Об одной алгоритмически неразрешимой проблеме, связанной с разностными уравнениями с параметрами*

С. А. Абрамов
Вычислительный центр РАН
Москва, 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
sergeyabramov@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются линейные разностные уравнения с полиномиальными коэффициентами, зависящими от параметров. Доказывается алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания существования таких значений параметров, при которых уравнение имеет полиномиальное решение, или, в другом варианте, решение в виде рациональной функции (аналогично доказанной ранее Ж.-А.Вейлем неразрешимости для дифференциального случая).

1 Введение

В настоящее время в компьютерной алгебре и близких ей дисциплинах известно уже довольно большое число алгоритмически неразрешимых проблем. Часть этих проблем относится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, преимущественно — к алгебраическим дифференциальным уравнениям, имеющим вид $f(x, y', y'', \ldots, y^{(\rho)}) = 0$, где f — полином с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (см., например, работу [7], которая посвящена вопросам алгоритмической разрешимости и неразрешимости, связанным с такими дифференциальными уравнениями, и содержит помимо оригинальных результатов еще и некоторый вводный обзор публикаций по этой теме). Линейные дифференциальные уравнения с полиномиальными коэффициентами являются частным случаем алгебраических дифференциальных уравнений и многие вопросы для них выглядят проще, чем для алгебраических дифференциальных уравнений общего вида. Тем не менее и в связи с линейными уравнениями имеются проблемы, не допускающие алгоритмического решения. Неопубликованный результат Ж.-А. Вейля касается линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, зависящими от параметров: показана невозможность алгоритма, позволяющего узнавать, существуют ли для произвольного заданного уравнения числовые значения параметров, при которых это уравнение имеет решение в виде ненулевой рациональной функции. Результат Ж.-А. Вейля достаточно просто переносится на случай полиномиальных решений дифференциальных уравнений обсуждаемого вида. Этим вопросам посвящен раздел 2 статьи.

Раздел 3 содержит основной результат статьи: показывается, что алгоритмическая неразрешимость, аналогичная установленной Ж.-А. Вейлем, имеет место и для линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, зависящими от параметров. Отметим, что алгоритмы поиска полиномиальных и рациональных решений не

*Частичная поддержка РФФИ, грант 10-01-00249-а и ECONET, грант 21315ZF.

содержащих параметры уравнений с полиномиальными коэффициентами хорошо известны в компьютерной алгебре. Наиболее ранние алгоритмы такого рода можно найти в [10] (дифференциальный случай) и [1, 2] (разностный случай).

В разделе 4 обсуждается проблема, видимо, пока открытая, касающаяся уравнений с одним параметром.

О результатах этой статьи кратко сообщалось в [3].

Автор признателен Ж.-А. Вейлю (Лиможский университет) и С.П. Цареву (Сибирский федеральный университет) за интересные и полезные обсуждения вопросов, затрагиваемых в статье.

2 Дифференциальное уравнение с параметрами

Иногда приходится сталкиваться с уравнениями (например, дифференциальными), содержащими параметры. Пусть в уравнении $L(y) = 0$ оператор L имеет вид

$$r_\rho(x, t_1, \dots, t_m)D^\rho + r_{\rho-1}(x, t_1, \dots, t_m)D^{\rho-1} + \dots + r_0(x, t_1, \dots, t_m), \tag{1}$$

где $r_0, r_1, \dots, r_\rho$ суть полиномы указанных переменных. Здесь x — независимая переменная, $t_1, t_2, \dots, t_m$ — параметры.

Возникает вопрос, можно ли алгоритмически отыскивать такие значения параметров, при которых уравнение $L(y) = 0$ имеет решения того или иного вида, или хотя бы распознавать существование таких значений. Ж.-А. Вейлю принадлежит следующий результат[1]:

Теорема 1. *Невозможен алгоритм, который бы для произвольного оператора L вида (1) с $r_i(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{Q}[x, t_1, t_2, \dots, t_m], i = 0, 1, \dots, \rho$, отвечал на вопрос, существуют ли числовые значения параметров $t_1, t_2, \dots, t_m$, при которых уравнение $L(y) = 0$ имеет решение в виде ненулевой рациональной функции от x.*

Доказательство опирается на теорему Ю.В. Матиясевича о том, что невозможен алгоритм, который бы для произвольного полинома $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ с целыми коэффициентами отвечал на вопрос, имеет ли уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_m) = 0$ решение в целых числах ([4, 5]; эта теорема дает решение в отрицательном смысле десятой проблемы Гильберта). Пусть $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ — какой-то полином с целыми коэффициентами. Тогда функция

$$F(x, t_1, t_2, \dots, t_m) = e^{xP(t_1, t_2, \dots, t_m)}(x-1)^{t_1}(x-2)^{t_2} \dots (x-m)^{t_m} \tag{2}$$

