

Семинар по компьютерной алгебре в 2005–2006 г.

С.А. Абрамов
Вычислительный центр РАН
Москва 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
sabramov@ccas.ru

А.А. Боголюбская, В.А. Ростовцев
Объединенный институт ядерных исследований
г. Дубна, Московская область
abogol@jinr.ru, rost@jinr.ru

В.Ф. Еднерал
НИИ Ядерной физики, МГУ
Москва 119992, Воробьевы горы
edneral@theory.simp.msu.ru

Аннотация

Годовой отчет о работе научно-исследовательского семинара по компьютерной алгебре.

1 О семинаре

В семинаре рассматриваются новые результаты в области компьютерной алгебры – символичные алгоритмы и их реализация, соответствующие вопросы системного программирования.

В 2005–2006 учебном году семинар собирался, как правило, раз в месяц по третьим средам на факультете вычислительной математики и кибернетики, а в мае 2006 г. в Дубне, в Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) состоялось традиционное заседание, организованное совместно с Лабораторией информационных технологий ОИЯИ.

2 Регулярные собрания семинара

С сентября по апрель были прочитаны следующие доклады¹.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН) *Памяти Мануэля Бронштейна.*

С.П. Царев (Красноярский ПГУ) *Общее определение факторизации произвольной линейной системы уравнений с частными производными.*

Известное “наивное” определение факторизации линейного обыкновенного дифференциального оператора как разложение его в произведение операторов меньшего порядка нельзя перенести на случай линейных операторов с частными производными - будут потеряны

¹Перечень докладов, прочитанных в 1995-2005 г., опубликован в [1]-[10].

существенные свойства факторизаций операторов в обыкновенном случае, такие, как теорема Ландау и связь полной факторизуемости и возможности выписать полное решение. Предлагается общий подход, опирающийся на известные свойства абелевых категорий и сохраняющий упомянутые выше свойства, как и многие другие. Вкратце сообщаются необходимые сведения из теории категорий.

А.Н. Прокопеня (Брестский технический университет, Белоруссия) *Символьные вычисления в исследованиях устойчивости равновесных решений эллиптических ограниченных задач многих тел.*

Исследование устойчивости равновесных решений эллиптических ограниченных задач многих тел производится на основе КАМ-теории. Такой подход связан с построением последовательности канонических преобразований, приводящих гамильтониан системы к нормальной форме, и применением теорем Арнольда-Мозера-Маркеева. Обсуждаются алгоритмы соответствующих вычислений и их реализация с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica. В качестве примера рассматривается гамильтонова система второго порядка, описывающая движение частицы пренебрежимо малой массы в гравитационном поле, генерируемом N частицами, движущимися вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам, которые определяются решениями соответствующей задачи N тел. Эта проблема аналогична задаче Ситникова в случае трех тел.

А.М. Шерменев (Центр исследований волнового движения РАН, Москва) *Разделение переменных для нелинейного волнового уравнения в цилиндрических координатах.*

Рассматриваются некоторые классические волновые движения в рамках квадратичного приближения. Когда используются цилиндрические координаты, обычная техника теории возмущений приводит к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов (в отличие от декартовых координат). Показывается, что эти системы совместны для некоторых волновых уравнений (например, для уравнения мелкой воды) и даются явные выражения коэффициентов первых двух гармоник в виде многочленов от функций Бесселя и тригонометрических функций угла. Это позволяет получить ряд решений этого уравнения с той же точностью, с какой уравнение выведено.

Ю.А. Блинков (Саратовский ГУ) *Открытая система GINV, реализующая метод базисов Гребнера для систем уравнений.*

Дается описание первой версии (версии 1.1) открытой системы GINV, ориентированной на исследование алгебраических, дифференциальных и разностных систем уравнений полиномиального типа и построение соответствующих базисов Гребнера. В библиотеку программ данной версии включены алгоритмы построения инволютивных базисов Жане и базисов типа Жане для идеалов и модулей в коммутативной алгебре. Библиотека написана на языке C++ и содержит документацию на русском и английском языках, созданную с помощью системы Doxygen. Интерфейсы системы GINV, разработанные для основных классов, позволяют пользователю легко встраивать новые алгоритмы и структуры данных. Система интегрирована в язык Python в качестве модуля. Версия GINV 1.1 доступна на web-странице <http://invo.jinr.ru>.

