ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2013, № 2, с. 51–74

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.92+004.94

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ: EG_δ- И EG_σ- ИСКЛЮЧЕНИЯ *

С. А. Абрамов, Д. Е. Хмельнов
Вычислительный центр РАН
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, dennis_khmelnov@mail.ru
Поступила в редакцию 31.08.2012

Рассматриваются системы линейных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений вида $A_r(x)\xi^r y(x) + \cdots + A_1(x)\xi y(x) + A_0(x)y(x) = 0$, $\xi \in \{\frac{d}{dx}, E\}$ (здесь E — оператор сдвига: $Ey(x) = y(x+1)$). Коэффициенты $A_i(x)$, $i = 0, \ldots, r$, суть квадратные матрицы порядка m, их элементы — полиномы от x над некоторым числовым полем K, при этом $A_r(x), A_0(x)$ — ненулевые матрицы. Уравнения системы предполагаются независимыми над $K[x,\xi]$. Для любой системы S такого вида алгоритм EG_δ в дифференциальном случае и алгоритм EG_σ в разностном случае строят, в частности, *l-охватывающую* систему $\bar{S}$ того же вида, но с такой ведущей матрицей $\bar{A}_r(x)$, определитель которой есть ненулевой полином. При этом множество решений системы $\bar{S}$ содержит все решения системы S. (Алгоритм EG_σ предоставляет и ряд дополнительных возможностей.) Даются примеры решаемых с помощью EG_δ и EG_σ задач. Описывается пакет EG, реализующий предлагаемые алгоритмы в системе компьютерной алгебры Maple.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — числовое поле: $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Для кольца полиномов и поля рациональных функций от x над K мы в дальнейшем используем обычные обозначения $K[x]$ и $K(x)$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов — через $K((x))$. Если R — некоторое кольцо (в частности, поле), то $\mathrm{Mat}_m(R)$ обозначает кольцо квадратных матриц порядка m с элементами из R.

Будут рассматриваться системы вида

$$A_r(x)\xi^r y(x) + \cdots + A_1(x)\xi y(x) + A_0(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

$\xi \in \{\frac{d}{dx}, E\}$, где E — оператор сдвига: $Ey(x) = y(x+1)$. Коэффициенты $A_i(x)$, $i = 0, \ldots, r$, суть квадратные матрицы порядка m, элементы которых принадлежат $K[x]$: $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x) \in \mathrm{Mat}_m(K[x])$, при этом $A_r(x), A_0(x)$ — ненулевые *ведущая* и *трейлинговая* матрицы; $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T$ — столбец неизвестных функций (T — знак транспонирования). Число r называется *порядком* системы.

Обозначив i-ю строку матрицы $A_j(x)$ через $A_j^{(i)}(x)$, можем записать уравнения, составляющие систему (1), как

$$A_r^{(i)}(x)\xi^r y(x) + \cdots + A_1^{(i)}(x)\xi y(x) + A_0^{(i)}(x)y(x) = 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, m$. Если не оговорено противное, эти уравнения всюду ниже предполагаются независимыми над $K[x,\xi]$ (иначе говоря, система (1) имеет *полный ранг*): пусть $U_1 = 0, U_2 = 0, \ldots, U_m = 0$ — уравнения, составляющие систему (1), и $L_1, L_2, \ldots, L_m \in K[x,\xi]$, тогда $L_1(U_1) + L_2(U_2) + \cdots + L_m(U_m) = 0$ представляет собой уравнение $0 = 0$, если и только если $L_1 = L_2 = \cdots = L_m = 0$.

В общем случае ведущая матрица необратима в $\mathrm{Mat}_m(K(x))$, т.е вырождена, и это порождает известные сложности при вычислениях, связанных с системами. В случае, когда $m = 1$, т.е. в случае скалярного уравнения, полином $A_r(x)$ обращается в нуль для конечного множества зна-

*Частичная поддержка РФФИ, грант 13-01-00182-а.

чений x, они представляют особый интерес при исследовании и решении уравнения. При $m > 1$ аналогичную роль могут играть значения x, для которых определитель матрицы $A_r(x)$ обращается в нуль, но это только если определитель не равен нулю тождественно. Алгоритмы EG_δ и EG_σ позволяют обходить препятствия такого рода. Для любой системы S вида (1) алгоритм EG_δ в дифференциальном случае, а алгоритм EG_σ — в разностном, строят *l-охватывающую* систему $\bar{S}$ вида (1) с невырожденной ведущей матрицей $\bar{A}_r(x)$. При этом множество решений системы $\bar{S}$ содержит все решения системы S. (Обозначения δ и σ для отображений, соответственно обладающих свойствами дифференцирования и сдвига, используются в теории полиномов Оре ([46]).)

Разностный случай оказывается еще более податливым, что в значительной степени объясняется тем, что для E существует однозначно определенное обратное преобразование $E^{-1}y(x) = y(x-1)$. Для разностной системы S вида (1) можно с помощью алгоритма EG_σ построить и *t-охватывающую* систему $\bar{\bar{S}}$ вида (1) с невырожденной трейлинговой матрицей $\bar{\bar{A}}_0(x)$. При этом множество решений системы $\bar{\bar{S}}$ содержит все решения системы S. Дополнительно алгоритм EG_σ находит конечное множество C *линейных ограничений*, т.е. линейных соотношений с постоянными коэффициентами для конечного множества значений $y_i(\alpha + j)$, $\alpha \in \bar{K}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, r$ (α фиксировано для любого отдельного линейного ограничения, $\bar{K}$ обозначает алгебраическое замыкание поля K). В результате применения EG_σ получается система $(\tilde{S}, C)$, эквивалентная S, при этом ведущая или соответственно трейлинговая матрица системы $\tilde{S}$ невырождена.

Известно, что возможно сведение системы вида (1) к системе первого порядка $M_1(x)\xi Y(x) + M_0(x)Y(x) = 0$, где $M_0(x), M_1(x) \in \mathrm{Mat}_{rm}(K(x))$ и

$$Y(x) = \left(y(x)^T, (\xi y(x))^T, \ldots, (\xi^{r-1}y(x))^T\right)^T.$$

Эту систему можно переписать в виде пары, состоящей из двух систем. Первая из них — это

$$B_1(x)\xi\tilde{Y}(x) + B_0(x)\tilde{Y}(x) = 0,$$

где $B_0(x), B_1(x) \in \mathrm{Mat}_s(K(x))$, $s \leqslant rm$, матрица $B_1(x)$ невырождена и вектор $\tilde{Y}(x)$ содержит s неизвестных функций, входящих в $Y(x)$. Вторая — алгебраическая линейная система, позволяющая выразить все не входящие в $\tilde{Y}(x)$ компоненты вектора $Y(x)$ через компоненты $\tilde{Y}(x)$. (См., например, [48], [4, разд. 2.3] — дифференциальный случай, [5, разд. 5] — разностный случай.) При $\xi = E$, т.е. в разностном случае, возможно добиться того, чтобы и матрица $B_0(x)$ также была невырожденной. Если считать, что m фиксировано, а r возрастает, то сложность EG_δ и EG_δ есть $O(r^2)$, при этом в [4], [5] показано, что сложность описанного преобразования растет быстрее, чем r^3. Это преобразование к системе первого порядка мы далее не рассматриваем.

В статье собраны вместе и изложены с единой точки зрения результаты, опубликованные в [4], [5], [10], [12], [15], [16], [18], [23], [24]. В разделах 2, 3 описываются алгоритмы EG_δ и EG_σ построения охватывающих систем. В разделе 4 речь идет о том, что само существование охватывающих систем позволяет дать простые доказательства ряда важных свойств пространств решений линейных и дифференциальных систем полного ранга. В разделе 5 вводится понятие индуцированной рекуррентной системы. Такой системе должны удовлетворять коэффициенты разложения (в подходящем базисе) решения исходной системы. Показывается, как с помощью индуцированной рекуррентной системы и алгоритмов EG_δ, EG_σ построить определяющее уравнение исходной системы. Раздел 6 посвящен мероморфным решениям разностных систем. В разделе 7 мы даем примеры алгоритмов поиска решений различных видов; алгоритмы используют индуцированные рекуррентные системы. В разделе 8 показывается, что алгоритмы EG_δ и EG_σ могут применяться и к неоднородным системам, а также что если система не имеет полного ранга, то EG_δ и EG_σ позволяют найти ранг системы и привести ее к удобному виду. Дополнительно вкратце рассматривается случай q-разностных систем. В разделе 9 предлагается рандомизация и некоторые эвристики для EG_δ и EG_σ. В разделе 10 коротко упоминаются некоторые другие подходы к рассматриваемым в статье задачам. Наконец, в разделе 11 дается описание пакетов LinearFunctionalSystems и EG, реализующих обсуждаемые алгоритмы в системе компьютерной алгебры Maple ([49]).

2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В дифференциальном случае исходная система S имеет вид

$$A_r(x)y^{(r)}(x) + \cdots + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = 0. \tag{2}$$

Мы покажем, как для системы S вида (2) построить l-охватывающую систему $\bar{S}$

$$\bar{A}_r(x)y^{(r)}(x) + \cdots + \bar{A}_1(x)y'(x) + \bar{A}_0(x)y(x) = 0, \tag{3}$$

с невырожденной ведущей матрицей и множеством решений, содержащим все решения системы S. Не исключается равенство нулю матрицы $\bar{A}_0(x)$.

Пусть i-я строка матрицы $A_s(x)$, $0 \leqslant s \leqslant r$, ненулевая, а i-е строки матриц $A_{s-1}(x), A_{s-2}(x), \ldots, A_0(x)$ — нулевые. Пусть t-й элемент, $1 \leqslant t \leqslant m$, является последним ненулевым элементом i-й строки $A_s(x)$. Тогда $(r-s)\cdot m + t$ называется *длиной* i-го уравнения системы, а имеющий индексы i, t элемент матрицы $A_s(x)$ — *последним ненулевым коэффициентом* i-го уравнения системы.

2.1. EG_δ: редукция

Алгоритм EG_δ построен на чередовании редукций и сдвигов. Объясним, как выполняется редукция.

Проверяем, являются ли строки ведущей матрицы линейно зависимыми над $K(x)$, и если да, то находим коэффициенты зависимости $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x) \in K[x]$. Из уравнений системы, соответствующих ненулевым коэффициентам, выбираем то, которое имеет наибольшую длину (пусть это будет i-е уравнение). Затем заменяем i-е уравнение системы линейной комбинацией уравнений с коэффициентами $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x)$. В результате i-я строка ведущей матрицы становится нулевой. Этот этап называется *редукцией*. Существенно, что длина ни одного из уравнений не увеличивается при редукции.

2.2. EG_δ: дифференциальный сдвиг уравнения с нулевой ведущей частью

Пусть i-я строка ведущей матрицы нулевая. Пусть $a(x)$ — последний ненулевой коэффициент i-го уравнения. Поделим это уравнение на $a(x)$, продифференцируем его и избавимся от знаменателей. Эта операция называется *дифференциальным сдвигом* i-го уравнения системы. Слово “сдвиг” указывает на то, что, благодаря выполненному делению на последний ненулевой коэффициент, эта операция уменьшает длину i-го уравнения системы ([4]).

2.3. EG_δ: последовательнось шагов “редукция + дифференциальный сдвиг”

Схема алгоритма EG_δ такова. Если строки ведущей матрицы линейно зависимы над $K(x)$, то выполняем редукцию; пусть в результате i-я строка ведущей матрицы стала нулевой. Выполняем дифференциальный сдвиг i-й строки и продолжаем процесс чередования редукций и дифференциальных сдвигов, пока ведущая матрица не станет невырожденной. (Мы никогда не получим уравнение $0 = 0$, так как по предположению уравнения исходной системы независимы над $K\left[x, \frac{d}{dx}\right]$.)

