множителей и для вычисления их мультипоказателей можно вначале применить описанную процедуру к $a_n^*(x)$ и $a_{i_1}(x)$, где $a_{i_1}(x)$ — первый ненулевой полином среди $a_0(x), \ldots, a_n(x)$. Получив соответствующую последовательность пар $(v_1(x), \beta_1), \ldots, (v_\tau(x), \beta_\tau)$, можно затем применить эту процедуру к $v_1(x)$ и $a_{i_2}(x), \ldots, v_\tau(x)$ и $a_{i_2}(x)$, где $a_{i_2}(x)$ — второй ненулевой полином среди $a_0(x), \ldots, a_n(x)$. Дойдя таким образом до предпоследнего ненулевого полинома среди $a_0(x), \ldots$ $\ldots, a_n(x)$ (последним ненулевым будет $a_n(x)$, он останется без употребления), получим нужное нам представление. При этом мультипоказатель каждого множителя будет иметь i_1-1 первых компонент, равных ∞, затем будет следовать одно из чисел $\beta_1, \ldots, \beta_\tau$, затем, вплоть до компоненты с индексом i_2-1,— символ ∞, и т. д.

Пусть построено представление $a_n^*(x)$ в виде произведения

$$a_n^*(x)=c_1(x)\ldots c_m(x), \qquad m\geqslant 1, \tag{6}$$

уравновешенных по отношению к (1) полиномов, и пусть вычислены мультипоказатели этих полиномов. Будем рассматривать $c_1(x), \ldots, c_m(x)$ поочередно. Пусть $c(x)$ — один из этих полиномов, и пусть $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — его мультипоказатель. Рассмотрим разности $\alpha_\nu-\nu$, $\nu=0, 1, \ldots, n$, и выберем значения индекса ν, для которых $\alpha_\nu-\nu$ достигает минимума. Пусть этими значениями будут $\nu_1, \ldots, \nu_k$, $0\leqslant\nu_1<\ldots<\nu_k\leqslant n$. Воспользуемся для получения определяющего уравнения выражением (4). Нам неизвестно значение ξ, и будем вместо него использовать некоторую переменную, например переменную x:

$$r(r-1)\ldots(r-\nu_1+1)\frac{a_{\nu_1}^{(\alpha_{\nu_1})}(x)}{\alpha_{\nu_1}!}+\ldots+r(r-1)\ldots$$
$$\ldots(r-\nu_k+1)\frac{a_{\nu_k}^{(\alpha_{\nu_k})}(x)}{\alpha_{\nu_k}!}=0. \tag{7}$$

Это дает определяющее уравнение в виде равенства $d(r, x)=0$, $d(r, x)\in$ $\in K[r, x]$. Запишем $d(r, x)$ в виде $\tilde{d}(x)$, включив r в коэффициенты: $\tilde{d}(x)\in K[r][x]$. Если для некоторого целого r_0 можно подобрать корень ξ уравнения $c(x)=0$ (напомним, что $c(x)$ — один из сомножителей правой части (6)) такой, что $d(r_0, \xi)=0$, то само целое число r_0 должно быть корнем уравнения $u(r)=0$, где $u(r)$ — это результант полиномов $\tilde{d}(x)$ и $c(x)$. Поэтому, найдя наименьший отрицательный корень уравнения $u(r)=0$, $u(r)\in K[r]$, и взяв его модуль, получим оценку сверху для вхождения $c(x)$ в знаменатель рационального решения $F(x)$ дифференциального уравнения (1).

Для полного обоснования этого способа получения верхних оценок показателей степеней следует еще показать, что результант $u(r)$ не равен нулю тождественно. Если бы выполнялось тождественное равенство нулю, то $d(r, x)$ и $c(x)$ имели бы нетривиальный общий делитель — полином от x степени выше нулевой. Но любой неприводимый в $K[x]$ множитель полинома $c(x)$ входит в $a_{\nu_i}(x)$ с показателем α_{ν_i}, $i=1, 2, \ldots, k$. Поэтому полином $a_{\nu_i}^{(\alpha_{\nu_i})}(x)$ взаимно прост с $c(x)$. Вместе с этим для элементов кольца $K[r, x]$ имеет место единственность разложения по системе полиномов 1, r, $r(r-1)$, $r(r-1)(r-2), \ldots$ с коэффициентами из $K[x]$. В силу всего сказанного, существование нетривиального общего делителя у имеющего вид (7) полинома $d(r, x)$ и полинома $c(x)$ невозможно.

