Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы знаменателей *

С. А. Абрамов
Вычислительный центр РАН
Москва, 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
sergeyabramov@mail.ru

А. Геффар
Лиможский университет, XLIM, CNRS,
123, ав. А. Тома, 87060 Лимож, Франция
f_gheffar@yahoo.fr

Д. Е. Хмельнов
Вычислительный центр РАН
Москва, 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
dennis_khmelnov@mail.ru

Аннотация

Исследуются сложности некоторых известных алгоритмов поиска рациональных решений линейных разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

1 Введение

Поиск рациональных решений (т.е. решений, имеющих вид рациональных функций) линейных разностных уравнений входит как часть во многие компьютерно-алгебраические алгоритмы. Исследования путей построения таких решений представляют интерес для компьютерной алгебры.

Пусть k — поле характеристики 0. Мы будем рассматривать уравнения вида

$$y(x+n) + a_{n-1}(x)y(x+n-1) + \cdots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

$\varphi(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x) \in k(x)$, $a_0(x) \in k(x) \setminus \{0\}$. Если избавиться от знаменателей, то уравнение приобретет вид

$$b_n(x)y(x+n) + \cdots + b_1(x)y(x+1) + b_0(x)y(x) = \psi(x), \tag{2}$$

$\psi(x), b_1(x), \ldots, b_{n-1}(x) \in k[x]$, $b_0(x), b_n(x) \in k[x] \setminus \{0\}$. Последнее уравнение мы довольно часто будем записывать как $L(y) = \psi(x)$ с оператором

$$L = b_n(x)\phi^n + \cdots + b_1(x)\phi + b_0(x), \quad \phi(y(x)) = y(x+1). \tag{3}$$

Запись $f(x) \perp g(x)$ будет обозначать взаимную простоту полиномов $f(x), g(x) \in k[x]$; если $F(x) \in k(x)$, то $\mathrm{den}F(x)$ представляет собой нормированный (со старшим коэффициентом 1) полином такой, что $F(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{den}F(x)}$ для некоторого $f(x) \in k[x], f(x) \perp \mathrm{den}F(x)$.

*Частичная поддержка РФФИ, грант 10-01-00249-а и ECONET, грант 21315ZF.

Множество нормированных неприводимых полиномов из $k[x]$ будет обозначаться через $\mathrm{Irr}(k[x])$. Если $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$, $f(x) \in k[x]$, то $\mathrm{val}_{p(x)} f(x)$ определяется как максимальное $m \in \mathbb{N}$ такое, что $p^m(x)|f(x)$ ($\mathrm{val}_{p(x)} 0 = \infty$), и $\mathrm{val}_{p(x)} F(x) = \mathrm{val}_{p(x)} f(x) - \mathrm{val}_{p(x)} g(x)$ для $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x), g(x) \in k[x]$.

Первый алгоритм построения всех рациональных решений уравнений вида (2) был предложен в [2]. Позднее появился алгоритм [3], а за ним еще ряд алгоритмов [5, 11, 8, 10, 7] (эти последние применимы как в скалярном случае, так и в случае систем линейных уравнений). Все известные алгоритмы поиска рациональных решений описываются схемой, которую мы будем называть схемой RS:

RS1: Построить рациональную функцию $S(x)$ над k такую, что любое рациональное над k решение исходного уравнения может быть представлено как $S(x)f(x)$ с $f(x) \in k[x]$.

RS2: Преобразовать исходное уравнение в такое уравнение (тоже с полиномиальными коэффициентами и правой частью), что $f(x) \in k[x]$ является решением преобразованного уравнения если и только если $S(x)f(x)$ является решением исходного уравнения.

RS3: Построить все полиномиальные решения преобразованного уравнения.

Каждая рациональная функция $S(x)$, которая обладает указанным в RS1 свойством, называется *границей знаменателей* для исходного уравнения.

Если выделить задачу построения границы знаменателей из общей задачи построения рациональных решений, т.е. рассмотреть шаг RS1, то, прежде всего, надо упомянуть, что алгоритмы из [2, 3, 5, 8, 10, 7] строят $S(x)$ в виде $\frac{1}{U(x)}$, где $U(x)$ — полином над k, называемый *универсальным знаменателем* для уравнения (2). Алгоритм из [11] строит рациональную функцию, которую мы будем обозначать через $R(x)$. Числитель функции $R(x)$ может иметь положительную степень, и в таком случае числитель любого рационального решения исходного уравнения делится на числитель функции $R(x)$.