при некоторых конкретных числовых значениях $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ параметров $t_1, t_2, \dots, t_m$ является рациональной функцией от x, если и только если $P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$ и $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{Z}$. При этом функция F при любых значениях параметров удовлетворяет уравнению

$$y' - \frac{F'}{F}y = 0,$$

т.е. уравнению

$$y' - \left(\frac{t_1}{x-1} + \frac{t_2}{x-2} + \dots + \frac{t_m}{x-m} + P(t_1, t_2, \dots, t_m)\right) y = 0, \tag{3}$$

[1]Самим Ж.-А. Вейлем этот результат не опубликован. Со ссылкой на Ж.-А. Вейля доказательство приводится в статье Д. Буше [6], где рассматривается ряд частных случаев задачи поиска точных решений уравнений с параметрами.

которое можно домножением на $(x-1)(x-2)\dots(x-m)$ превратить в уравнение с полиномиальными коэффициентами. Следовательно, если бы мы обладали алгоритмом A, отвечающим на вопрос о существовании значений параметров, при которых уравнение $L(y)=0$ с оператором L вида (1) имеет решение в виде рациональной функции, то этот алгоритм позволял бы отвечать на вопрос о том, разрешимо ли при данном $P(t_1,t_2,\dots,t_m)\in\mathbb{Z}[t_1,t_2,\dots,t_m]$ уравнение $P(t_1,t_2,\dots,t_m)=0$ в целых числах. Для получения ответа достаточно бы было построить дифференциальное уравнение (3), представить его как уравнение с полиномиальными коэффициентами, зависящими от параметров $t_1,t_2,\dots,t_m$, и к полученному дифференциальному уравнению применить алгоритм A. Это бы противоречило теореме Матиясевича. □

Результат Ж.-А. Вейля достаточно просто переносится на случай полиномиальных решений дифференциальных уравнений обсуждаемого вида: невозможен алгоритм, который бы для произвольного оператора L вида (1) с $r_i(x,t_1,t_2,\dots,t_m)\in\mathbb{Q}[x,t_1,t_2,\dots,t_m]$, $i=0,1,\dots,\rho$, отвечал на вопрос, существуют ли числовые значения параметров $t_1,t_2,\dots,t_m$, при которых уравнение $L(y)=0$ имеет ненулевое полиномиальное решение. Утверждение следует из того, что невозможен алгоритм, который бы для произвольного полинома $P(t_1,t_2,\dots,t_m)$ с целыми коэффициентами отвечал на вопрос, имеет ли уравнение $P(t_1,t_2,\dots,t_m)=0$ решение в неотрицательных целых числах (этот факт является следствием теоремы Матиясевича, так как уравнение $P(t_1,t_2,\dots,t_m)=0$ имеет решение в целых числах, если и только если уравнение

$$P(u_1-v_1,u_2-v_2,\dots,u_m-v_m)=0, \tag{4}$$

где $u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_m,v_m$ — неизвестные, имеет решение в неотрицательных целых числах). Мы видим, что функция (2) является полиномом от x при некоторых конкретных числовых значениях $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m$ параметров $t_1,t_2,\dots,t_m$, если и только если $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m$ суть неотрицательные целые и при этом $P(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m)=0$. Рассуждая как прежде, получаем, что если бы мы обладали алгоритмом A', отвечающим на вопрос о существовании значений параметров, при которых уравнение $L(y)=0$ с оператором L вида (1) имеет ненулевое полиномиальное решение, то этот алгоритм позволял бы отвечать на вопрос о том, имеет ли уравнение $P(t_1,t_2,\dots,t_m)=0$ при данном полиноме $P(t_1,t_2,\dots,t_m)$ с целыми коэффициентами решение в целых неотрицательных числах.

3 Разностное уравнение с параметрами

В связи с уравнениями с параметрами обратимся к разностному случаю. Оператор L теперь имеет вид

$$r_\rho(x,t_1,\dots,t_m)E^\rho+r_{\rho-1}(x,t_1,\dots,t_m)E^{\rho-1}+\dots+r_0(x,t_1,\dots,t_m), \tag{5}$$

где E — оператор сдвига: $E(F(x))=F(x+1)$, и $r_0,r_1,\dots,r_\rho$ суть полиномы указанных переменных, $t_1,t_2,\dots,t_m$ — параметры.