Если уравнение $u(r)=0$ не имеет отрицательных целочисленных корней, то знаменатель рационального решения $F(x)$ уравнения (1) не должен иметь множитель $c(x)$. Если же отрицательные целочисленные корни имеются, то, найдя модуль наименьшего такого корня, получим верхнюю границу степени, в которой $c(x)$ входит в знаменатель $F(x)$. Пусть для $c_1(x), \ldots, c_m(x)$, входящих в правую часть (6), найдены соответствующие неотрицательные целые $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Тогда если рациональное решение $F(x)$ уравнения (1) существует, то знаменатель несократимой формы $F(x)$ делит $c_1(x)^{\tau_1} \ldots c_m(x)^{\tau_m}$. Но это означает, что рациональное решение может разыскиваться в форме

$$(8) \qquad \frac{y(x)}{c_1(x)^{\tau_1} \ldots c_m(x)^{\tau_m}}, \qquad y(x) \in K[x].$$

Подстановка (8) вместо $F(x)$ в уравнение (1) дает уравнение с полиномиальными коэффициентами для полинома $y(x)$. К этому уравнению можно применить алгоритм из [2].

Итак, применение алгоритма должно разворачиваться следующим образом: 1) освобождение полинома $a_n(x)$ от квадратов (построение полинома $a_n^*(x)$); 2) разложение $a_n^*(x)$ в произведение $c_1(x) \ldots c_m(x)$ уравновешенных по отношению к (1) полиномов и вычисление соответствующих мультипоказателей; 3) построение для каждого $c_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$, полинома $\tilde{d}_i(x)$ с коэффициентами из $K[r]$, который равен левой части уравнения (7) (набор $\nu_1, \ldots, \nu_k$ определяется, исходя из мультипоказателя полинома $c_i(x)$); 4) вычисление для каждого $i=1, 2, \ldots, m$ результанта $u_i(x)$ полиномов $\tilde{d}_i(x)$ и $c_i(x)$, нахождение τ_i ($\tau_i=0$, если $u_i(r)$ не имеет отрицательных целочисленных корней, и τ_i равно модулю наименьшего целочисленного корня в противном случае); 5) подстановка (9) с неизвестным полиномом $y(x)$ в уравнение (1) вместо $F(x)$; 6) применение алгоритма из [2] для исследования и нахождения полиномиальных решений уравнения относительно $y(x)$.

На этом заканчивается описание алгоритма поиска рациональных решений дифференциального уравнения (1). Остается отметить следующее. Для поиска наименьшего отрицательного r такого, что полиномы $d(r, x)$ и $c(x)$ имеют общий делитель — полином от x степени выше первой, может быть использована запись результанта в форме Сильвестра. Имеется экономный модулярный алгоритм Коллинза [4], предназначенный для построения результанта. Но можно обойтись и без явного построения результантов. Если рассматривать $d(r, x)$ и $c(x)$ как полиномы от x с коэф-

фициентами — рациональными функциями от r и применять к ним алгоритм Евклида, то искомое отрицательное целое число должно быть корнем одного из уравнений, получающихся приравниванием нулю старших коэффициентов полиномов — членов последовательности остатков.

Ситуация, когда требуется определить целые r, для которых данные полиномы $f(r, x)$, $g(r, x)$ обладают нетривиальным общим делителем $h(x)$, встречаются и в следующих параграфах. Для их разрешения может быть использован какой-либо из указанных путей.

§ 2. Рациональные решения разностных уравнений

В этом параграфе для нас будет удобной рекуррентная запись разностного уравнения:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)F(x+\nu)=b(x), \tag{9}$$

где $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, $b(x)\in K[x]$. Случай постоянных коэффициентов был разобран в [1]; алгоритм настоящего параграфа по существу опирается на использование величины $\operatorname{Dis} F(x)$, введенной в [1]. Дадим все необходимые определения, обобщив некоторые понятия, введенные в [1].