Г. Лесерф (Университет г. Версаль, Франция) *Алгоритмы факторизации многочленов многих переменных.*

Дается обзор основных алгоритмов факторизации многочленов многих переменных и проводится анализ их относительной эффективности. Предлагается алгоритм, являющийся

ся наиболее быстрым из известных в настоящее время алгоритмов для плотных многочленов над полем нулевой или достаточно большой характеристики. Этот алгоритм близок к оптимальному; он основан на технике подъема и рекомбинации Гензеля, введенной в употребление Цассенхаузом в 1970-х годах. Дополнительно обсуждается случай небольших характеристик.

Г. Лесерф (Университет г. Версаль, Франция) *Алгоритмы факторизации многочленов многих переменных (окончание)*.

Заключительная часть доклада в основном посвящена проблеме абсолютной факторизации многочленов многих переменных, т.е. факторизации над алгебраическим замыканием основного поля. Дается обзор известных на сегодняшний день методов, а также анализ связи абсолютной факторизации с факторизациями над простыми алгебраическими расширениями и над полем разложения данного многочлена одной переменной. Также дается подробное описание новейших быстрых алгоритмов, основанных на классической технике подъема и рекомбинации Гензеля.

А.Г. Петров (Институт Проблем Механики РАН, Москва) *О нормализации и симметризации гамильтоновых систем*.

Предлагаются два алгоритма асимптотической симметризации гамильтониана.

3 Двухдневная конференция в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна)

По установившейся традиции в мае 2006 г. в Дубне прошло совместное заседание семинаров ВМК МГУ, НИИЯФ МГУ и Лаборатории информационных технологий ОИЯИ. По существу, это была двухдневная конференция по компьютерной алгебре и ее приложениям.

Вниманию участников были предложены следующие выступления.

Г.Б. Ефимов (ИПМ РАН), М.В. Грошева (Институт механики МГУ) *История использования аналитических вычислений в задачах механики*.

Презентация монографии Г.Б.Ефимова, М.В.Грошевой и В.А. Самсонова (издание ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005, 87 с., библиография более 550 названий), посвященной истории развития символьных (аналитических) вычислений и систем аналитических вычислений (САВ) в нашей стране. В монографии рассматриваются основные этапы создания и применения отечественных САВ, от первых попыток в начале 1960-х годов до конца 1980-х, смена ведущих коллективов и САВ, важнейшие конференции и семинары. Дается обзор большого числа работ по использованию САВ в разнообразных задачах механики. Обращается внимание на опыт использования САВ в обучении и образовании. Предлагается классификация типов САВ и классов решаемых с их помощью задач, объясняющая многообразие отечественных САВ.

Работы последних лет отражены лишь в виде отдельных примеров, основное внимание уделяется истории применения САВ (работам прошлых лет).

Н.Д. Гогин, А.А. Мюллери (Университет г. Турку, Финляндия) *Последовательность Фибоначчи-Падована и матрицы преобразования Мак-Вильямс*.

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

А.И. Зобнин, М.В. Кондратьева, Е.В. Панкратьев, Д.В. Трушин (Мех-мат МГУ) *Вопросы конечности дифференциальных стандартных базисов.*

Конечный дифференциальный стандартный базис дифференциального идеала позволяет алгоритмически решать многие вопросы, относящиеся к дифференциальным уравнениям. Конструкция такого базиса является обобщением конструкции базиса Гребнера для полиномиальных идеалов. К сожалению, далеко не все идеалы обладают конечным дифференциальным стандартным базисом, поэтому важно знать, в каких случаях он конечен. (Недавно для определенного класса допустимых упорядочений в случае одной дифференциальной неизвестной было доказано, что конечность стандартного базиса равносильна наличию в идеале квазилинейного многочлена, то есть многочлена, разрешенного относительно старшей производной). Исследуется случай идеалов, порожденных одним дифференциальным многочленом первого порядка. В этом случае вопрос о конечности дифференциального стандартного базиса оказывается тесно связанным с радикальностью идеала.