Условимся называть *знаменателем* рациональной функции $F(x)\in\mathbb{Q}(x)$ полином $c(x)\in K[x]$, $\operatorname{lc}(c(x))=1$, для которого $F(x)=\frac{b(x)}{c(x)}$ при некотором полиноме $b(x)\in\mathbb{Q}[x]$, взаимно простом с $c(x)$. При этом полином $b(x)$ называется *числителем* $F(x)$. Знаменателем нулевой рациональной функции будем считать полином $c(x)=1$. Числитель и знаменатель любой рациональной функции определены единственным образом.

Лемма 1. *Пусть* $L=x^mE-(x+\tau_1)(x+\tau_2)\dots(x+\tau_m)$, *где* $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m$ *— некоторые числа. В этом случае* *(i) если уравнение $L(y) = 0$ имеет решение в виде ненулевой рациональной функции, то $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ — целые;*

(ii) если $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ — целые, то уравнение $L(y) = 0$ имеет решение в виде рациональной функции

$$R(x) = R_1(x)R_2(x)\ldots R_m(x),$$

где

$$R_i(x) = \begin{cases} x(x+1)\ldots(x+\tau_i-1), & \tau_i \geqslant 0, \\ \frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-|\tau_i|)}, & \tau_i < 0, \end{cases} \tag{6}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$;

(iii) если среди целых $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ есть хотя бы одно отрицательное, то знаменатель рациональной функции $R(x)$ из (ii) делится на $x-1$, и, как следствие, $R(x)$ не является полиномом.

Доказательство. (i), (ii) Пусть для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, число τ_i целое. Тогда подстановка

$$y(x) = z(x)R_i(x)$$

в уравнение $L(y) = 0$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция, а рациональная функция $R_i(x)$ определена посредством (6), приводит к новому уравнению, которое после упрощения приобретает вид $L'(z) = 0$, где

$$L' = x^{m-1}E - (x+\tau_1)\ldots(x+\tau_{i-1})(x+\tau_{i+1})\ldots(x+\tau_m)$$

при $m \geqslant 2$. Если $m = 1$, то $L' = E - 1$, и уравнение $L'(z) = 0$ имеет решение, тождественно равное единице. В итоге получаем (ii).

Если среди исходных чисел $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ имеются нецелые, то после нескольких подстановок указанного вида с целыми τ_i мы получаем уравнение $\tilde{L}(u) = 0$, где u — новая неизвестная функция,

$$\tilde{L} = x^l E - (x+\sigma_1)(x+\sigma_2)\ldots(x+\sigma_l),$$

и среди чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ нет целых. Пусть уравнение $\tilde{L}(u) = 0$ имеет ненулевое полиномиальное решение $p(x)$. Тогда

$$x^l p(x+1) = (x+\sigma_1)(x+\sigma_2)\ldots(x+\sigma_l)p(x).$$

Очевидно, что $x|p(x)$. Пусть h — наибольшее целое такое, что $(x+h)|p(x)$. Для некоторого полинома $q(x)$ имеем $p(x) = (x+h)q(x)$ и

$$x^l(x+h+1)q(x+1) = (x+\sigma_1)(x+\sigma_2)\ldots(x+\sigma_l)(x+h)q(x).$$

Следовательно, $(x+h+1)|q(x)$, а это влечет $(x+h+1)|p(x)$. Последнее противоречит выбору h. Получили противоречие с предположением о существовании у уравнения $\tilde{L}(u) = 0$ полиномиального решения. В [2] доказано, в частности, что если оператор $a_\rho(x)E^\rho + \cdots + a_1(x)E + a_0(x)$ с полиномиальными коэффициентами, в котором $a_\rho(x), a_0(x)$ ненулевые полиномы, применен к некоторой неполиномиальной рациональной функции и в результате получился некоторый полином, то $a_\rho(x-\rho)$ и $a_0(x)$ не могут быть взаимно простыми полиномами. Таким образом, уравнение $\tilde{L}(u) = 0$ не может иметь и неполиномиальных рациональных решений. Это доказывает (i).