Теорема 1. *([4]) Алгоритм EG_δ заканчивает свою работу.*

Итак, для дифференциальной системы S вида (2) алгоритм EG_δ строит l-охватывающую систему $\bar{S}$: ее ведущая матрица $\bar{A}_r(x)$ невырождена и множество решений системы S является подмножеством множества решений системы $\bar{S}$.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 2x^2(x+2)(x+1) & -x(x+2)(x+1) \\ 2x^2(x+2) & -x(x+2) \end{pmatrix} y'' + \\ + \begin{pmatrix} 2x(x+1)(x-4) & -x^2 \\ 2x(x-4) & -x(x+4) \end{pmatrix} y' + \\ + \begin{pmatrix} -2(x+1)(x-4) & -2 \\ -2x+8 & 2 \end{pmatrix} y = 0. \tag{4}$$

Строки ведущей матрицы зависимы с коэффициентами $v_1(x) = -1, v_2(x) = x+1$. Уравнения имеют одинаковую длину. Заменяем второе уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2x^2(x+2)(x+1) & -x(x+2)(x+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y'' + \\ + \begin{pmatrix} 2x(x+1)(x-4) & -x^2 \\ 0 & -x(x+2)^2 \end{pmatrix} y' + \\ + \begin{pmatrix} -2(x+1)(x-4) & -2 \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} y = 0.$$

Дифференциальный сдвиг второго уравнения дает

$$\begin{pmatrix} 2x^2(x+2)(x+1) & -x(x+2)(x+1) \\ 0 & -x(x+2) \end{pmatrix} y'' + \\ + \begin{pmatrix} 2x(x+1)(x-4) & -x^2 \\ 0 & -2x \end{pmatrix} y' + \\ + \begin{pmatrix} -2(x+1)(x-4) & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = 0 \qquad (5)$$

Последняя система имеет невырожденную ведущую матрицу и является результатом применения EG_δ к системе (4), представляя собой l-охватывающую систему исходной системы.

Примечание 1. Если после редукции i-е строки матриц $A_r(x), A_{r-1}(x), \ldots, A_{u+1}(x)$ нулевые, i-я строка матрицы $A_u(x)$ ненулевая и при этом $u < r-1$, то уравнение, соответствующее i-й строке, можно продифференцировать $r-u-1$ раз без деления на последний ненулевой коэффициент, и только последнее, т.е. $(r-u)$-е, дифференцирование провести с предварительным делением и последующим освобождением от знаменателей (соображение, сообщенное авторам М. Баркату). Добавим еще, что длина уравнения, заменяемого линейной комбинацией других уравнений, после редукции может уменьшится. Тогда не обязательно делить уравнение на последний ненулевой коэффициент перед дифференцированием.

Примечание 2. Теоретически можно говорить о применении алгоритма EG_δ к дифференциальным системам с произвольными аналитическими коэффициентами. Но при таком применении придется распознавать равенство нулю элементов ведущей матрицы, что не алгоритмизируется в общем случае. Вместе с тем проведенные ранее рассуждения доказывают *существование* l-охватывающей системы для общего аналитического случая дифференциальной системы полного ранга.

2.4. *О линейной зависимости на шаге редукции*

Поиск коэффициентов $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x)$ линейной зависимости (см. раздел 2.1) эквивалентен решению однородной системы линейных алгебраических уравнений с полиномиальными коэффициентами. Эта задача эффективно решается различными алгоритмами, в частности, — модулярными, которые хорошо справляются с ростом коэффициентов в промежуточных вычислениях (см., например, [44], [45], [15, разд. 6], [16, разд. 4.2]). Если найдено s независимых решений этой системы, то можно получить s нулевых строк в ведущей матрице. Эти s решений сначала записываются как строки матрицы V размера $s \times m$. Первая строка матрицы V применяется для обнуления i-й строки ведущей матрицы и дифференциального сдвига i-го уравнения. Затем в матрице V с помощью первой строки исключаются i-е элементы в строках со второй по s-ю. В результате все строки матрицы V, начиная со второй, содержат коэффициенты линейных зависимостей строк ведущей матрицы с номерами $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$. Продолжая, можно выполнить s шагов “редукция + дифференциальный сдвиг”. Возможны эвристические стратегии выбора строк в матрице V (см. раздел 9.3).

2.5. *EG_δ: сложность*

Предположим, что сложность редукции ведущей матрицы порядка m есть $O(m^\omega)$, $2 < \omega \leqslant 3$, по числу операций над элементами кольца $K[x]$. Число шагов “редукция + дифференциальный сдвиг” алгоритма EG_δ не превосходит rm^2, и цена каждого шага допускает оценку $O(rm^2+m^\omega)$. Отсюда сложность EG_δ по числу операций в $K[x]$ есть $O(r^2m^4 + rm^{\omega+2})$.

Скорее всего, оценка rm^2 числа шагов алгоритма EG_δ завышена (эксперименты указывают на это). Во всяком случае, если каждый дифференциальный сдвиг приводит к появлению дополнительного решения системы, то число шагов не может превзойти rm (см. ниже раздел 4.1) и тогда общая асимптотическая оценка сложности есть $O(r^2m^3 + rm^{\omega+1})$.

3. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ

В разностном случае система S имеет вид

$$A_r(x)y(x+r) + \cdots + A_1(x)y(x+1) + \\ + A_0(x)y(x) = 0. \qquad (6)$$

Мы обсудим, как для системы S вида (6) построить l-охватывающую систему $\bar{S}$

$$\bar{A}_r(x)y(x+r)+\cdots+\bar{A}_1(x)y(x+1)+ \\ +\bar{A}_0(x)y(x)=0, \quad (7)$$

ведущая матрица которой невырождена, а множество решений содержит все решения системы S. Аналогично, можно построить t-охватывающую систему $\bar{\bar{S}}$

$$\bar{\bar{A}}_r(x)y(x+r)+\cdots+\bar{\bar{A}}_1(x)y(x+1)+ \\ +\bar{\bar{A}}_0(x)y(x)=0, \quad (8)$$

ее трейлинговая матрица невырождена, а множество решений содержит все решения системы S. Не исключается равенство нулю матриц $\bar{A}_0(x)$, $\bar{\bar{A}}_r(x)$ — как одной из них, так и обеих.

Введенное для дифференциального случая понятие длины уравнения естественно переносится на разностный случай.

3.1. EG_σ: редукция

Редукция для ведущей матрицы совпадает с описанной в дифференциальном случае в разделе 2.1. Но в разностном случае мы строим и так называемые линейные ограничения, соответствующие корням полинома $v_i(x)$ (подробнее — в разделе 3.4).

3.2. EG_σ: сдвиг строки с нулевой ведущей частью

Предположим, что i-я строка ведущей матрицы целиком состоит из нулей. Тогда оператор сдвига E применяется к i-му уравнению системы.

3.3. EG_σ: последовательность шагов “редукция + сдвиг”

Схема алгоритма EG_σ сходна с представленной в разделе 2.3 схемой алгоритма EG_δ, но вместо дифференциальных сдвигов применяются сдвиги, описанные в разделе 3.2. Продолжаем последовательность шагов “редукция + сдвиг”, пока ведущая матрица не станет невырожденной (мы никогда не получим уравнение $0=0$, так как уравнения исходной системы независимы над $K[x,E]$). Сказанное в разделе 2.4 сохраняет силу для разностного случая.

Теорема 2. *([12]) Алгоритм EG_σ заканчивает свою работу.*

Таким образом, для разностной системы S вида (6) алгоритм EG_σ строит l-охватывающую систему $\bar{S}$: ведущая матрица $\bar{A}_r$ системы $\bar{S}$ невырождена, а множество решений системы S является подмножеством множества решений системы $\bar{S}$.

Алгоритм EG_σ может быть использован и для построения t-охватывающей системы $\bar{\bar{S}}$, трейлинговая матрица которой невырождена, а множество решений системы S является подмножеством множества решений системы $\bar{\bar{S}}$. Для этого редукции выполняются по отношению к трейлинговой матрице $A_0(x)$ системы, а сдвиг — это применение E^{-1} к i-му уравнению системы. Определение длины уравнения соответствующим образом меняется. Пусть i-я строка матрицы $A_s(x)$, $0 \leqslant s \leqslant r$, ненулевая, а i-е строки матриц $A_r(x), A_{r-1}(x), \ldots, A_{s+1}(x)$ нулевые; пусть l-й элемент, $1 \leqslant l \leqslant m$, является первым ненулевым элементом i-й строки $A_s(x)$. Тогда $m(s+1)-l+1$ считается длиной i-го уравнения системы.

Сказанное в примечании 2 может быть соответствующим образом перенесено на случай разностных систем.

3.4. Линейные ограничения

Если на некотором этапе редукции i-е уравнение системы заменяется линейной комбинацией уравнений с коэффициентами $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x)$, то линейные ограничения возникают в связи с тем, что $v_i(x)$ обращается в 0 при некоторых значениях x. Каждое такое значение α подставляется вместо x в i-е уравнение до его замены. Такое линейное ограничение имеет вид линейного соотношения для

$$y_i(\alpha+j), \quad i=1,2,\ldots,m, \quad j=0,1,\ldots,r,$$

с постоянными коэффициентами.

Пусть S и $\tilde{S}$ суть разностные системы вида (1), а C и $\tilde{C}$ — конечные множества линейных ограничений. Мы говорим, что системы (S, C) и $(\tilde{S}, \tilde{C})$ эквивалентны, если множество решений системы S, удовлетворяющих C, совпадает с множеством решений системы $\tilde{S}$, удовлетворяющих $\tilde{C}$. Каждый из l- и t-вариантов алгоритма EG_σ строит систему (S', C), эквивалентную $(S, \varnothing)$, и при том такую, что ее ведущая или соответственно трейлинговая матрица невырождена.

Пример 2. Система S

$$\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} y(x+2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} y(x+1) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(x) = 0$$

эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} 0 & x(x-1) \\ -2 & 0 \end{pmatrix} y(x+2) + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} y(x+1) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(x) = 0,$$

с пустым множеством линейных ограничений.

Система S также эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(x+2) + \begin{pmatrix} (x-4)(x-2) & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} y(x+1) + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & x-3 \end{pmatrix} y(x) = 0,$$

с линейным ограничением $2y_1(5) - y_2(3) = 0$.

3.5. *Двусторонний охват*

Пусть для исходной системы ее l- и t-охватывающие системы $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$ имеют вид (7) и (8). Любое решение исходной системы будет также решением системы

$$\bar{A}_r(x+1)y(x+r+1) + \big(\bar{A}_{r-1}(x+1) + \\ + \bar{\bar{A}}_r(x)\big) y(x+r) + \dots + \big(\bar{A}_0(x+1) + \\ \bar{\bar{A}}_1(x)\big) y(x+1) + \bar{\bar{A}}_0(x)y(x) = 0, \quad (9)$$

в которой ведущая и трейлинговая матрицы невырождены. Если $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$ суть множества линейных ограничений для $\bar{S}$, $\bar{\bar{S}}$, то $\bar{C} \cup \bar{\bar{C}}$ будет множеством линейных ограничений для (9), но не исключено, что даже с учетом этих линейных ограничений система (9) может иметь решения, которыми не обладает исходная система (заметим, что порядок системы увеличился).