Пусть $s(x)$, $t(x)\in K[x]$. В некоторых случаях можно подобрать неотрицательное целое r такое, что $s(x+r)$ и $t(x)$ имеет нетривиальный общий делитель (т. е. делитель, являющийся полиномом степени выше нулевой). Из единственности разложения в $K[x]$ на неприводимые множители следует конечность множества таких r. Положим, по определению,

$$\operatorname{dis}(s(x), t(x))=\max\{r \mid r\in Z, r\geqslant 0, \deg \text{НОД}(s(x+r), t(x))\geqslant 1\}.$$

Сразу же подчеркнем, что значение dis определено не для всех $s(x)$, $t(x)$; например, оно не определено для $s(x)=x$, $t(x)=x^2+1$. Но в то же время значение $\operatorname{dis}(s(x), s(x))$ определено всегда, когда $\deg s(x)>0$; так, $\operatorname{dis}(x, x)=0$, $\operatorname{dis}(x(x+1), x(x+1))=1$ и т. д. Для данных $s(x)$ и $t(x)$ величина $\operatorname{dis}(s(x), t(x))$ может быть вычислена, например, как наибольший неотрицательный целочисленный корень уравнения $d(r)=0$, где $d(r)$ — результант полиномов $s(x+r)$ и $t(x)$, рассматриваемых как полиномы от x с коэффициентами из $K[r]$.

Пусть теперь $F(x)\in K(x)$, пусть в несократимой форме рациональная функция $F(x)$ имеет вид $t(x)/s(x)$ и $\deg s(x)>0$. Тогда положим, по определению,

$$\operatorname{Dis} F(x)=\operatorname{dis}(s(x), s(x)).$$

Таким образом, величина $\operatorname{Dis} F(x)$ определена для тех рациональных функций, которые не являются полиномами.

Роль $\operatorname{Dis} F(x)$ для разностных уравнений аналогична роли максимума порядка полюсов функции для дифференциальных уравнений.

Предполагая, что уравнение (9) обладает решением $F(x)\in K(x)$, которое не является полиномом, можно найти оценку сверху для $\operatorname{Dis} F(x)$. Оказывается, что $\operatorname{Dis} F(x)\leqslant \operatorname{dis}(a_0(x), a_n(x))-n$. В самом деле, пусть $\operatorname{Dis} F(x)=m\geqslant 0$ и пусть несократимая форма $F(x)$ имеет вид $t(x)/s(x)$. Пусть $p_1(x)$, $p_2(x)$ — неприводимые в K множители полинома $s(x)$ такие,

что $p_1(x+m)=p_2(x)$. Тогда разложение $F(x)$ в сумму простейших дробей содержит дроби со знаменателями $p_1(x)^i$ и $p_2(x)^j$, где i и j — некоторые натуральные числа. В то же время разложение $F(x+n)$ содержит дробь со знаменателем $p_2(x+n)^j=p_1(x+m+n)^j$. Итак, $F(x)$ дает простейшую дробь со знаменателем $p_1(x)^i$, а $F(x+n)$ — простейшую дробь со знаменателем $p_1(x+m+n)^j$. Разложения функций $F(x+1),\ldots,F(x+n-1)$ не содержат простейших дробей со знаменателями вида $p_1(x)^k$ или $p_1(x+m+n)$, поскольку $\operatorname{Dis}F(x)=m$: если бы, например, разложение $F(x+1)$ содержало простейшую дробь со знаменателем $p_1(x)^k$, то наряду с дробью со знаменателем $p_1(x+m)^j$ функция $F(x)$ содержала бы дробь со знаменателем $p_1(x-1)^k$, а это возможно, только если $\operatorname{Dis}F(x)\geqslant m+1$. Значит, для того чтобы сумма в левой части (9) была полиномом, необходимо, чтобы $a_0(x)$ содержал множитель $p_1(x)$ (с показателем, бо́льшим или равным i), а $a_n(x)$ — множитель $p_1(x+n+m)$ (с показателем, бо́льшим или равным j). Итак, значение $\operatorname{dis}(a_0(x),\ a_n(x))$ должно быть определено и при этом должно выполняться неравенство $\operatorname{dis}(a_0(x),\ a_n(x))\geqslant n+m$, что и требовалось.