Наиболее старый алгоритм, описанный в [2], является самым медленным, и мы в дальнейшем его рассматривать не будем. Предложенный в [10] алгоритм $\mathbf{A}_U$ построения универсальных знаменателей был усовершенствован в [7], и там же было показано, что новый вариант $\mathbf{A}'_U$ этого алгоритма имеет меньшую сложность, чем алгоритмы из [3, 5, 8]. Он имеет также меньшую сложность, чем $\mathbf{A}_U$. Алгоритмы $\mathbf{A}_U, \mathbf{A}'_U$ и алгоритмы из [3, 5, 8] находят один и тот же универсальный знаменатель $U(x)$. Алгоритм из [11] в более общем виде был представлен в [10] (вместо комплексных полюсов рациональных функций над $\mathbb{C}$ рассматриваются неприводимые делители знаменателей рациональных функций над произвольным полем k характеристики 0).

Используя один из алгоритмов $\mathbf{A}_U, \mathbf{A}'_U, \mathbf{A}_B$ на шаге RS1 и привлекая на шаге RS3 какой-то (один и тот же) алгоритм поиска полиномиальных решений, например, один из алгоритмов, предложенных в [1, 6, 5, 8], мы получаем алгоритмы $\langle \mathbf{A}_U \rangle$, $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ построения всех рациональных решений. В разделе 3 мы покажем, что при естественных предположениях относительно используемого алгоритма поиска полиномиальных решений сложность алгоритма $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ больше сложности алгоритма $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$. Доказанное будет подтверждено экспериментальной проверкой (раздел 4). Это позволит сделать вывод о предпочтительности $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ среди рассматриваемых алгоритмов поиска рациональных решений.

Заключительный раздел 5 касается систем вида

$$Y(x+1) = A(x)Y(x), \tag{4}$$

$Y(x) = (Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x))^T$, $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathrm{Mat}_n(k(x))$. Предполагается, что существует обратная матрица $A^{-1}(x) = (\tilde{a}_{ij}(x)) \in \mathrm{Mat}_n(k(x))$. Если изначально была задана система $Y(x+1) = A(x)Y(x) + G(x)$, в которой матрица $A(x)$ такая же, как в (4), и $G(x) \in k(x)^n$, то, добавляя к $Y(x)$ компоненту с номером $n+1$ и со значением 1, мы можем преобразовать заданную систему в однородную систему с обратимой матрицей, принадлежащей $\mathrm{Mat}_{n+1}(k(x))$ (см., например, [11]). Поэтому мы ограничиваемся случаем однородных систем. Рассматриваются модифицированные алгоритмы $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, $\langle \mathbf{A}_B \rangle$, предназначенные для поиска рациональных решений

$$Y(x) = (Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x))^T, \;\; Y_i(x) \in k(x), \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

систем. Приводятся доводы в пользу модификации $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ в сравнении с модификацией $\langle \mathbf{A}_B \rangle$.

2 Предварительные сведения

2.1 Множество M

В алгоритмах $\mathbf{A}_U$, $\mathbf{A}'_U$ и $\mathbf{A}_B$ шаг RS1 начинается с построения конечного множества M таких неприводимых полиномов, что если для какого-то рационального решения $y(x)$ исходного уравнения и $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$ выполнено $\mathrm{val}_{p(x)} y(x) < 0$, то $p(x) \in M$ ([10]). Это множество кандидатов в неприводимые делители знаменателей рациональных решений строится исходя из полиномов

$$V(x) = b_n(x-n), \;\; W(x) = b_0(x) \tag{6}$$

(см. (2)). Если $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$, $f(x) \in k[x] \setminus \{0\}$, то можно рассматривать конечное множество

$$\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = \{m \in \mathbb{Z} \,:\, p(x+m) | f(x)\}. \tag{7}$$

Для случая $\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = \varnothing$ полагаем $\max \mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = -\infty$, $\min \mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = +\infty$. Множество M определяется как

$$M = \left\{ p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x]) \,:\, \min \mathcal{N}_{p(x)}(W(x)) \leqslant 0, \;\; \max \mathcal{N}_{p(x)}(V(x)) \geqslant 0 \right\}.$$