3.6. *EG_σ: сложность*

Как и при исследовании сложности алгоритма EG_δ, мы предполагаем, что сложность редукции ведущей матрицы порядка m по числу операций в $K[x]$ есть $O(m^\omega)$, $2 < \omega \leqslant 3$. Число шагов "редукция + сдвиг" алгоритма EG_σ не превосходит rm (в отличие от дифференциального случая, здесь каждый сдвиг — на целую строку матрицы). Сложность каждого шага есть $O(rm^2 + m^\omega)$. Отсюда получаем асимптотическую оценку $O(r^2m^3 + rm^{\omega+1})$ сложности EG_σ по числу операций в $K[x]$.

4. ВОЗМОЖНОСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ

Сам факт существования охватывающих систем позволяет доказать некоторые важные свойства решений систем вида (1). Для рассмотрения примеров таких свойств (часть которых, вероятно, известна) нам потребуется ряд определений.

Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ из $K((x))$ его *валюация* $\mathrm{val}_x\, a(x)$ определена равенством

$$\mathrm{val}_x\, a(x) = \min\{i : a_i \neq 0\}. \qquad (10)$$

При этом $\mathrm{val}_x\, 0 = \infty$. Для мероморфной функции $\psi(x)$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ мы можем сходным образом определить $\mathrm{val}_{x-\alpha}\psi(x)$.

Запись $f(x) \perp g(x)$ обозначает взаимную простоту полиномов $f(x)$, $g(x) \in K[x]$; если $F(x) \in K(x)$, то $\mathrm{den}F(x)$ представляет собой нормированный (со старшим коэффициентом 1) полином такой, что $F(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{den}F(x)}$ для некоторого $f(x) \in K[x]$, $f(x) \perp \mathrm{den}F(x)$. Множество нормированных неприводимых полиномов из $K[x]$ обозначается через $\mathrm{Irr}(K[x])$. Если $p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$, $f(x) \in K[x]$, то $\mathrm{val}_{p(x)} f(x)$ определяется как максимальное $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ такое, что $p^n(x) \mid f(x)$ ($\mathrm{val}_{p(x)} 0 = \infty$), и

$$\mathrm{val}_{p(x)} F(x) = \mathrm{val}_{p(x)} f(x) - \mathrm{val}_{p(x)} g(x) \qquad (11)$$

для $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x), g(x) \in K[x]$. Разложение $F(x)$ в формальный лоранов ряд и использование (10) дает то же значение валюации, что и (11) при $p(x) = x$.

Для двух произвольных ненулевых рациональных функций $R(x)$, $S(x)$ и $p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$

выполняются соотношения, аналогичные соотношениям для валюаций лорановых рядов:

$$\mathrm{val}_{p(x)}(R(x)S(x)) = \mathrm{val}_{p(x)}R(x) + \mathrm{val}_{p(x)}S(x),$$

$$\mathrm{val}_{p(x)}(R(x)+S(x)) \geqslant \min\{\mathrm{val}_{p(x)}R(x),\ \mathrm{val}_{p(x)}S(x)\}.$$

Если $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))^T \in K(x)^m$, то $\mathrm{den}F(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^m \mathrm{den}F_i(x)$ и $\mathrm{val}_{p(x)}F(x) = \min_{i=1}^m \mathrm{val}_{p(x)}F_i(x)$, где lcm — обозначение наименьшего общего кратного полиномов.

Для $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathrm{Mat}_m(K(x))$ полагаем $\mathrm{den}A(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^m \mathrm{lcm}_{j=1}^m \mathrm{den}\, a_{ij}(x)$ и $\mathrm{val}_{p(x)}A(x) = \min_{i,j} \mathrm{val}_{p(x)}a_{ij}(x)$.

4.1. Размерность пространств решений дифференциальных систем

Как известно (см., например, [9, гл.3, §7]), если матрица порядка m определена и аналитична в односвязной области D комплексной плоскости, то для любых $\alpha \in D$ и $w \in \mathbb{C}^m$ нормальная система первого порядка $y'(x) = A(x)y(x)$ имеет единственное определенное в области D аналитическое решение $y(x)$, для которого $y(\alpha) = w$, и, таким образом, пространство аналитических решений, определенных в области D, имеет размерность m. Пусть $A(x) \in \mathrm{Mat}_m(K(x))$ и $\det A(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки α. Из сказанного следует, что размерность пространства определенных в этой окрестности аналитических решений системы имеет размерность m.

Если S — система вида (2) с невырожденной ведущей матрицей, то ее можно переписать в эквивалентной форме $Y'(x) = A(x)Y(x)$, взяв

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & I_m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_m \\ \hat{A}_0(x) & \hat{A}_1(x) & \ldots & \hat{A}_{r-1}(x) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где I_m — единичная матрица порядка m, $\hat{A}_k(x) = -A_r^{-1}(x)A_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$, и

$$Y(x) = \left(y'(x)^T, y''(x)^T, \ldots, y^{(r-1)}(x)^T\right)^T.$$

Получаем теорему:

Теорема 3. *Пусть $\bar{S}$ — l-охватывающая система для системы S вида (2) и пусть $\bar{A}_r(x)$ — ведущая матрица системы $\bar{S}$. Пусть $\det \bar{A}_r(x)$ не обращается в 0 в некоторой точке $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда аналитические решения системы S не имеют особенностей в α и размерность пространства таких решений не превосходит rm; если ведущая матрица системы S невырождена ($\bar{S}$ совпадает с S), то эта размерность равна rm.*

Если ведущая матрица системы вырождена, то эта размерность может быть меньше rm — см. ниже пример 3. Тогда система $\bar{S}$, которая строится алгоритмом EG_δ, имеет больше решений, чем S.

Пример 3. Система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = 0 \tag{13}$$

имеет одномерное пространство решений $y = (c,\, 0)^T$. Применение EG_δ к этой системе ведет к построению системы $\bar{S}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = 0,$$

имеющей двумерное пространство решений $y = (c_1 x + c_2,\, c_1)^T$. При этом уравнения системы (13) независимы над $K\left[x, \frac{d}{dx}\right]$.

Итак, в дифференциальном случае существование l-охватывающей системы позволяет доказать, что множество точек, в которых аналитическое решение системы может иметь особенность, конечно, и что размерность пространства решений не превосходит rm.

Примечание 3. Если K — произвольное поле характеристики 0, то размерность пространства принадлежащих $\bar{K}[[x-\alpha]]$ решений системы вида (2) равна rm для всех $\alpha \in \bar{K}$, кроме, возможно, конечного множества значений α, где эта размерность меньше.

Отказ от условия независимости уравнений исходной дифференциальной системы над $K\left[x, \frac{d}{dx}\right]$, может привести к бесконечности множества особых точек решений заданной системы.

Пример 4. Система $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y = 0$ такова, что любая точка является особой для некоторого решения с равными компонентами y_1 и y_2 (при этом уравнения системы независимы над K).

4.2. Размерность пространств решений разностных систем

В разностном случае конечномерность можно доказать, например, для пространства решений, имеющих вид последовательностей. Последовательность $c : \mathbb{Z} \to K^m$, $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, называется *секвенциальным* решением (или решением в виде двусторонней последовательности) системы (6), если

$$A_r(n) c_{n+d} + \cdots + A_1(n) c_{n+1} + A_0(n) c_n = 0$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $A_r(x)$, $A_0(x)$ обратимы в $\mathrm{Mat}_m(K(x))$. Сегмент множества целых чисел

$$I = \{v, v+1, \dots, w\}, \ \ v, w \in \mathbb{Z}, \ \ v \leqslant w,$$

называется *существенным сегментом* для (6), если полином $\det A_r(x-r)$ не имеет целых корней больших w, полином $\det A_0(x)$ не имеет целых корней меньших v, и $w - v + 1 \geqslant r$.

Пусть I — существенный сегмент для (6), тогда любое секвенциальное решение c однозначно определено векторами c_n, $n \in I$. Следовательно, для описания линейного пространства над K секвенциальных решений достаточно найти его сужение на I. Это сужение состоит из всех таких наборов $(c_v, c_{v+1}, \dots, c_w)$ векторов, которые удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=0}^{r} A_i(n) c_{n+i} = 0, \ \ n = v, v+1, \dots, w - r.$$

Это дает систему линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять компоненты векторов $c_v, c_{v+1}, \dots, c_w$. Размерность пространства секвенциальных решений рассматриваемой разностной системы совпадает с размерностью пространства решений этой алгебраической системы.

В случае вырожденности ведущей или трейлинговой матрицы мы можем перейти к системе (9), это не уменьшит размерности пространства секвенциальных решений.

Отсюда следует

Теорема 4. *Пространство секвенциальных решений системы вида (6) конечномерно.*

В скалярном случае дополнительные свойства пространства секвенциальных решений доказаны в [14, разд. 2]. Некоторые из них сохраняются для систем.

Выше говорилось, что особые точки решений дифференциальных систем рассматриваемого вида всегда образуют конечное множество. Иначе обстоит дело с разностными системами и даже со скалярными разностными уравнениями, — достаточно вспомнить гамма-функцию, которая удовлетворяет скалярному уравнению $y(x+1) - xy(x) = 0$ и имеет полюсы при всех целых неположительных значениях x.

Есть существенное различие и между пространствами решений линейных дифференциальных и разностных систем: решения разностных систем можно умножать не только на константы, но и на функции периода 1 (т.е. функции f такие, что $f(x+1) = f(x)$). Вместе с мероморфным решением $y(x)$ система будет иметь, например, решения

$$(\sin 2\pi(x+\beta)) y(x) \ \text{ и } \ (\sin 2\pi(x+\beta))^{-1} y(x) \quad (14)$$

для любого $\beta \in \mathbb{C}$. В предположении, что $K = \mathbb{C}$, рассмотрим пространство мероморфных решений системы вида (6) над полем $\mathbb{C}\left(e^{2\pi i x}\right)$; все элементы этого последнего поля являются мероморфными функциями периода 1, среди которых содержатся, например, функции $\sin 2\pi(x+\beta)$ и $(\sin 2\pi(x+\beta))^{-1}$. В [28] для скалярных уравнений порядка r установлено, что такое пространство мероморфных решений имеет размерность r. В этой же работе указано, что для нормальных систем первого порядка, имеющих m уравнений:

$$y(x+1) = A(x) y(x), \quad (15)$$

$A(x) \in \mathrm{Mat}_m(K(x))$ такое пространство решений имеет размерность m, так как, используя подходящий циклический вектор ([36], [28]), систему (15) можно переписать в виде скалярного уравнения порядка не выше m.

Займемся системой (6). Если ведущая матрица $A_r(x)$ обратима в $\mathrm{Mat}_m(K(x))$, то (6) можно переписать как систему

$$Y(x+1) = A(x)Y(x), \tag{16}$$

где $A(x)$ имеет вид (12) и

$$Y(x) = \left(y(x)^T, y(x+1)^T, \ldots, y(x+r-1)^T\right)^T$$

(переход от (6) к (16) возможен, разумеется, не только когда $K = \mathbb{C}$, но и в случае произвольного K). Следовательно, если матрица $A_r(x)$ невырождена, то исследуемое пространство над $\mathbb{C}\left(e^{2\pi ix}\right)$ мероморфных решений имеет размерность не выше rm. Добавим, что переход от поля $\mathbb{C}$ к $K \subseteq \mathbb{C}$ не увеличивает размерности пространства мероморфных решений. Мы можем вернуться к первоначальному предположению относительно поля K.

Теорема 5. *Над полем $K\left(e^{2\pi ix}\right)$ пространство мероморфных решений системы вида (6) имеет не превосходящую rm размерность.*

Дополнительно можно показать, что если при $K = \mathbb{C}$ в исходной системе S вида (6) как ведущая, так и трейлинговая матрица невырождены (т.е. системы S, $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$ совпадают), то обсуждаемая размерность равна rm.