Из сказанного следует, что если величина $\operatorname{dis}(a_0(x),\ a_n(x))$ не определена, то уравнение (9) не может иметь неполиномиальных рациональных решений. В этом случае задача полностью решается алгоритмом из [2]. Аналогично дело обстоит, когда $\operatorname{dis}(a_0(x),\ a_n(x))<n$. В дальнейшем будем считать, что $\operatorname{dis}(a_0(x),\ a_n(x))\geqslant n$.

Покажем, что для любого натурального h можно построить такое уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(x)F(x+\nu h)=g(x) \tag{10}$$

(где $f_0(x),\ldots,f_m(x)$, $g(x)\in K[x]$, $m\leqslant n$), что любое решение уравнения (9) является одновременно и его решением.

Прежде всего отметим, что, используя (9), можно для $F(x+k)$, где k — произвольное натуральное число, написать выражение вида

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} v_{\nu k}(x)F(x+\nu)+w_k(x), \tag{11}$$

где $v_{0k}(x),\ldots,v_{n-1,\,k}(x)$, $w_k(x)\in K(x)$. В самом деле, если $k\leqslant n-1$, то в качестве такого выражения можно взять само $F(x+k)$ и тогда $v_{\nu k}(x)=\delta_{\nu k}$ (символ Кронекера), $w_k(x)=0$. Если $k=n$, то, согласно (9),

$$F(x+n)=-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{a_\nu(x)}{a_n(x)}F(x+\nu)+\frac{b(x)}{a_n(x)}. \tag{12}$$

Далее по индукции: если для $F(x+k-1)$ при $k>n$ уже найдено выражение

$$F(x+k-1)=\sum_{\nu=0}^{n-1} v_{\nu,k-1}(x)F(x+\nu)+w_{k-1}(x),$$

то из него получим

$$F(x+k)=\sum_{\nu=1}^{n} v_{\nu-1,k-1}(x)F(x+\nu)+w_{k-1}(x+1)$$

и, подставив в правую часть последнего равенства вместо $F(x+n)$ правую часть равенства (12), выразим $F(x+k)$ через $F(x+n-1)$, $F(x+n-2)$, ..., $F(x)$. При этом коэффициенты $v_{\nu k}(x)$ и свободный член $w_k(x)$ можно представить рациональными функциями, знаменатель каждой из которых равен $a_n(x)^{k-n}$. Нетрудно выписать и рекуррентные соотношения, выражающие числители $v_{\nu k}(x)$ и $w_k(x)$ через числители $v_{\nu,\,k-1}(x)$ и $w_{k-1}(x)$, $\nu=0, 1, \ldots, n$.

Если рассмотреть выражения вида (11) для $F(x+\nu h)$, $\nu=0, 1, \ldots$, приняв при этом обозначения

$$F(x+\nu h)=u_{\nu 0}(x)F(x)+\ldots+u_{\nu,\,n-1}(x)F(x+(n-1)h)+u_{\nu n}(x),$$
$$\nu=0, 1, \ldots,$$

то нетрудно будет заметить, что среди строк $\mathbf{u}_\nu=(u_{\nu 0}(x), \ldots, u_{\nu n}(x))$, $\nu=0, 1, \ldots$, найдется не более n линейно независимых над $K(x)$. Поэтому найдется неотрицательное целое $m\leqslant n$ и $A_0(x), \ldots, A_m(x)\in K(x)$, $A_m(x)\neq 0$, такие, что $A_0(x)\mathbf{u}_0+\ldots+A_m(x)\mathbf{u}_m=0$. Но это означает, что

$$A_m(x)F(x+mh)+\ldots+A_0(x)F(x)=A_m(x)u_{mn}(x)+\ldots$$
$$\ldots+A_0(x)u_{0n}(x).$$

Домножение последнего равенства на общий знаменатель правой части и коэффициентов дает искомое уравнение (10) с полиномиальными коэффициентами.