Е.С. Шемякова, Ф. Винклер (РИСК, Австрия) *Препятствия к факторизации линейных операторов с частными производными. Общий случай.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

М.В. Кондратьева (Мех-мат МГУ), О.Д. Голубицкий (Королевский университет Онтарио, Канада), М. Могено Маза (Университет Вестерн Онтарио, Канада), А.И. Овчинников (Мех-мат МГУ; Университет штата Северная Каролина, США) *О некоторых оценках в алгоритме Розенфельда-Гребнера.*

Как показывают эксперименты, даже в случае обыкновенных дифференциальных уравнений алгоритм Розенфельда-Гребнера обладает высокой сложностью, но теоретических оценок сложности этого алгоритма пока нет. Предлагается оценка порядков многочленов на выходе этого алгоритма, что должно приблизить к получению оценки сложности.

Р.А. Баратов, Е.В. Панкратьев (Мех-мат МГУ) *Реализация алгоритма F4 в системе Axiom.*

Предложенный Фожером алгоритм F4 является одним из наиболее эффективных методов вычисления базисов Гребнера полиномиальных идеалов. Известно три реализации этого алгоритма, в том числе, в системе Maple. Система Axiom является в настоящее время наиболее мощной свободно распространяемой системой компьютерной алгебры. Предлагается выполненная в рамках этой системы реализация алгоритма F4.

А.В. Зорин, Л.А. Севастьянов, Н.П. Третьяков (РУДН, Москва) *Компьютерное моделирование водородоподобных атомов в квантовой механике с неотрицательной функцией распределения.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

Г.В. Плотников (ВМК МГУ) *Символьные алгоритмы исследования частичной устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений.*

Рассматриваются реализации символьных алгоритмов исследования частичной устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с использованием Maple. В задаче частичной устойчивости решается вопрос об устойчивости решения системы по отношению к некоторому подмножеству переменных. Для исследования частичной устойчивости реализован алгоритм Абрамова-Бронштейна. Алгоритм позволяет строить новую систему линейных дифференциальных или разностных уравнений с постоянными или переменными коэффициентами, в которую входят вы-

бренные компоненты решения исходной системы и некоторые их производные. Реализован критерий Лъенара-Шипара, основанный на критерии Рауса-Гурвица, для исследования устойчивости характеристического полинома новой дифференциальной системы. Особое внимание уделяется случаю систем уравнений, содержащих параметры: в алгоритмы внесены необходимые дополнения, исключающие получение некорректных решений.

С. П. Поляков (ВЦ РАН) *Об однородных рекурренциях Цейлбергера.*

Доказывается существование правильных термов, рекурренции Цейлбергера для которых однородны и имеют сколь угодно высокий порядок. Приводится обоснование корректности алгоритма Цейлбергера для случая однородных рекурренций Цейлбергера и предлагается дополнение к алгоритму для более эффективного поиска таких рекурренций.

Г.И. Малашенок, Ю.Д. Валеев (Тамбовский ГУ) *Рекурсивное распараллеливание символьно-численных алгоритмов.*

Предлагается схема распараллеливания символьно-численных алгоритмов, основанная на последовательном рекурсивном алгоритме. Схема предназначена для реализации на кластерных вычислительных системах. Рассматриваются различные варианты такой схемы.