При построении M сначала находится полная факторизация полиномов $V(x), W(x)$, затем находится конечное множество $Q \subset \mathrm{Irr}(k[x])$ такое, что $q(x) \in Q$ если и только если

$$\min \mathcal{N}_{q(x)}(W(x)) = 0, \;\; \max \mathcal{N}_{q(x)}(V(x)) \geqslant 0.$$

Пусть $Q \neq \varnothing$ и $Q = \{q_1(x), q_2(x), \ldots, q_s(x)\}$, $s \geqslant 1$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant s$ рассмотрим

$$M_{q_i(x)} = \{q_i(x), q_i(x+1), \ldots, q_i(x+d_i)\}, \tag{8}$$

где

$$d_i = \max \mathcal{N}_{q_i(x)}(V(x)). \tag{9}$$

Получаем

$$M = \bigcup_{i=1}^{s} M_{q_i(x)}. \tag{10}$$

В [11] вместо M рассматривается другое множество кандидатов, названное там $\bar{S}$. В [10] показано, что $M \subseteq \bar{S}$ при $k = \mathbb{C}$, и что часто M является собственным подмножеством множества $\bar{S}$.

Число

$$d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_s\} \tag{11}$$

совпадает с *дисперсией* $\mathrm{dis}\,(V(x), W(x))$ полиномов (6), т.е. с наибольшим целым m, для которого $\deg \gcd(V(x), W(x+m)) > 0$; если таких целых нет, то по определению $\mathrm{dis}\,(V(x), W(x)) = -\infty$.

2.2 Алгоритмы $\mathbf{A}_U$ и $\mathbf{A}'_U$

Для каждого $q_t(x+j) \in M$ алгоритм $\mathbf{A}_U$ вычисляет

$$\gamma_{j,t} = \min\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{q_t(x+j+i)} V(x),\ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{q_t(x+j-i)} W(x)\right\}, \tag{12}$$

и находит затем

$$U(x) = \prod_{\substack{1\leqslant t\leqslant s\\ 0\leqslant j\leqslant d_t}} q_t^{\gamma_{j,t}}(x+j). \tag{13}$$

Полином $U(x)$ — универсальный знаменатель для уравнения (2): любое решение $y(x) \in k(x)$ может быть представлено как $\frac{f(x)}{U(x)}$, $f(x) \in k[x]$; рациональная функция $\frac{1}{U(x)}$ является, тем самым, границей знаменателей для этого уравнения.

Алгоритм $\mathbf{A}'_U$ отличается от $\mathbf{A}_U$ тем, что учитывает возможность равенства показателей $\gamma_{j,t}$ для различных (иногда многих) j при фиксированном t; к опирающимся на формулу (12) арифметическим вычислениям алгоритм $\mathbf{A}'_U$ прибегает только когда $q_t(x+j)$ делит $V(x)$ или $W(x)$.

2.3 Алгоритм $\mathbf{A}_B$

Алгоритм $\mathbf{A}_B$ использует возможность построения для положительных целых N (с помощью сдвигов уравнения (1) и гауссовых исключений) уравнений

$$y(x) = v_{N,\,n-1}(x)y(x-N) + \cdots + v_{N,\,0}(x)y(x-N-n+1) + v_{N,\,-1}(x), \tag{14}$$

$$y(x) = w_{N,\,n-1}(x)y(x+N) + \cdots + w_{N,\,0}(x)y(x+N+n-1) + w_{N,\,-1}(x), \tag{15}$$

$v_{N,\,-1}(x), v_{N,0}(x), \ldots, v_{N,n-1}(x), w_{N,\,-1}(x), w_{N,0}(x), \ldots, w_{N,n-1}(x) \in k(x)$, $N = 1, 2, \ldots, d+1$ (см. (11)), которым удовлетворяют все рациональные решения исходного уравнения. Например, при переходе в (14) от N к $N+1$ используется исключение $y(x-N)$ с помощью сдвинутого уравнения (1), записанного в виде

$$\begin{array}{l} y(x-N) + a_{n-1}(x-n-N)y(x-N-1) + \ldots \\ \cdots + a_0(x-n-N)y(x-n-N) - \varphi(x-n-N) = 0. \end{array}$$