Если в качестве h взять число заведомо бóльшее, чем $\operatorname{Dis} F(x)$, например $\operatorname{dis}(a_0(x), a_n(x))-n+1$, то при любом неотрицательном целом m рациональные функции $F(x)$, $F(x+h), \ldots, F(x+mh)$, взятые в несократимой форме, будут иметь взаимно простые знаменатели. Поэтому сумма в левой части уравнения (10) может быть полиномом, если только полиномом является каждое из произведений $f_\nu(x)F(x+\nu h)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$. Пусть несократимая форма $F(x)$ есть $t(x)/s(x)$. Тогда $s(x)$ делит $f_0(x)$, $s(x+h)$ делит $f_1(x), \ldots, s(x+mh)$ делит $f_m(x)$, т. е. $s(x)$ делит любой из полиномов $f_\nu(x-\nu h)$, $\nu=0, 1, \ldots, m$, и, следовательно, делит НОД $(f_0(x), f_1(x-h), \ldots, f(x-mh))$. Поэтому если уравнение (9) обладает неполиномиальным рациональным решением, то это решение можно разыскивать в форме (возможно, сократимой)

$$(13)\qquad \frac{y(x)}{\text{НОД}(f_0(x), f_1(x-h), \ldots, f_m(x-mh))}, \qquad y(x)\in K[x].$$

Подстановка (13) вместо $F(x)$ в (9) позволит получить уравнение с полиномиальными коэффициентами для полинома $y(x)$. К этому уравнению можно применить алгоритм из [2].

Итак, применение алгоритма должно разворачиваться следующим образом: 1) вычисление $\operatorname{dis}(a_0(x), a_n(x))$; 2) если величина $\operatorname{dis}(a_0(x), a_n(x))$ не определена или если она меньше h, то (9) заведомо не имеет неполиномиальных рациональных решений и поэтому к уравнению (9) достаточно применить алгоритм из [2]; 3) вычисление $h=\operatorname{dis}(a_0(x), a_n(x))-n+1$, что дает строгую верхнюю оценку для $\operatorname{Dis} F(x)$ (здесь и далее считаем, что $h>0$); 4) построение уравнения (10), которому удовлетворяет любое решение уравнения (9); 5) построение, исходя из полиномов $f_0(x), \ldots, f_m(x)$ – коэффициентов уравнения (10), полинома $l(x)=$ $=\text{НОД}(f_0(x), f_1(x-h), \ldots, f_m(x-mh))$, который делится на знаменатель

любого рационального решения уравнения (9); 6) подстановка $y(x)/l(x)$, где $y(x)$ — неизвестный полином, в (9) вместо $F(x)$ (что приводит к получению уравнения с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью для $y(x)$); 7) применение к полученному уравнению алгоритма из [2].

Заключение

Новизна первого алгоритма в сравнении с известной техникой построния решений (в частности, так называемых нормальных решений [3]) линейных дифференциальных уравнений заключена в пп. 2)—4), т. е. в быстром объединении ряда множителей полинома $a(x)$ в их произведение и в рассмотрении последнего вместе с одним единственным определяющим уравнением. В принципе в случае однородного уравнения алгоритм можно сделать пригодным для нахождения решений вида $q_1(x)^{r_1} \dots q_m{}^{r_m}(x)R(x)$, в которых $R(x)$ — рациональная функция, $q_1(x) \dots q_m(x)$ — некоторые множители полинома $a_n(x)$ и каждое $r_1, \dots, r_m$ является нецелым корнем того или иного определяющего уравнения. Вычисления при этом значительно усложняются: если даже некоторые неприводимые множители $p_1(x)$ и $p_2(x)$ полинома $a_n(x)$ имеют один и тот же мультипоказатель, то, тем не менее, объединять их в один множитель мы можем только тогда, когда разность между любыми двумя корнями определяющего уравнения является целым числом. Если же не прибегать к объединению, то потребуется рассмотрение большого числа различных случаев. Помимо этого $R(x)$ будет, вообще говоря, рациональной функцией над некоторым расширением поля K (например, над $K(r_1, \dots, r_m)$), построение $R(x)$ потребует вычислений в этом расширении. Поэтому, хотя построение решений упомянутого вида и возможно, но главная идея, которая позволила бы в какой-то мере сделать алгоритм поиска рациональных решений экономным, здесь оказывается почти неприменимой.