В.П. Гердт (ЛИТ ОИЯИ, Дубна), Ю.А. Блинков (Саратовский ГУ) *О стратегии выбора немультимпликативных продолжений при вычислении базисов Жана.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

А.С. Семенов (Мех-мат МГУ) *Конструктивность инволютивных делений: новые результаты.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.И. Сердюкова (ЛИТ ОИЯИ, Дубна) *Обратная задача для двумерного дискретного уравнения Шредингера в квадрате.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.И. Виницкий, В.П. Гердт, А.А. Гусев (ОИЯИ, Дубна), М.С. Касчиев (ИМИ БАН, Болгария), В.А. Ростовцев, В.Н. Самойлов, Т.В. Тюпикова, О. Чулуунбаатар (ОИЯИ, Дубна) *Символьно-численный алгоритм вычисления матричных элементов параметрической задачи на собственные значения.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

И.Н. Беляева (Белгородский ГУ), С.И. Виницкий, А.А. Гусев (ОИЯИ, Дубна), А.Н. Макаренко (Белгородский ГУ), В.А. Ростовцев (ЛИТ ОИЯИ, Дубна), Н.А. Чеканов (Белгородский ГУ) *Программа для вычисления спектра и волновых функций C_{2v} -симметричного двумерного уравнения Шредингера.*

На основе метода самосогласованного базиса предлагается символьно-численный алгоритм решения двумерного уравнения Шредингера, гамильтониан которого является инвариантным относительно дискретной группы C_{2v} с поверхностью потенциальной энергии, имеющей два локальных минимума и единственную седловую точку. Для этого уравнения получены его энергетические уровни и волновые функции.

В.В. Корняк (ЛИТ ОИЯИ, Дубна) *Симметричные клеточные автоматы.*

Статья по теме доклада публикуется в этом номере журнала.

С.Л. Скороходов (ВЦ РАН) *Высокоточный метод решения уравнения Орра-Зоммерфельда.*

Предлагается метод нахождения собственных функций и собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда, основанный на построении системы разложений решения, использовании аппроксимаций Паде и сшивке решений. Исследуются значения больших чисел Рейнольдса, что соответствует сингулярному возмущению уравнения. На всех этапах решения – построении разложений, исследовании сходимости и ее ускорении – используются символьные преобразования.

А.И. Боголюбский (Мех-мат МГУ), С. Л. Скороходов (ВЦ РАН) *Новый метод вычисления целых функций широкого класса.*

Рассматривается класс голоморфных в $\mathbb{C}$ функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям произвольного порядка, и практически важная задача их вычисления при большой абсолютной величине аргумента. Решение этой задачи часто осложняется наличием существенной особенности функции в точке $z = \infty$, приводящим к катастрофической потере значащих цифр при расчете. Предлагается новый метод преодоления этого эффекта, основанный на использовании символьного анализа асимптотики отношения коэффициентов рядов и их обращенном суммировании. Подробно рассматривается применение метода для решения сложной задачи вычисления обобщенной гипергеометрической функции ${}_pF_q(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z)$, $q \geq p$ и исследования расположения ее нулей.

С.А. Абрамов (ВЦ РАН) *О суммировании гипергеометрических последовательностей.*

Рассматриваются гипергеометрические последовательности, т.е. последовательности, удовлетворяющие линейным однородным рекуррентным уравнениям первого порядка с взаимно-простыми полиномиальными коэффициентами. Предлагается необходимое и достаточное условие возможности использования дискретной формулы Ньютона-Лейбница для суммирования элементов такого рода последовательности в том случае, когда существует первообразная гипергеометрическая последовательность (с помощью алгоритма Госпера такая первообразная в случае ее существования определяется почти всюду).

В.Ю. Папшев, С.Ю. Славянов (СПбГУ) *Быстрый алгоритм вычисления мультипольных матричных элементов.*

Предлагается способ получения выражений для мультипольных матричных элементов с помощью преобразования Гильберта. Обсуждается вычисление специальных случаев коэффициентов Клебша-Гордона.

Л.М. Беркович (Самарский ГУ) *Преобразование Куммера-Лиувилля и факторизация линейных дифференциальных операторов.*

Рассматривается факторизация одного класса линейных уравнений, получаемая с помощью преобразования Куммера-Лиувилля.

Л.М. Беркович, С.А. Евлахов (Самарский ГУ) *Интегрирование нелинейных автономных дифференциальных уравнений, допускающих точную линеаризацию.*

Описывается реализация в системе REDUCE алгоритма получения общих решений нелинейных автономных дифференциальных уравнений 2-го порядка и однопараметрических семейств их частных решений.