4.3. Ограниченность валюаций мероморфных решений разностных систем

В разностном случае существование l- и t-охватывающих систем позволяет, например, доказать, что для мероморфного решения $y(x)$ и фиксированного $\alpha \in \mathbb{C}$ значения $\mathrm{val}_{x-\alpha-n}y(x)$ ограничены снизу при $n \in \mathbb{Z}$. Более полно это утверждение можно представить в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *([24, предл. 1]) Пусть $y(x)$ — мероморфное решение системы (6). Пусть (7) и (8) суть l- и t-охватывающие системы для этой системы. Пусть*

$$V(x) = \det \bar{A}_r(x-r), \quad W(x) = \det \bar{\bar{A}}_0(x). \tag{17}$$

Тогда

(i) если N_0 таково, что $V(\alpha+n_0)W(\alpha+n_0) \neq 0$ для всех целых $n_0 \geqslant N_0$, то

$$\exists_{\lambda\in\mathbb{Z}}\left(\forall_{n_0\geqslant N_0} \min_{n=n_0}^{n_0+r-1} \mathrm{val}_{x-\alpha-n}y(x) = \lambda\right);$$

(ii) если N_1 таково, что $V(\alpha+n_1)W(\alpha+n_1) \neq 0$ для всех целых $n_1 \leqslant N_1$, то

$$\exists_{\mu\in\mathbb{Z}}\left(\forall_{n_1\leqslant N_1} \min_{n=n_1}^{n_1+r-1} \mathrm{val}_{x-\alpha-n}y(x) = \mu\right).$$

5. ИНДУЦИРОВАННЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ

В этом и следующем разделах описываются алгоритмы построения некоторых базовых объектов (рекуррентных систем, полиномов и числовых величин), которые играют важную роль в нахождении для данной системы ее решений разных видов.

5.1. Построение индуцированных систем

Двусторонние последовательности рациональных функций

$$\{x^n\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{18}$$

и

$$\left\{\begin{array}{ll} x^{\underline{n}}, & \text{если } n \geqslant 0 \\ 1/x^{\overline{|n|}}, & \text{если } n < 0 \end{array}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{19}$$

($x^{\underline{n}} = \prod_{k=1}^{n}(x-k+1)$, $x^{\overline{n}} = \prod_{k=1}^{n}(x+k)$) мы будем использовать как базисы для разложения (представления рядами) некоторых решений систем. Базис (18) будет применяться в дифференциальном случае, базис (19) — в разностном. Пусть разложение решения системы в соответствующем базисе имеет коэффициенты $z(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $z(n) = (z_1(n), \ldots, z_m(n))^T$ — вектор-столбец числовых последовательностей. Тогда последовательность вектор-столбцов $\{z(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет *индуцированной рекуррентной* системе

$$B_l(n)z(n+l) + B_{l-1}(n)z(n+l-1) + \cdots + \\ + B_t(n)z(n+t) = 0, \tag{20}$$

где целые l, t таковы, что $l \geqslant t$, и $B_t(n), \ldots, B_l(n) \in \mathrm{Mat}_m(K[n])$. Мы используем термин "индуцированная рекуррентная система", а не "индуцированная разностная система", подчеркивая этим особую роль индуцированных систем.

Для изложения способа построения индуцированной рекуррентной системы будет удобно переписать исходную систему (1) с помощью матрицы, элементами которой служат скалярные операторы:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \end{pmatrix} y(x) = 0, \qquad (21)$$

$L_{ij} \in K[x, \xi]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. (Переход к такой записи системы и обратный переход не вызывают затруднений.) Тогда индуцированная рекуррентная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{L}_{11} & \dots & \tilde{L}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{L}_{m1} & \dots & \tilde{L}_{mm} \end{pmatrix} z(n) = 0, \qquad (22)$$

$\tilde{L}_{ij} \in K[n, E_n, E_n^{-1}]$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, где E_n — оператор сдвига по n: $E_n z(n) = z(n+1)$. Каждый оператор $\tilde{L}_{ij}$ получается из L_{ij} преобразованием, которое описывает следующая теорема.

Теорема 7. *([17], [12, разд. 3], [26], [15, разд. 2], [25]) В дифференциальном случае индуцированная рекуррентная система строится по системе (21) преобразованием*

$$x \to E_n^{-1}, \ \ \frac{d}{dx} \to (n+1)E_n.$$

В разностном случае — преобразованием

$$x \to n + E_n^{-1}, \ \ E \to 1 + (n+1)E_n. \qquad (23)$$

Пример 5. Переписав разностную систему

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(x+1) + \\ + \begin{pmatrix} -2x^2 - 4x & x^2 + 3x + 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(x) = 0 \qquad (24)$$

в виде (21), получим

$$\begin{pmatrix} (x^2 + x)E - 2x^2 - 4 & x^2 + 3x + 2 \\ -1 & E \end{pmatrix} y(x) = 0.$$

Преобразование (23) приводит к системе вида (22) с $m = 2$, в которой

$\tilde{L}_{11} = (n^3 + 2n^2 + n)E_n + n^2 - 3n - (n+3)E_n^{-1} - E_n^{-2}$,

$\tilde{L}_{12} = n^2 + 3n + 2 + (2n+2)E_n^{-1} + E_n^{-2}$,

$\tilde{L}_{21} = -1$,

$\tilde{L}_{22} = (n+1)E_n + 1$.

Индуцированную рекуррентную систему для системы (24) переписываем в виде (20):

$$\begin{pmatrix} n^3 + 2n^2 + n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} z(n+1) + \\ + \begin{pmatrix} n^2 - 3n & n^2 + 3n + 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} z(n) + \\ + \begin{pmatrix} -n-3 & 2n+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(n-1) + \\ + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(n-2) = 0. \qquad (25)$$

Например, если система (24) обладает полиномиальным решением, то оно может быть записано в базисе (19):

$$a_0 x^{\underline{0}} + a_1 x^{\underline{1}} + \dots + a_k x^{\underline{k}}, \ \ a_i \in K^m,$$

и тогда двустронняя последовательность

$$z(n) = \begin{cases} a_n, & \text{если } 0 \leqslant n \leqslant k, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

должна удовлетворять системе (25). Мы вернемся к этому при рассмотрении примера 8.

Примечание 4. Справедливо большее, чем выполнение равенства (20) для коэффициентов разложений решений. Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ — некоторый вектор, элементы которого допускают разложение по базису (18) или (19), и пусть

$$y^*(x) = A_r(x)\xi^r y(x) + \dots + A_1(x)\xi y(x) + A_0(x)y(x)$$

(здесь $y(x)$ не обязательно является решением исходной системы). Пусть $z(n)$ и $z^*(n)$ — векторы, компоненты которых суть последовательности коэффициентов разложений компонент $y_1, y_2, \dots, y_m$ и $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$ в базисе (18) или (19). Тогда

$$z^*(n) = B_l(n)z(n+l) + B_{l-1}(n)z(n+l-1) + \dots + \\ + B_t(n)z(n+t).$$

Нетрудно показать, что уравнения индуцированной рекуррентной системы независимы над $K[n, E_n]$, если и только если уравнения исходной системы независимы над $K\left[x, \frac{d}{dx}\right]$ или соответственно над $K[x, E]$. В то же время, если исходная дифференциальная система имеет невырожденную ведущую матрицу, то это не гарантирует, что ведущая матрица индуцированной рекуррентной системы также невырождена, и наоборот.

Пример 6. Для дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = 0,$$

имеющей вырожденную ведущую матрицу, индуцированная рекуррентная система

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z(n) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(n-1) = 0$$

имеет невырожденную ведущую матрицу ([4, разд. 3.2]).

С другой стороны, для дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} -1 & -x^3 \\ -2 & -x \end{pmatrix} y = 0$$

индуцированная рекуррентная система

$$\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} z(n) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n-2 \end{pmatrix} z(n-1) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(n-3) = 0$$

имеет вырожденную ведущую матрицу ([12, пример 8]).

Существуют также простые примеры, в которых ведущие матрицы дифференциальной и индуцированной рекуррентной систем обе являются (не)вырожденными. В разностном случае аналогичные примеры могут быть приведены для трейлинговых матриц.

5.2. Определяющие уравнения

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения валюаций аналитических решений в скалярном случае применяются так называемые *определяющие* (алгебраические) уравнения — см., например, [9, гл. IV]. Для нахождения верхних границ степеней полиномиальных решений (дифференциальный и разностный случаи) и нижних границ валюаций решений в заданной точке (дифференциальный случай) систем вида (1) нам нужны какие-то варианты определяющих уравнений. Индуцированные рекуррентные системы, которые мы ввели в разделе 5.1, позволяют построить такие уравнения.

Если ведущая матрица $B_l(n)$ системы (20) вырождена, то для (20) можно с помощью EG_σ построить l-охватывающую систему

$$\bar{B}_l(n)z(n+l) + \bar{B}_{l-1}(n)z(n+l-1) + \cdots + \\ + \bar{B}_t(n)z(n+t) = 0.$$

Аналогичным образом можно построить t-охватывающую систему

$$\bar{\bar{B}}_l(n)z(n+l) + \bar{\bar{B}}_{l-1}(n)z(n+l-1) + \cdots + \\ + \bar{\bar{B}}_t(n)z(n+t) = 0.$$

То обстоятельство, что значение t в (20) не обязательно равно нулю и даже может быть отрицательным (как и значение l), не является препятствием для применения EG_σ.

Теорема 8. *(i) Пусть $y(x) \in K((x))^m$ — решение дифференциальной системы, для которой (20) является индуцированной рекуррентной системой. Тогда значение $n = \mathrm{val}_x\, y(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$\det \bar{B}_l(n-l) = 0. \tag{26}$$

(ii) Пусть $y(x) \in K[x]^m$ — решение дифференциальной или разностной системы, для которой (20) является индуцированной рекуррентной системой. Тогда значение $n = \deg y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\det \bar{\bar{B}}_t(n-t) = 0 \tag{27}$$

(здесь $\deg y(x) = \max_{i=1}^m \deg y_i(x)$ для $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T \in K[x]^m$).

Уравнение (27) может рассматриваться как определяющее уравнение исходной системы в точке ∞, и наибольший целый неотрицательный корень этого уравнения дает верхнюю границу степеней полиномиальных решений, если же целых неотрицательных корней у уравнения (27) нет, то у исходной системы заведомо нет полиномиальных решений. Аналогичным образом в дифференциальном случае уравнение (26) может быть использовано для нахождения нижних границ валюаций решений в точке 0. (Подстановка $x+\alpha$ вместо x в исходную систему переводит точку α в точку 0.)

Пример 7. Индуцированной рекуррентной системой для дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 1 & 1+x^2 \\ -x & 0 \end{pmatrix} y = 0 \tag{28}$$

служит

$$\begin{pmatrix} n+1 & n+1 \\ n & n \end{pmatrix} z(n) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z(n-1) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(n-2) = 0.$$

Применение EG_σ по отношению к ведущей матрице приводит к

$$\begin{pmatrix} n+2 & 0 \\ n & n \end{pmatrix} z(n) + \begin{pmatrix} 0 & n+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z(n-1) = 0, \tag{29}$$

при этом возникает линейное ограничение

$$z_1(0) + z_2(0) + z_2(-2) = 0. \tag{30}$$

Определитель ведущей матрицы системы (29) имеет корни $0, -2$. Поэтому дифференциальная система (28) не может иметь в точке $x = 0$ принадлежащих $K((x))^m$ решений с валюациями, отличными от 0 и -2. Имеются ли решения именно с такими валюациями, мы пока не знаем. Ответ будет дан позднее (см. далее пример 9).