Если исходное уравнение неоднородное, то любое известное решение позволяет перейти к однородному уравнению с прежней левой частью. Если уравнение однородное, то с помощью известного рационального решения $R(x)$ можно понизить порядок уравнения, вновь получив линейное однородное уравнение с полиномиальными коэффициентами. Поэтому помимо того, что каждое рациональное решение интересно само по себе (просто как известное решение уравнения), в случае линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами оно ценно еще и тем, что позволяет для последующего отыскания других решений переходить к более простым уравнениям того же самого вида, т. е. снова к линейным уравнениям с полиномиальными коэффициентами.

Напомним, что понижение порядка достигается заменой $y(x)=R(x)\cdot z(x)$, где $R(x)$ — известное решение уравнения n-го порядка, $z(x)$ — новая неизвестная функция. Такая замена функции приводит к уравнению, не содержащему $z(x)$, поэтому уравнение относительно $t(x)=z'(x)$ (соответственно, относительно $t(x)=\Delta z(x)$) будет иметь порядок $n-1$. Для случая разностного уравнения здесь существенно то, что $\Delta^k(R(x)z(x))$ можно представить как такую линейную комбинацию $\Delta^k z(x), \dots, \Delta z(x), z(x)$ с известными функциональными коэффициентами, что коэффициент при $z(x)$ равен $\Delta^k R(x)$, например $\Delta(R(x)z(x))=R(x+1)\Delta z(x)+(\Delta R(x))z(x)$.

Понижение порядка может привести к такому уравнению, в котором

будет опознано известное табличное уравнение (справочник [3], например, содержит сведения о решениях очень большого числа дифференциальных уравнений невысоких порядков с полиномиальными коэффициентами). С другой стороны, если в результате понижения порядка будет получено дифференциальное уравнение второго порядка, то это даст возможность применить алгоритм Ковачича [5], программная реализация которого описана в [6]. С помощью этого алгоритма строятся (хотя и в довольно неудобном для пользователя-практика виде) все лиувиллевы решения данного уравнения. Но, повторяем, алгоритм Ковачича может быть применен только к линейным однородным дифференциальным уравнениям второго порядка с полиномиальными коэффициентами.

Понятно, что если функция $z'(x)$ (соответственно, $\Delta z(x)$) рациональна, то $z(x)$ может не быть рациональной, поэтому указанное понижение порядка уравнения позволяет в ряде случаев находить с помощью приведенных в этой работе алгоритмов и некоторые решения, не являющиеся рациональными. Простой пример: уравнение

$$x^2y''-xy'+y=0 \tag{14}$$

обладает полиномиальным решением $y=x$. Переходя к новой неизвестной функции z такой, что $y=zx$, получаем уравнение

$$x^3z''+x^2z'=0;$$

после этого проводим сокращение на x^2 и вводим функцию $t=z'$. Это дает уравнение

$$xt'+t=0.$$

Применяя к последнему алгоритм поиска рациональных решений, получаем $t=1/x$, что дает $z'=1/x$, $y=zx$. Если применить обычную операцию интегрирования, то можно получить новое решение: $y=x\ln x$. Итак, применение алгоритма поиска рациональных решений и операции интегрирования приводит к получению двух линейно независимых решений уравнения (14): x и $x\ln x$.

Таким образом, предложенные выше алгоритмы могут стать полезной составной частью любой системы компьютерной алгебры, ориентированной на решение линейных дифференциальных или разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

Литература

1. *Абрамов С. А.* Решение линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами в поле рациональных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 4. С. 1067–1070.
2. *Абрамов С. А.* Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1989. № 3. С. 56–60.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
4. *Collins G. E.* The calculation of multivariate polynomial resultants // J. ACM. 1971. V. 18. P. 515–532.
5. *Kovacic J. J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equation // J. Symbolic Comput. 1986. № 2. P. 3–43.
6. *Zharkov A. Yu.* An implementation of Kovacic's algorithm for solving ordinary differential equation in FORMAC: Сообщ. № Е11-87-455. Дубна: ОИЯИ, 1987.

Поступила в редакцию 28.XI.1988