Е.В. Беспалько, С.А. Михеев (Тверской ГУ), И.В. Пузынин (ЛИТ ОИЯИ, Дубна), В.П. Цветков (Тверской ГУ) *Аналитические методы в теории гравитирующих сверх-*

плотных конфигураций с реалистическими уравнениями состояния.

Составлены алгоритмы символьных вычислений для решения уравнения гидростатического равновесия стационарно вращающейся гравитирующей сверхплотной конфигурации с использованием уравнений состояния ядерной материи Бете-Джонсона, Оппенгеймера-Волкова, Рейда. Показано существование точек бифуркации, в которых происходит ответвление асимметричных относительно оси вращения решений для распределения плотности. Проведено аналитическое исследование решений вблизи этих точек. В результате задача о точке бифуркации свелась к вопросу о существовании вещественных решений в физической области кубической параболы.

Н.Н. Васильев (СПб. отд. математического института им. Стеклова, РАН) *Выпуклые мономиальные упорядочения, многомерные диаграммы Юнга и базисы Гребнера.*

Определяется класс выпуклых мономиальных упорядочений и показывается, что теория базисов Гребнера обобщается на случай таких упорядочений. Доказывается, что каждый идеал имеет единственный базис Гребнера относительно выпуклого мономиального порядка, а каждый элемент кольца многочленов имеет каноническую нормальную форму. Описываются связи между теорией базисов Гребнера и комбинаторикой многомерных диаграмм Юнга.

В.Ф. Еднерал (НИИЯФ МГУ) *Поиск дополнительных интегралов в методе нормальных форм.*

Рассматривается однопараметрическая автономная система ОДУ шестого порядка, которая является частным случаем системы Эйлера - Пуассона, описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой. Исследуются два однопараметрических семейства стационарных точек системы (для этого используется Mathematica). Обнаружен ряд значений параметра, при которых нормализованная система имеет дополнительные семейства периодических решений, которые примыкают к соответствующей стационарной точке.

В.В. Флоринский, Н.А. Чеканов (Белгородский ГУ) *LINDA: Maple-программа для нахождения классических решений уравнения Дюффинга и вычисления спектра его квантового аналога.*

Рассматривается полуклассическое квантование уравнения Дюффинга. Приводится аналитическое выражение энергетического спектра слабо возмущенного осциллятора. Предлагается программа вычислений по малому параметру в любом порядке.

Литература

- [1] Абрамов С.А., Зима Е.В. Семинар по компьютерной алгебре на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1995-1996г. // Программирование, 1997, No 1. С. 75–77.
- [2] Абрамов С.А., Зима Е.В. Научно-исследовательский семинар “Компьютерная алгебра” в 1996-1997 г. // Программирование, 1998, No 1. С. 69–72.
- [3] Абрамов С.А., Ростовцев В.А. Семинар по компьютерной алгебре в 1997-1998 г. // Программирование, 1998, No 6. С. 3–7.
- [4] Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А. Семинар по компьютерной алгебре в 1998-1999 г. // Программирование, 2000, No 1. С. 8–12.

- [5] *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 1999-2000 г. // Программирование, 2001, No 1. С. 3–7.
- [6] *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2000-2001 г. // Программирование, 2002, No 2. С. 6–9.
- [7] *Абрамов С.А., Крюков А.П., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2001-2002 г. // Программирование, 2003, No 2. С. 3–7.
- [8] *Абрамов С.А., Еднерал В.Ф., Ростовцев В.А.* Семинар по компьютерной алгебре в 2002-2003 г. // Программирование, 2004, No 2. С. 3–7.
- [9] *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2003-2004 г. // Программирование, 2005, No 2. С. 3–9.
- [10] *Абрамов С.А., Боголюбская А.А., Ростовцев В.А., Еднерал В.Ф.* Семинар по компьютерной алгебре в 2004-2005 г. // Программирование, 2006, No 2. С. 3–7.