Мы видим, что в дифференциальном случае алгоритмы EG_δ и EG_σ работают вместе: первый – для нахождения множества возможных особых точек решений, второй – для вычисления границ валюаций решений в этих точках.

Для уравнений (26), (27) мы будем в дальнейшем использовать несколько условное название “определяющие уравнения” (условность проявляется, например, в том, что получаемые этим путем уравнения не являются единственными, так как зависят от построенных l- и t-охватывающих систем).

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ НИЖНИХ ГРАНИЦ ВАЛЮАЦИЙ КОМПОНЕНТ МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Продолжим изучение мероморфных решений разностных систем, начатое в конце раздела 4.1. Речь пойдет о нижней границе для $\mathrm{val}_{x-\alpha} y(x)$, где $y(x)$ — мероморфное решение системы (6), α – некоторая точка комплексной плоскости.

6.1. Границы валюаций решений

Рассмотрим задачу вычисления нижней границы для $\mathrm{val}_{x-\alpha} y(x)$, предполагая, что

$$\min_{n=n_0}^{n_0+r-1} \mathrm{val}_{x-\alpha+n} y(x) \geqslant v \tag{31}$$

для некоторого неотрицательного целого n_0 и целого v или, аналогично, что

$$\min_{n=n_1}^{n_1+r-1} \mathrm{val}_{x-\alpha-n} y(x) \geqslant w \tag{32}$$

для некоторого неотрицательного целого n_1 и целого w. Следующие теорема и примечание взяты из [24, разд. 3.2].

Теорема 9. *Пусть $y(x)$ — мероморфное решение системы (6), $\alpha \in \mathbb{C}$ и $p(\alpha) = 0$ для $p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$. Пусть $V(x)$ и $W(x)$ определены равенствами (17). Пусть неотрицательное целое n_0 и целое v таковы, что выполняется неравенство (31). Тогда*

$$\mathrm{val}_{x-\alpha} y(x) \geqslant v - \sum_{n=0}^{n_0-1} \mathrm{val}_{p(x+n)} V(x).$$

Аналогично, пусть неотрицательное целое n_1 и целое w таковы, что выполняется неравенство (32). Тогда

$$\mathrm{val}_{x-\alpha} y(x) \geqslant w - \sum_{n=0}^{n_1-1} \mathrm{val}_{p(x-n)} W(x).$$

Примечание 5. Пусть λ и μ определены как в теореме 6. Если $v \leqslant \lambda$ и $w \leqslant \mu$, то следующее неравенство выполняется при любом взаимном расположении точки α и корней полиномов $W(x), V(x)$:

$$\mathrm{val}_{x-\alpha} y(x) \geqslant \max \left\{ v - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x+n)} V(x), \right. \\ \left. w - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x-n)} W(x) \right\} \tag{33}$$

(суммы в правой части неравенства конечны).

Теорема 9 и примечание 5 дают алгоритмы решения рассматриваемой задачи.

6.2. *Границы валюаций компонент решений*

Можно также рассмотреть задачу вычисления нижних границ валюаций $\mathrm{val}_{x-\alpha} y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, предполагая, что для некоторого неотрицательного целого n_0 заданы раздельно нижние границы валюаций

$$\mathrm{val}_{x-\alpha+n} y_i(x), \quad n = n_0, n_0+1, \ldots, n_0+r-1, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

или, что для некоторого неотрицательного целого n_1 заданы раздельно нижние границы валюаций

$$\mathrm{val}_{x-\alpha-n} y_i(x), \quad n = n_1, n_1+1, \ldots, n_1+r-1, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

В [24] приведен алгоритм, который в общем случае дает более точные границы, чем предыдущий алгоритм, но имеет и более высокую сложность. Он основан на так называемых тропических вычислениях ([6, §2]). Мы здесь не будем входить в дальнейшие подробности.

7. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

В этом разделе мы даем примеры алгоритмов поиска решений различных видов. Алгоритмы используют индуцированные рекуррентные системы и определяющие уравнения.

7.1. *Полиномиальные решения*

Полиномиальные и рациональные решения представляют самостоятельный интерес. Помимо этого, их нахождение может служить промежуточным этапом при построении более сложных решений.

После того, как с помощью уравнения (27) определена верхняя граница степеней всех полиномиальных решений, для фактического нахождения этих решений можно применить метод неопределенных коэффициентов, но можно использовать и более эффективное построение коэффициентов полиномиальных решений с помощью индуцированной рекуррентной системы – см., например, [10].

Пример 8. Продолжим рассмотрение системы (24). Индуцированная рекуррентная система (25) имеет вырожденную трейлинговую матрицу. Алгоритм EG_σ строит t-охватывающую рекуррентную систему

$$\begin{pmatrix} (n-1)^2-(n-1)^3 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} z(n-1) + \\ + \begin{pmatrix} -(n-1)^2+5n-9 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} z(n-2) = 0$$

с пустым множеством C линейных ограничений. Корнями уравнения (27) служат 1 и 2, это дает верхнюю границу 2 степеней возможных полиномиальных решений.

С помощью полученной t-охватывающей рекуррентной системы мы последовательно находим коэффициенты искомого полиномиального решения, от старших коэффициентов к младшим, при этом учитываем, что коэффициенты с индексами, большими 2 и меньшими 0, обязательно равны нулю. Здесь эта система используется для n от 4 до -1. В решение входят произвольные постоянные:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 + (2c_1+c_2)x^{\underline{1}} + c_1 x^{\underline{2}} \\ c_2 x^{\underline{1}} + c_1 x^{\underline{2}} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_2 + (2c_1+c_2)x + c_1 x(x-1) \\ c_2 x + c_1 x(x-1) \end{pmatrix}.$$

7.2. *Рациональные решения*

Опишем сведение поиска рациональных решений систем к поиску полиномиальных решений. Сначала обратимся к дифференциальному случаю. Как говорилось в разделе 4.1, для дифференциальной системы S рассматриваемого вида можно найти такой полином $d(x)$, что если решение системы S имеет особенность в точке α, то $d(\alpha) = 0$. Умение находить нижнюю границу e_α валюации в точке α любого из решений системы S позволяет построить такую рациональную функцию $F(x) = \prod_{d(\alpha)=0} (x-\alpha)^{e_\alpha}$, что любое рациональное решение $y(x)$ системы S имеет вид

$$y(x) = F(x)\tilde{y}(x), \tag{34}$$

$\tilde{y}(x) \in K[x]^m$. Подстановка (34) преобразует S в систему для $\tilde{y}(x)$, и остается найти полиномиальные решения полученной системы (см. [12, пример 10]); если определяющее уравнение, соответствующее какому-то α, не имеет целых корней, то S не имеет рациональных решений.

Можно добавить к сказанному, что границы e_i одинаковы для всех корней α_i каждого неприводимого множителя полинома $d(x)$, поэтому $F(x)$ можно записать в виде

$$\prod_{\substack{p(x)\in \mathrm{Irr}(K[x])\\ p(x)|d'(x)}} p(x)^{e_{p(x)}},$$

здесь $d'(x)$ — результат освобождения полинома $d(x)$ от квадратов. При $\deg p(x) > 1$ показатели $e_{p(x)}$ находятся с помощью вычислений над полем $K(\alpha)$, $p(\alpha) = 0$.

Теперь займемся разностным случаем. При поиске знаменателей рациональных решений априори известные нижние границы v, w валюаций берутся в (33) равными нулю. Рассмотрим алгоритм нахождения некоторого *универсального знаменателя* рациональных решений исходной системы, или, как для краткости мы будем писать, универсального знаменателя для исходной системы, т.е. такого полинома $U(x) \in K[x]$, что если система имеет рациональное решение $y(x) \in K(x)^m$, то оно может быть представлено в виде

$$y(x) = \frac{1}{U(x)} z(x), \tag{35}$$

где $z(x) \in K[x]^m$. Зная универсальный знаменатель, можно сделать подстановку (35) и преобразовать исходную систему в систему для $z(x)$, а затем применить один из алгоритмов поиска полиномиальных решений (см. раздел 7.1).

Для $p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$, $f(x) \in K[x]\backslash\{0\}$ мы определяем конечное множество

$$\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = \{k \in \mathbb{Z} \,:\, p(x+k) \mid f(x)\};$$

при $\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = \varnothing$ полагаем $\max \mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = -\infty$, $\min \mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = +\infty$.

Один из применяемых на практике алгоритмов построения универсального знаменателя состоит из двух шагов. На первом шаге строится конечное множество M неприводимых полиномов

$$M = \bigl\{p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x]) \,:\, \min \mathcal{N}_{p(x)}(W(x)) \leqslant 0, \\ \max \mathcal{N}_{p(x)}(V(x)) \geqslant 0\bigr\},$$

где $V(x), W(x)$ определены посредством (17). Для построения множества M используется полная факторизация $V(x)$ и $W(x)$. На втором шаге вычисляется универсальный знаменатель в виде произведения

$$\prod_{p(x)\in M} p^{\gamma_{p(x)}}(x), \tag{36}$$

где, в соответствии с (33),

$$\gamma_{p(x)} = \min\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x+n)} V(x),\right. \\ \left.\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x-n)} W(x)\right\}. \tag{37}$$

Основанный на формулах (36), (37) алгоритм нахождения универсального знаменателя был предложен в [39]. Затем было показано, что если учитывать возможность совпадения показателей $\gamma_{p(x)}$ для различных (иногда многих) $p(x)$, отличающихся друг от друга сдвигом на целое число, то вычисления существенно ускоряются ([20], [3]).

Примечание 6. В [5, теорема 1] доказано, что если некоторый алгоритм построения универсального знаменателя $U(x)$ использует, подобно предложенному выше алгоритму, только $V(x)$ и $W(x)$, то $U(x)$ будет универсальным знаменателем и для любой неоднородной системы с прежней левой частью и произвольной полиномиальной правой частью $(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_m(x))^T \in K[x]^m$.

Нахождение $U(x)$ для заданных $V(x), W(x)$ может быть выполнено и алгоритмами, предполагающими вычисление так называемой *дисперсии* полиномов ([1], [2, §8]). Первоначально эти алгоритмы предназначались для скалярного случая. Затем в [13] был предложен вариант для нормальных систем (15), при этом $V(x) = \mathrm{den} A(x-1)$, $W(x) = \mathrm{den} A^{-1}(x)$. (Эти дисперсионные алгоритмы используются, в частности, в Maple). В [29] близкий подход применялся для решения некоторой более общей задачи.

Но сложность алгоритма, основанного на формулах (36), (37) и учитывающего возможность совпадения показателей $\gamma_{p(x)}$ для различных

$p(x)$, меньше, чем сложность дисперсионного алгоритма ([20, разд. 4.2])).

7.3. *Решения с компонентами-рядами*

Здесь мы, в частности, скажем о поиске таких решений дифференциальных систем, компоненты которых являются лорановыми рядами. Эти решения мы будем называть *лорановыми*. Вопрос о сходимости рядов мы не рассматриваем.

В случае вырожденной ведущей матрицы индуцированной системы мы применяем EG_σ. Возникающее при этом конечное множество C линейных ограничений может позволить отсеять некоторые из тех корней определителя ведущей матрицы, которые заведомо не являются валюациями лорановых решений (это отсеивание может применяться и при поиске рациональных решений). Разложение решения в ряд представляется начальными членами, их количество выбирается так, что, во-первых, вычисление последующих членов уже не требует учета линейных ограничений и, во-вторых, определитель ведущей матрицы l-охватывающей рекуррентной системы в ходе этого вычисления уже не обращается в нуль. Найдя нижнюю границу валюаций решений (теорема 8(i)), мы можем выписать и решить систему линейных алгебраических уравнений для этих начальных членов. Следующие члены могут быть получены с помощью l-охватывающей рекуррентной системы.