(iii) Ни одна из рациональных функций (6) не может иметь числитель, в который входит множитель $x-1$. $\square$

Теорема 2. *Невозможен алгоритм, который бы для произвольного оператора L вида (5) с $r_i(x, t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{Q}[x, t_1, t_2, \dots, t_m]$, $i = 0, 1, \dots, \rho$, отвечал на вопрос, существуют ли числовые значения параметров $t_1, t_2, \dots, t_m$, при которых уравнение $L(y) = 0$ имеет решение в виде ненулевой рациональной функции от x. Утверждение остается справедливым и для полиномиальных решений.*

Доказательство. Предположим. что мы обладаем алгоритмом A, распознающим существование решений в виде ненулевых рациональных функций. Пусть $P(t_1, t_2, \dots, t_m)$ — произвольный полином указанных переменных с целыми коэффициентами. Возьмем разностный оператор L с параметрами $t_1, t_2, \dots, t_m$:

$$x^{m+1}E - (x + Q(t_1, t_2, \dots, t_m))(x + t_1)(x + t_2) \dots (x + t_m),$$

где

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_m) = \frac{1}{1 + P^2(t_1, t_2, \dots, t_m)}.$$

В силу частей (i), (ii) доказанной леммы уравнение $L(y) = 0$ имеет решение в виде ненулевой рациональной функции, если и только если существуют $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in \mathbb{Z}$ такие, что $Q(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \in \mathbb{Z}$. Но тогда $P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$, иначе $0 < Q(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) < 1$. Таким образом, с помощью алгоритма A можно узнавать, имеет ли заданное алгебраическое уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_m) = 0$ решение в целых числах (уравнение $L(y) = 0$ можно домножением на $1 + P^2(t_1, t_2, \dots, t_m)$ преобразовать в уравнение с полиномиальными коэффициентами). Следовательно, предположение о существовании алгоритма A было неверным.

Если предположить, что существует алгоритм A', распознающий существование ненулевых полиномиальных решений уравнений $L(y) = 0$, то в силу части (iii) доказанной леммы мы бы вновь получили, что существует алгоритм, распознающий существование решений алгебраических уравнений с целыми коэффициентами в целых неотрицательных числах. Поэтому алгоритм A' не может существовать. □

4 Случай одного параметра

Выше речь шла об алгоритмах, применимых к оператору с произвольным числом параметров. Но из невозможности таких алгоритмов автоматически не следует, например, невозможность алгоритмов, применимых к операторам с одним параметром и отвечающих на вопрос о существовании такого числового значения для этого параметра, при котором соответствующее уравнение обладает ненулевым полиномиальным (рациональным) решением. Насколько известно автору, вопрос о существовании самих таких алгоритмов остается открытым как для дифференциальных, так и для разностных операторов. Априори между предположением о существовании такого рода алгоритма и теоремой Матиясевича противоречия нет, потому что эта теорема говорит о невозможности алгоритма распознавания существования решений в целых числах, применимого к имеющим целые коэффициенты алгебраическим уравнениям с произвольным числом неизвестных. Но алгоритм для таких уравнений с одной неизвестной всем знаком из школы.

Классический пример: дифференциальному уравнению с параметром t

$$(1 - x^2)y'' - xy' + t^2 y = 0 \tag{7}$$

при $t \in \mathbb{N}$ удовлетворяет полином Чебышева $T_t(x)$. Тот факт, что уравнение (7) имеет полиномиальное решение при любом $t \in \mathbb{N}$ можно было бы установить даже ничего не зная о полиномах Чебышева. Пусть это уравнение имеет решение в виде ряда (в частности, полинома)

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

тогда, как нетрудно показать, последовательность его коэффициентов удовлетворяет разностному уравнению

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (t^2 - n^2)c_n = 0.$$

То, что получилось разностное уравнение второго порядка, в которое не входит c_{n+1}, и при этом $t^2 - n^2$ обращается в 0 при $n = t$, а старший коэффициент обращается в 0 при $n + 2 = 0$ и при $n + 2 = 1$, является для нас благоприятным стечением обстоятельств, которое позволяет заключить, что уравнение (7) действительно имеет полиномиальное решение степени t такое, что при четном t в нем содержатся только четные степени x, а при нечетном t — только нечетные. При числовых значениях t, не принадлежащих $\mathbb{N}$, полиномиальных решений нет.

Сходным образом обстоит дело и с уравнением

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + t(t+1)y = 0,$$

которому при $t \in \mathbb{N}$ удовлетворяет полином Лежандра $L_t(x)$. Соответствующее разностное уравнение здесь имеет вид $(n+1)(n+2)c_{n+2} + (t(t+1) - n(n+1))c_n = 0$.