Пример 9. Вернемся к дифференциальной системе (28) из примера 7. Определитель ведущей матрицы системы (29) имеет корни $0, -2$, но большему из этих корней не отвечает никакого лоранова решения системы (28): ограничение (30) и первое уравнение системы (29) показывают, что если $z(-1) = z(-2) = 0$, то и $z(0) = 0$. Что касается корня -2, то соответствующие лорановы решения строятся легко. Выбираем $z(-2)$ так, чтобы выполнялось

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} z(-2) = 0.$$

В качестве базисного решения этой линейной системы алгебраических уравнений можем взять, например, $z_1(-2) = (1, -1)^T$. Из (29) получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} z(-1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z(-2) = 0,$$

откуда $z_1(-1) = (0, -1)^T$. При $n = 0$ система (29) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z(0) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z(-1) = 0,$$

и вместе с (30) дает $z_1(0) = (1/2, 1/2)^T$. Используя (29), получаем

$$z(n) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{n+1}{n+2} \\ \frac{1}{n} & \frac{n+1}{n+2} \end{pmatrix} z(n-1)$$

для $n \geqslant 1$.

Мы видим, что в точке $x = 0$ дифференциальная система (28) имеет одномерное пространство лорановых решений, его базис может быть задан рядом

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x^{-2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix} x^n,$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{n+1}{n+2} \\ \frac{1}{n} & \frac{n+1}{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(n-1) \\ z_2(n-1) \end{pmatrix} \qquad (38)$$

при $n \geqslant 1$.

Примечание 7. В [31, разд. 6] содержится наблюдение, что тем преобразованиям, которые выполняются алгоритмом EG_σ над индуцированной рекуррентной системой, отвечают вполне определенные преобразования исходной дифференциальной системы. Это дает, в терминологии авторов статьи [31], дифференциальный вариант EG_σ, который работает без перехода к рекуррентной системе. Такого рода подход может быть полезен, когда требуется найти небольшое число членов лорановых рядов. Но когда это число велико, индуцированная рекуррентная система более эффективна (в примере 9 мы получили удобную рекуррентную формулу (38)). Кроме этого исходный вариант EG_σ дает дополнительно конечное множество C линейных ограничений, которое в некоторых случаях позволяет не рассматривать часть корней определителя соответствующей матрицы (в примере 9 это множество состоит из одного-единственного соотношения (30), оно позволяет не рассматривать корень 0).

Аналогичным образом в разностном случае можно применять индуцированные рекуррентные системы для построения решений в виде рядов Ньютона (об этих рядах см. [7, гл. II]). В точке 0 каждое такое решение выглядит так:

$$a_0x^{\underline{0}} + a_1x^{\underline{1}} + +a_2x^{\underline{2}} + \dots, \quad a_i \in K^m.$$

Эти ряды представляют определенный интерес, но работать с ними сложнее, чем с рядами Лорана. Например, даже для целой функции ее представление рядом Ньютона, вообще говоря, не единственно (но известны достаточные условия единственности: см. [7, гл. II, §2, п. 3]).

7.4. *Регулярные решения дифференциальных систем*

Регулярные решения систем дифференциальных уравнений — это решения вида

$$y(x) = x^{\lambda}v(x), \tag{39}$$

где $\lambda \in K$, $v(x) \in K((x))^m[\log x]$. Каждое такое решение записывается как

$$x^{\lambda}\sum_{s=0}^{k} g_s(x)\log^s(x),$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $g_s(x) \in K((x))^m$, $s = 0, 1, \dots, k$. Если

$$\min_{s=0}^{k} \mathrm{val}_x\, g_s(x) = 0, \tag{40}$$

то λ называется *показателем* решения (39).

В скалярном случае задача поиска регулярных решений может быть решена с помощью известных из теории дифференциальных уравнений алгоритмов. Алгоритм Г. Фробениуса основан на исследовании корней определяющего уравнения ([9, гл. IV], [38], [47, гл. V]). При этом при построении решения учитываются не только значения корней определяющего уравнения, но и кратность корней, а также наличие корней, отличающихся на целое число. Алгоритм Л. Хеффтера ([40, гл. II, VIII], [47, гл. V]) строит базис (возможно пустой) регулярных решений с множителем x^{λ}, и построение не использует ни кратность корня λ, ни существование других корней, отличающихся от λ на целое число.

Применение самих алгоритмов Фробениуса и Хеффтера к системам требует преобразования систем к скалярному уравнению (например, с помощью метода циклического вектора [36]), что неудобно с практической точки зрения. Нужны алгоритмы, которые применимы непосредственно к системам. Алгоритм Хеффтера обобщен в [30], [33] на случай нормальных систем первого порядка вида (15) с помощью подхода, основанного на супернеприводимости ([41]). Но алгоритм Хеффтера может быть обобщен и с помощью подхода, основанного на построении индуцированных рекуррентных систем и соответствующих охватывающих систем ([22], [19]). Этот вариант применим уже к системам любого порядка. Для его обсуждения систему (2) удобно считать записанной как $L(y) = 0$, где L — дифференциальный оператор с матричными коэффициентами:

$$L = A_r(x)\frac{d^r}{dx^r} + \dots + A_1(x)\frac{d}{dx} + A_0(x).$$

Для любого целого $i \geqslant 0$, результат применения L к $g(z)\log^i(z)/i!$ имеет вид

$$L_{i,i}(g)\frac{\log^i z}{i!} + \dots + L_{i,1}(g)\frac{\log z}{1!} + L_{i,0}(g),$$

при этом коэффициенты дифференциальных операторов $L_{i,j}$ принадлежат $\mathrm{Mat}_m(K[x, x^{-1}])$, и $L_{0,0} = L$, $L_{i+j,j} = L_{i,0}$ для всех $i, j \geqslant 0$ ([40], [43, разд. 3.2.1]). Примем обозначение $L_i = L_{i,0}(= L_{i+j,j}$ для всех $j \geqslant 0)$.

Обобщение алгоритма Хеффтера на случай систем произвольного порядка основано на рассмотрении последовательности систем $S_0, S_1, \dots$, где S_k — это система

$$L_0(g_i) = -\sum_{j=1}^{i} L_j(g_{i-j}), \quad i = 0, 1, \dots, k. \tag{41}$$

Справедливо утверждение, аналогичное доказанному Хеффтером для скалярного случая:

Теорема 10. *([22, 19]) Множество целых неотрицательных k, для которых система S_k имеет лораново решение*

$$\left(g_0(x)^T, g_1(x)^T, \dots, g_k(x)^T\right)^T, \quad g_0(x) \neq 0,$$

конечно, и если оно пусто, то $L(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в $K((x))^m[\log x]$. Если это множество не пусто и $\tilde{k}$ — его максимальный элемент, то любое принадлежащее

$K((x))^m[\log x]$ решение системы $L(y) = 0$ имеет вид

$$\sum_{s=0}^{\tilde{k}} g_{\tilde{k}-s}(x) \frac{\log^s x}{s!}, \tag{42}$$

где

$$\left(g_0(x)^T, g_1(x)^T, \ldots, g_{\tilde{k}}(x)^T\right)^T, \ \ g_0(x) \neq 0, \tag{43}$$

является лорановым решением системы $S_{\tilde{k}}$. В то же время, любое лораново решение вида (43) системы $S_{\tilde{k}}$ порождает решение (42) системы $L(y) = 0$.

Если значение λ известно, то поиск регулярного решения (39) сводится с помощью подстановки $y(x) = x^\lambda y_\lambda(x)$ к поиску решения $y_\lambda(x) \in K((x))^m[\log x]$.

В качестве возможных кандидатов на роль λ в (39) используются корни определяющего уравнения (26) исходной системы. При необходимости применяется EG_σ; множество C возникающих линейных ограничений дает в некоторых случаях возможность отсеять часть кандидатов на роль показателя λ. Линейные ограничения с нецелыми значениями n могут отсеять лишние нецелые значения λ. Если $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, то множества регулярных решений с множителями x^{λ_1} и x^{λ_2} будут, очевидно, одинаковыми. Поэтому из всех значений λ, различающихся на целое число, достаточно рассмотреть наименьшее, и если регулярное решение с таким значением λ существует, то, добавлением при необходимости целого числа к λ, легко можно будет добиться и выполнения (40), найдя, таким образом, показатель решения.

Примечание 8. Возможные значения λ принадлежат либо полю K либо некоторому его расширению. Во втором случае коэффициенты тех рядов Лорана, которые входят в (42), принадлежат этому же расширению.

Пример 10. Для дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} 18x^3 & 0 \\ 0 & 50x^2 - 15x \end{pmatrix} y'(x) + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 26x - 27 \end{pmatrix} y(x) = 0$$

индуцированная рекуррентная система имеет вырожденную ведущую матрицу; применяя EG_σ, получим рекуррентную систему с ведущей матрицей

$$\bar{B}_0(n) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 14(25n+13) \\ 162(5n+14)(5n+19)n & 28(25n+38)(25n+13) \end{pmatrix} \tag{44}$$

и дополнительно линейные ограничения

$$-\frac{96}{5} z_2(-\frac{13}{25}) - 50 z_2(-\frac{13}{25} - 1) = 0, \tag{45}$$

$$7 z_2(-\frac{9}{5}) - \frac{342}{5} z_1(-\frac{9}{5} - 2) = 0. \tag{46}$$

Множество $\left\{-\frac{19}{5}, -\frac{14}{5}, -\frac{13}{25}, 0\right\}$ корней определителя матрицы $\bar{B}_0(n)$ разбивается на три класса с минимальными элементами $-\frac{19}{5}, -\frac{13}{25}, 0$. Линейное ограничение (45) отсеивает корень $-\frac{13}{25}$. Линейное ограничение (46) ничего не отсеивает, и надо рассмотреть два значения λ: $-\frac{19}{5}$ и 0. Вычисления дают итоговое решение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^{-\frac{19}{5}} \begin{pmatrix} \frac{35}{342} c_1 - \frac{16}{27} c_1 x + \frac{1568}{3645} c_1 x^2 + O(x^3) \\ c_1 x^2 + O(x^3) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} c_2 + O(x) \\ O(x) \end{pmatrix}.$$

Разложение в ряд каждого $g_s(x)$ представляется начальными членами (см. раздел 7.3).

Представление рядов в виде их начальных отрезков — это тонкое место алгоритма. В ходе вычислений требуется определять длину начальных отрезков в правых частях (41), и, соответственно, выполнять удлинение начальных отрезков решений предыдущих систем по мере надобности при вычислениях правой части следующей системы в последовательности $S_0, S_1, \ldots$ Наш алгоритм справляется с этой трудностью, подробности — в [22], [19].

Легко заметить, что системы вида (41) различаются только правыми частями, в левой же части всегда находится результат применения L_0 (т.е. L) к вектору из неизвестных функций. Последовательное решение таких систем эффективно выполняется с помощью применения EG_σ к неоднородным системам, о чем будет кратко рассказано в разделе 8.1.

Примечание 9. Задача построения регулярных решений дифференциальных систем произвольного порядка была полностью решена с помощью EG_σ в [22], [19]. Задача построения таких решений решается также в работе [31] для случая, когда ведущая матрица исходной дифференциальной системы невырождена. Так как множество соотношений C в [31] не рассматривается, отсеивание появляющихся лишних решений предлагается выполнять с помощью подстановки в уравнения исходной системы. Если индуцированная рекуррентная система и множество C построены, то, как нам представляется, это отсеивание обходится дороже, чем учет соотношений, подобных (30). (В [31] все степенные ряды, которые входят в регулярное решение, задаются в усеченном виде, что делает отсеивающую проверку-подстановку еще менее простым делом.)

7.5. *Рационально-логарифмические решения дифференциальных систем*

Рационально-логарифмические решения дифференциальных систем — это решения, принадлежащие $K(x)^m[\log x]$, их компоненты записываются как

$$\sum_{s=0}^{k} g_s(x)\log^s(x), \tag{47}$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $g_s(x) \in K(x)$, $s = 0, 1, \ldots, k$. Если поиск регулярных решений — это локальная задача, то есть задача, решаемая в некоторой точке, то поиск рационально-логарифмических решений — аналогичная глобальная задача.

Алгоритм поиска регулярных решений, идея которого обсуждалась в разделе 7.4, строит начальные отрезки рядов Лорана, он несложно адаптируется для поиска решений в $K[x]^m[\log x]$. Для этого вместо динамического вычисления необходимого количества начальных членов рядов можно сразу вычислить верхнюю границу степеней соответствующих полиномиальных решений и далее найти именно такое количество членов. Кроме этого, отпадает необходимость вычисления возможных значений λ.

При поиске рационально-логарифмических решений как и при описанном в разделе 7.1 поиске рациональных решений, используется построение такой функции $F(x) \in K(x)$, что любое рационально-логорифмическое решение $y(x)$ системы S имеет вид (34), т.е. $y(x) = F(x)z(x)$, но с $z(x) \in K[x]^m[\log x]$. Подстановка (34) сводит поиск решения в $K(x)^m[\log x]$ к поиску решения в $K[x]^m[\log x]$. В [30] показано, что для поиска рациональных и рационально-логарифмических решений может применяться одна и та же функция $F(x)$.

Пример 11. Для дифференциальной системы

$$\begin{pmatrix} x^2+x & 0 \\ 0 & x^2+x \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 2x+1 & x+1 \\ 0 & 2x+1 \end{pmatrix} y = 0$$

находим $F(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$, и получаем соответствующее рационально-логарифмическое решение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1+c_2\log x}{x(x+1)} \\ \frac{c_2}{x(x+1)} \end{pmatrix},$$

при этом рациональное решение той же системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{x(x+1)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найденное рационально-логарифмическое решение содержит в себе это рациональное решение при $c_2 = 0$.

8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

8.1. *Неоднородные системы*

Если дана неоднородная система S, левая часть которой совпадает с левой частью (1), а правая часть имеет вид

$$b(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_m(x))^T \in K[x]^m,$$

то, добавив к $y(x)$ компоненту y_{m+1} со значением 1, можно преобразовать данную систему в однородную систему S_1 с числом неизвестных функций и уравнений, равным $m+1$. Разностная система

$$A_r(x)y(x+r)+\cdots+A_1(x)y(x+1)+A_0(x)y(x) = b(x)$$

преобразуется в систему S_1 вида

$$\tilde{A}_r(x)y(x+r)+\cdots+\tilde{A}_1(x)y(x+1)+\tilde{A}_0(x)y(x) = 0,$$

где

$$\tilde{A}_0(x) = \begin{pmatrix} & & & -b_1(x) \\ & A_0(x) & & \vdots \\ & & & -b_m(x) \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A_1(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{A}_i(x) = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A_i(x) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i = 2, 3, \dots, r+1.$$

Аналогичным образом можно описать этот переход к системе S_1 в дифференциальном случае, используя добавочное уравнение $y'_{m+1}(x) = 0$ вместо $y_{m+1}(x+1) - y_{m+1}(x) = 0$.

Пусть однородная система S_2 получена отбрасыванием правых частей в уравнениях исходной системы. Если уравнения S_2 независимы над $K\left[x, \frac{d}{dx}\right]$, то уравнения S_1 также независимы. Исходя из этих соображений, во многих задачах можно ограничиться рассмотрением однородных систем. Например, для нахождения полинома, среди корней которого присутствуют все особые точки решений дифференциальной системы S, достаточно найти соответствующий полином для S_1. Бывает и так, что правую часть на каком-то этапе вычислений можно игнорировать, — см., например, примечание 6.

Но алгоритмы EG_δ и EG_σ можно применять и непосредственно к неоднородным системам (для EG_σ это показывалось в [12]) и получать охватывающие неоднородные системы. Компоненты столбца, состоящего из компонент правой части, в процессе применения EG_δ и EG_σ не покидают своих мест (никогда не сдвигаются в другие столбцы). Это позволяет, например, достичь определенной эффективности в алгоритме построения регулярных решений, упомянутой в разделе 7.4. Решение $g_0(x)$ системы $L_0(g_0) = 0$ содержит произвольные постоянные. Мы используем $g_0(z)$ как правую часть системы $L_0(g_1) = -L_1(g_0)$, упомянутые произвольные постоянные входят в эту правую часть линейно. Применяя ту же технику, что и в случае скалярного уравнения с параметризованной правой частью (см., например, [17]), находим вместе с $g_1(z)$ линейные соотношения для постоянных, входящих в $g_0(x)$ и $g_1(x)$. Продолжая этот процесс, мы на каждом шаге получаем $g_0(x), \dots, g_i(x)$, в которые входят неизвестные постоянные, и линейную алгебраическую систему для этих постоянных. Завершимость этого процесса гарантируется, если мы наложим условие $g_0(x) \neq 0$, тогда мы обязательно дойдем до k такого, что (41) не имеет лорановых решений. Все эти системы имеют одну и ту же левую часть. Поэтому их индуцированные рекуррентные системы также имеют одну и ту же левую часть, но их правые части различны. Для того, чтобы выполнять преобразования EG_σ только один раз, EG_σ применяется к системе с правой частью общего вида. Это дает l-охватывающую рекуррентную систему с невырожденной ведущей матрицей, конечным набором линейных ограничений и преобразованной правой частью. Каждая компонента этой преобразованной правой части представляет собой линейную комбинацию компонент (возможно сдвинутых) исходной правой части. Следовательно, можно использовать одну и ту же l-охватывающую рекуррентную систему для решения любой систем (41), подставив для этого конкретные компоненты правой части очередной системы в преобразованную правую часть.

8.2. EG_δ и EG_σ как сохраняющие ранг преобразования

Всюду выше мы предполагали, что уравнения исходной системы S вида (1) независимы над $K[x, \xi]$, иначе говоря, что система имеет ранг m (т.е. полный ранг). Если это предположение не выполнено, то алгоритмы EG_δ и EG_σ позволят найти ранг системы, так как преобразования, которые ими выполняются, сохраняют число независимых над $K[x, \xi]$ уравнений. Если предположить, что это число равно $m_0 \leqslant m$, то с помощью EG_δ или соответственно EG_σ можно построить систему S' из m_0 независимых над $K[x, \xi]$ уравнений, такую, что ее ведущая матрица (размера $m_0 \times m$) имеет над $K[x]$ ранг m_0, и при этом каждое решение системы S является решением системы S' ([16, разд. 2], [4, разд. 2.1]).

8.3. *q-разностные системы*

Скажем коротко о q-разностном случае. Если дифференциальные уравнения строятся на основе операции дифференцирования $\frac{d}{dx}$, а разностные — на основе сдвига E, то q-разностные — на основе q-сдвига Q:

$$Q(f(x)) = f(qx),$$

где q — либо некоторое фиксированное число, либо дополнительная переменная (неопределенная величина). Мы будем считать, что $K = K_0(q)$, где K_0 — подполе поля K, и что при этом q трансцендентно над K_0. Соответственно $f(x)$ может быть аналитической функцией (как правило, двух переменных x, q) или формальным рядом, а может быть, например, и последовательностью $f(q^n)$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда x выступает как обозначение для q^n. В теории чисел q-разностные уравнения встречаются, например, в таком ее разделе как теория разбиений (см. [11, разд. 8.4]), они встречаются и в комбинаторике ([27]); построено q-решетчатое дифференциальное и интегральное исчисление ([8]).

Изложенное в разделах 2, 3, 5 переносится, с соответствующими уточнениями, на q-разностный случай ($\xi = Q$ в (1)) — см. [12], [15]. Для построения индуцированной рекуррентной системы удобно предполагать, что решение записывается в базисе $\{x^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, тогда индуцированная рекуррентная система получается из исходной преобразованием $Q \to q^n$, $x \to E_n^{-1}$.

9. РАНДОМИЗАЦИЯ И ЭВРИСТИКИ

9.1. *Особые точки дифференциальных систем – алгоритм Singsys*

В разделе 4.1 из существования l-объемлющей системы выведена конечность множества точек, в которых аналитические решения дифференциальной системы могут иметь особенности. Алгоритм Singsys (от английского Singularities of solutions of linear ordinary differential systems[1]) по заданной дифференциальной системе S находит полином $d(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ такой, что если S имеет аналитическое решение с особенностью произвольного типа в некоторой точке $\alpha \in \bar{K}$, то выполняется равенство $d(\alpha) = 0$. Алгоритм состоит в применении алгоритма EG_δ к заданной системе и в последующем нахождении определителя ведущей матрицы получившейся l-охватывающей системы. Найденный полином освобождается от квадратов.

[1] Сингулярности решений линейных обыкновенных дифференциальных систем.

9.2. *Рандомизация EG_δ и Singsys*

В работу алгоритмов EG_δ и Singsys можно внести элементы случайности. Пусть $0 < p \leqslant 1$. Будем выполнять дифференциальный сдвиг в том виде, как он описан в разделе 2.2, с вероятностью p, и будем выполнять дифференцирование без деления на последний ненулевой коэффициент с вероятностью $1-p$. Назовем это p-сдвигом (если $p = 1$, то p-сдвиг — это дифференциальный сдвиг).

С каждым шагом "редукция + p-сдвиг" суммарная длина всех уравнений уменьшается на величину, среднее которой не меньше p. Так как $p > 0$, среднее время ожидания завершения преобразований, основанных на шагах "редукция + p-сдвиг", будет конечным. Мы получаем рандомизированный вариант алгоритма EG_δ.

Далее можно использовать следующую схему для Singsys: первый раз применяем алгоритм EG_δ так, как описано в разделе 2.2. Затем, не меняя выбранного значения p, несколько раз применяем рандомизированную версию EG_δ. Каждое такое применение может давать новую ведущую матрицу и новый полином. Наибольший общий делитель полученных полиномов будет, возможно, иметь меньшую степень. Завершаем процесс, когда очередное применение не привело к уменьшению степени результата, или когда результат – полином нулевой степени. Это дает рандомизированный вариант алгоритма Singsys.

Пример 12. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ x(x-2) & 0 \end{pmatrix} y'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x+1 & 0 \end{pmatrix} y' + \\ + \begin{pmatrix} 0 & x-2 \\ 0 & -5x+6 \end{pmatrix} y = 0.$$

Примененив EG_δ, получаем

$$\begin{pmatrix} x(x+2)(x-2) & -x(x+2)^3(x-2) \\ x+2 & 0 \end{pmatrix} y''+ \\ + \begin{pmatrix} -x^2-4 & 8(x+2)^2 \\ -1 & (x+2)^2 \end{pmatrix} y'+ \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = 0.$$

Полином $d_1(x) = x(x+2)(x-2)$ является результатом работы алгоритма Singsys. Применение рандомизированного варианта EG_δ с $p = \frac{1}{2}$ позволяет получить еще и другие системы, в частности

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ -x & -x(x+2)(x-1) \end{pmatrix} y''+ \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2(x+2)(2x-1) \end{pmatrix} y'+ \\ + \begin{pmatrix} 0 & x-2 \\ 0 & -2x-4 \end{pmatrix} y = 0. \quad (48)$$

Тогда результатом работы рандомизированного варианта алгоритма Singsys будет полином $d(x) = x(x+2)$, равный наибольшему общему делителю полинома $d_1(x)$ и полинома $d_2(x) = x(x+2)(x-1)$, соответствующего (48), поскольку другие преобразованные системы, получаемые рандомизированным вариантом EG_δ уже не приводят к понижению степени выявляющего полинома (этим преобразованным системам соответствуют полиномы $d_3(x) = x(x+2)(x-1)(x^2+4x-2)$ и $d_4(x) = x(x+2)$, причем $d_4(x)$ в данном случае совпадает с итоговым результатом работы рандомизированного варианта алгоритма Singsys).