Предположение, что алгоритмы для произвольных дифференциальных и разностных операторов обсуждаемого вида с одним параметром все-таки возможны, в каком-то отношении подкрепляется примером, касающимся систем алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка. Используя идею доказательства теоремы 1, нетрудно доказать невозможность алгоритма распознавания для этих систем существования таких решений, все компоненты которых суть ненулевые рациональные функции. В самом деле, в уравнении (3), домноженном на $(x-1)(x-2)\dots(x-m)$, будем считать $y, t_1, t_2, \dots, t_m$ неизвестными функциями переменной x и добавим к этому уравнению еще m уравнений

$$t_1' = 0,\ t_2' = 0,\ \dots,\ t_m' = 0.$$

В силу сказанного в разделе 2, это уравнение будет иметь решение с компонентами $t_1, t_2, \dots, t_m, y$, имеющими вид ненулевых рациональных функций, если и только если уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_m) = 0$ имеет решение в целых числах, ни одно из которых не равно нулю. Распознавание существования такого решения является неразрешимой алгоритмической проблемой, так как к ней сводится задача о существовании решения в произвольных целых числах (например, уравнение $P(t_1, t_2, \dots, t_m) = 0$ имеет решение в произвольных целых числах если и только если уравнение (4) имеет решение в целых числах, ни одно из которых не равно нулю). Итак, для систем алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка невозможен алгоритм распознавания существования решений, все компоненты которых суть ненулевые рациональные функции. Но при этом для одного уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией такой алгоритм существует, он был предложен А.Э.Еременко ([8]). Этот последний алгоритм находит все рациональные решения, какие есть, не исключая нулевого. По результату работы алгоритма легко определяется, имеется ли ненулевое рациональное решение. В этом примере в уравнениях нет параметров, но важно другое: для произвольного m алгоритм невозможен, но для $m = 1$ алгоритм найден.

С другой стороны, сам факт, что неразрешимость некоторой алгоритмической проблемы для произвольного числа переменных доказана с помощью теоремы Матиясевича, не дает, разумеется, оснований утверждать, что эта проблема, суженная на случай одной переменной, непременно окажется разрешимой. В статье Д. Ричардсона [9] (см. также [5, гл. 9]), в частности, установлено, что для таких функций произвольного числа вещественных переменных, которые строятся из самих переменных, рациональных чисел, константы π, операций $+, \cdot$, функции $\sin$ и суперпозиций, неразрешимо существование точки пространства $\mathbb{R}^m$, в которой функция положительна (статья [9] относится к 1968 г., когда

10-я проблема Гильберта была еще открытой проблемой, и, строго говоря, в этой статье доказано несколько более слабое утверждение, но использование теоремы Матиясевича, доказанной в 1970 г., позволяет переформулировать один из результатов Ричардсона в этом виде). Затем, исходя из функций $h(x) = x \sin x$, $g(x) = x \sin x^3$, в [9] определяются

$$f_1(x) = h(x),\ f_2(x) = h(g(x)),\ \dots, f_m(x) = h(g(g(\dots g(g(x))\dots))),\ \dots$$

и показывается, что для любого $m > 1$ множество точек

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),\quad x \in \mathbb{R},$$

всюду плотно в $\mathbb{R}^m$. Вместе с функцией m переменных $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ рассматривается функция одной переменной $F(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$. Так как рассматриваемые функции непрерывны, то получается, что для функций одной вещественной переменной x, построенных из x, рациональных чисел, константы π, операций $+, \cdot$, функции sin и суперпозиций, неразрешимо существование точки вещественной прямой, в которой функция положительна.

Последние два примера говорят о том, что переход от произвольного m к $m = 1$ ставит задачу с непредсказуемым из общих соображений ответом.

Список литературы

[1] С.А. Абрамов. Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений, *Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика*, No. 3, 53–60 (1989).

[2] С.А. Абрамов. Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, 29, No. 11, 1611–1620 (1989).

[3] С.А. Абрамов. Об одной алгоитмически неразрешимой проблеме, связанной с дифференциальными и разностными уравнениями, XIII Международная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2009), 26–29 мая 2009 г., Пинск, Беларусь. Тезисы докладов, 118–118 (2009).

[4] Ю.В. Матиясевич. Диофантовость перечислимых множеств. *Доклады АН СССР*, 191, No. 2, 278–282 (1970).

[5] Ю.В. Матиясевич. Десятая проблема Гильберта. М: Наука. «ФИЗМАТЛИТ» , 1993.

[6] D. Boucher. About the polynomial solutions of homogeneous linear differential equations depending on parameters. *ISSAC'99 Proceedings* , 261–268 (1999).

[7] J. Denef, L. Lipshitz. Decision problems for differential equations. *J. Symbolic Logic*, 54, 941–950 (1989).

[8] A. Eremenko. Rational solutions of first-order differential equations, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Math.*, 23, 181-190 (1998).

[9] D. Richardson. Some undecidable problems involving elementary functions of a real variable. *J. Symbolic Logic*, 33, 514–520 (1968).

[10] M.F. Singer. Liouvillian solutions of n^{th} order homogeneous linear differential equations, *American Journal of Mathematics*, 103, No. 4, 661–682 (1981).