9.3. *Эвристика на шаге редукции*

Порядок выбора строк в рассмотренной в разделе 2.4 матрице линейных зависимостей V произволен, поэтому возможны различные эвристические стратегии такого выбора на каждом шаге редукции. В представленной в разделе 11 реализации мы применяем эвристику, нацеленную на уменьшение числа исключений, которые должны проводиться в системе:

1. Из еще неиспользованных строк матрицы V выбирается строка, с помощью которой будет проводиться исключение в уравнении возможно большей длины.
2. Если таких строк больше одной, то из них выбирается строка с наименьшим количеством ненулевых элементов.

Эта эвристика помогает замедлить рост степеней коэффициентов системы при применении EG_δ и EG_σ.

10. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ

Существуют и другие подходы к проблеме преобразования заданной дифференциальной или разностной системы для удобства последующего нахождения решений того или иного вида. Такие подходы предлагались, например, в работах М. Баркату, Т. Клюзо, Э. Пфлюгеля, К. Эль Баши, Ф. Стан ([28], [29], [30], [31], [32], [33]). Вопросы преобразования систем рассматривались также Б. Беккерманом, Г. Лабаном и Х. Ченгом ([34], [35]).

Различные подходы могут проявлять свои преимущества и недостатки по-разному в зависимости от конкретной системы. Пользователь может применять основанные на различных подходах алгоритмы, что увеличивает шанс получить решение в достаточно сложных случаях — иногда одним, иногда другим подходом.

11. ПАКЕТЫ LinearFunctionalSystems И EG

Представленные алгоритмы реализованы в системе компьютерной алгебры Maple ([49]). В ее стандартную версию входит пакет `LinearFunctionalSystems`, в котором содержатся ранние реализации многих из описанных алгоритмов, например, алгоритма EG_σ и алгоритмов поиска различных видов решений дифференциальных, разностных и q-разностных систем. Эти алгоритмы основаны на построении индуцированных рекуррентных систем и соответствующих охватывающих систем с помощью алгоритма EG_σ (когда выполнялась реализация, этот алгоритм назывался EG'). В частности, пользователю Maple доступны следующие процедуры:

- Начиная с версии Maple 7:

`SeriesSolution`: находит решение в виде ряда (начальные члены),

`ExtendSeries`: продлевает решение в виде ряда, начальные члены которого вычислены с помощью `SeriesSolution`,

`PolynomialSolution`: находит полиномиальное решение,

`RationalSolution`: находит рациональное решение,

`UniversalDenominator`: находит универсальный знаменатель.

- Начиная с версии Maple 10:

`RegularSolution`: находит регулярное решение (начальные члены),

`ExtendRegularSolution`: продлевает регулярное решение, начальные члены которого найдены с помощью `RegularSolution`,

`LogarithmicSolution`: находит логарифмическое решение.

Уточним, что найти решение какого-то вида (например, полиномиальное решение) здесь означает найти общее решение этого вида, которое может содержать произвольные постоянные.

Дальнейшее развитие (реализация новых алгоритмов, усовершенствование ранее выполненных реализаций) нами ведется в рамках нового пакета `EG`. Его код и примеры использования доступны по адресу:

http://www.ccas.ru/ca/doku.php/eg .

Этот пакет включает реализацию не входивших в `LinearFunctionalSystems` алгоритмов EG_δ и Singsys, а также алгоритмов вычисления нижних границ валюаций компонент мероморфных решений разностных систем, а также поиска рациональных и рационально-логарифмических решений дифференциальных систем произвольных порядков.

11.1. Эксперименты

Работоспособность алгоритмов EG_σ и EG_δ, а также основанных на них алгоритмов поиска различных видов решений дифференциальных, разностных и q-разностных систем, была подтверждена целым рядом экспериментов ([18], [19], [22], [24]), включавших сравнение с известными альтернативными программами. Эти эксперименты показывают, что наши алгоритмы могут работать с достаточно большими системами.

Таблица 1

	30%	50%
5	3.189	3.578
10	6.468	4.361
20	13.516	11.955
40	29.642	31.875
100	187.375	255.063
250	3305.172	5358.843
500	39183.048	82052.204

Как пример упомянем две серии экспериментов для алгоритма Singsys. Для каждой серии были сгенерированы семь наборов по десять дифференциальных систем в каждом; для каждого набора $m = 10$ и $r = 5, 10, 20, 40, 100, 250, 500$. Коэффициенты всех систем были случайными полиномами (использовалась стандартная команда Maple `randpoly(x)`, то есть коэффициенты полиномов выбирались из диапазона $[-99, 99]$, а их степени не превышали 5); системы генерировались так, что число ненулевых коэффициентов составляло 30% в первой серии, и 50% — во второй. Результаты экспериментов представлены в таблице 1. Каждая ячейка содержит общее время (в секундах), затраченное на построение результирующих полиномов (включая время выполнения EG_δ) для всех систем в соответствующем наборе серии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных разностных и q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Программирование, 1995, № 6, 3–11.

2. *Абрамов С.А.* Элементы компьютерной алгебры линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и q-разностных операторов. М.: МЦНМО, 2012.

3. *Абрамов С.А., Геффар А., Хмельнов Д.Е.* Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы зна-

менателей // Программирование, 2011, № 2, 28–39.

4. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // Фунд. и прикл. мат., 17, 2011/2012, № 1, 3–21.

5. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Знаменатели рациональных решений линейных разностных систем произвольного порядка // Программирование, 2012, № 2, 45–54.

6. *Арнольд В.И.* Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа. М: МЦНМО, 2005.

7. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967.

8. *Кац В.Г., Чен П.* Квантовый анализ. М: МЦНМО, 2005.

9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М: Издательство иностранной литературы, 1958.

10. *Хмельнов Д.Е.* Поиск полиномиальных решений линейных функциональных систем с помощью индуцированных рекурренций // Программирование, 2004, № 2, 8–16.

11. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Физматлит, 1982.

12. *Abramov S.* EG-eliminations // J. of Difference Equations and Applications, 5, 1999, 393–433.

13. *Abramov S., Barkatou M.* Rational solutions of first order linear difference systems // Proc. of ISSAC'98, 1998, 124–131.

14. *Abramov S., Barkatou M., van Hoeij M., Petkovšek M.* Subanalytic Solutions of Linear Difference Equations and Multidimensional Hypergeometric Sequences // J. of Symbolic Computation, 46, 2011, 1205–1228.

15. *Abramov S., Bronstein M.* On solutions of linear functional systems // Proc. of ISSAC'01, 2001, 1–6.

16. *Abramov S.A., Bronstein M.* Linear algebra for skew-polynomial matrices // Rapport de Recherche INRIA, RR-4420, March 2002, `http://www.inria.fr/RRRT/RR-4420.html`.

17. *Abramov S., Bronstein M., Petkovšek M.* On polynomial solutions of linear operator equations // Proc. of ISSAC'95, 1995, 290–295.

18. *Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D.* Regularization of linear recurrence systems // Transactions of the A.M. Liapunov Institute, 4, 2003, 158–171.

19. *Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D.* On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems // Proc. of CASC'05, 2005, 1–12.

20. *Abramov S.A., Gheffar A., Khmelnov D.E.* Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators // Proc.of CASC'10, 2010, 4–18.

21. *Abramov S.A., Gheffar A., Khmelnov D.E.* Rational Solutions of Linear Difference Equations Revisited // Proc. of CASTR'11, 2011, 5–19.

22. *Abramov S.A., Khmelnov D.E.* A note on computing the regular solutions of linear differential systems // Proc. of RWCA'04, 2004, 13–27.

23. *Abramov S., Khmelnov D.* Desingularization of leading matrices of systems of linear ordinary differential equations with polynomial coefficients // International conference "Differential Equations and Related Topics", dedicated to I.G.Petrovskii. Book of Abstracts., 2011, 5–5.

24. *Abramov S., Khmelnov D.* On valuations of meromorphic solutions of arbitrary-order linear difference systems with polynomial coefficients // Proc. of ISSAC'12, 2012, 12–19.

25. *Abramov S., Petkovšek M.* Special power series solutions of linear differential equations // Proc. of FPSAC'96, 1996, 1–7.

26. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Mathematics, 1997, 1–8.

27. *Andrews G.E.* q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra. CBMS Regional Conference Series, 1986, № 66.

28. *Barkatou M.* Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe // PhD Thesis, INPG, Grenoble France, 1989.

29. *Barkatou M.* Rational solutions of matrix difference equations: problem of equivalence and factorization // Proc. of ISSAC'99, 1999, 277–282.

30. *Barkatou M.A.* On rational solutions of systems of linear differential equations // J. of Symbolic Computation, 28, 1999, 547–567.

31. *Barkatou M.A., El Bacha C., Cluzeau T.* Simple forms of higher-order linear differential systems and their applications in computing regular solutions // J. of Symbolic Computation, 46, 2011, 633–658.

32. *Barkatou M.A., El Bacha C., Pflügel E.* Simultaneously row- and column-reduced higher-order linear differential systems // Proc. of ISSAC'10, 2010, 45–52.

33. *Barkatou M., Pflügel E.* An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations // J. of Symbolic Computation, 28, 1999, 569–587.

34. *Beckermann B., Cheng H., Labahn G.* Fraction-free row reduction of matrices of squew polynomials // Proc. of ISSAC'02, 2002, 8–15.

35. *Beckermann B., Cheng H., Labahn G.* Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials // J. of Symbolic Computation, 41, 2006, 513–543.

36. *Cope F.T.* Formal solutions of irregular differential equations // Am. J. Math., 58, 1936, 130–149.

37. *Davies P., Cheng H., Labahn G.* Computing Popov form of general Ore polynomial matrices // Proc. of Milestones in Computer Algebra (MICA), 2008, 149–156.

38. *Frobenius G.* Über die Integration der linearen Differentialgleichungen mit veränder Koefficienten // J. für die reine und angewandte Mathematik, 76, 1873, 214–235.

39. *Gheffar A., Abramov S.* Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials // Adv. in Appl. Maths., 47, 2011, 352–364.

40. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen // Teubner, Leipzig, 1894.

41. *Hilali A., Wazner A.* Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires // Num. Math., 50, 1987, 429-449.

42. *van Hoeij M.* Rational solutions of linear difference equations // Proc. of ISSAC'98, 1998, 120–123.

43. *van der Hoeven J.* Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities // J. of Symbolic Computation, 31, 2001, 717–743.

44. *McClellan M.* The exact solution of systems of linear equations with polynomial coefficients // J. of the ACM, 20, 1973, 563–588.

45. *Mulders T., Storjohann A.* Rational solutions of singular linear systems // Proc. of ISSAC'00, 2000, 242–249.

46. *Ore O.* Theory of non-commutative polynomials // Annals of Mathematics, 34, 1933, 480–508.

47. *Poole E.* Introduction to the Theory of Linear Differential Equations // Dover Publications Inc., New York, 1960.

48. *Quere M.P., Villard G.* An algorithm for the reduction of linear DAE // Proc. of ISSAC'95, 1995, 223–231.

49. Maple online help // http://www.maplesoft.com/support/help/