Пусть $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$ и N — положительное целое. Определим $B(p(x), N)$ как минимум значений функции $\mathrm{val}_{p(x)}$ для всех коэффициентов $v_{N,\,-1}(x), v_{N,\,0}(x), \ldots, v_{N,\,n-1}(x)$, входящих в (14), и, аналогично, определим $B(p(x), -N)$ как минимум значений функции $\mathrm{val}_{p(x)}$ для всех коэффициентов $w_{N,\,-1}(x), w_{N,\,0}(x), \ldots, w_{N,\,n-1}(x)$, входящих в (15). Алгоритм $\mathbf{A}_B$ последовательно строит уравнения (14) для $N = 1, 2, \ldots, d+1$ и для каждого t такого, что $1 \leqslant t \leqslant s$ и $d_t \geqslant N-1$ находит $B(q_t(x+d_t-N+1), N)$; это дает *левостороннюю* нижнюю границу для каждого значения $\mathrm{val}_{q_t(x+d_t-N+1)} y(x)$. Сходным образом алгоритм строит уравнения (15) для $N = 1, 2, \ldots, d+1$ и для каждого t такого, что $1 \leqslant t \leqslant s$ и $d_t \geqslant N-1$ находит $B(q_t(x+N-1), -N)$, это дает *правостороннюю* нижнюю границу для каждого значения $\mathrm{val}_{q_t(x+N-1)} y(x)$. Из двух нижних границ для $\mathrm{val}_{q_t(x+j)} y(x)$, $t = 1, 2, \ldots, s$, $j = 0, 1, \ldots, d_t$, берется максимальная, которая обозначается через $\beta_{j,t}$. Рациональная функция

$$R(x) = \prod_{\substack{1\leqslant t\leqslant s\\ 0\leqslant j\leqslant d_t}} q_t^{\beta_{j,t}}(x+j) \tag{16}$$

дает границу знаменателя.

2.4 Определяющее уравнение в ∞

Шаг RS2 состоит в построении операторного произведения LS и в последующем избавлении от знаменателей в уравнении $(LS)(y) = \psi(x)$. Это приводит к уравнению

$$K(y) = g(x) \tag{17}$$

с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью. Равенство $L(S(x)f(x)) = \psi(x)$ выполняется если и только если $K(f(x)) = g(x)$.

Обсуждение шага RS3 нуждается в предварительном комментарии. Оператору L сопоставляется алгебраическое уравнение $I(\lambda) = 0$, называемое *определяющим уравнением в* ∞ Мы будем говорить просто об определяющем уравнении, в нашем контексте это не будет приводить к недоразумениям. Основное свойство уравнения $I(\lambda) = 0$ состоит в том, что если уравнение $L(y) = 0$ имеет решение $S(x) = \frac{s_1(x)}{s_2(x)}$, $s_1(x), s_2(x) \in k[x]$, то целое число

$$\mathrm{val}_\infty S(x) = \deg s_1(x) - \deg s_2(x)$$

является корнем определяющего уравнения ([9]). В частности, если $f(x)$ является полиномиальным решением уравнения $L(y) = 0$, то $\deg f(x)$ будет корнем определяющего уравнения, так как в этом случае $\mathrm{val}_\infty f(x) = \deg f(x)$.

Для построения $I(\lambda)$ нужно предварительно записать L по степеням $\Delta = \phi - 1$, сделав, например, подстановку $\phi = \Delta + 1$ в L. Для оператора

$$L = b_n(x)\phi^n + \cdots + b_1(x)\phi + b_0(x) = c_n(x)\Delta^n + \cdots + c_1(x)\Delta + c_0(x)$$

полагаем

$$\omega = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} (\deg c_j - j), \quad I(\lambda) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ \deg c_j - j = \omega}} \mathrm{lc}(c_j)\lambda^{\underline{j}}, \tag{18}$$

где $\lambda^{\underline{j}} = \lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - j + 1)$. Число ω назовем *инкрементом* оператора L. Очевидно, что

$$c_j(x) = \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} b_i(x). \tag{19}$$

Известно (см., например, [13]), что если уравнение $L(y) = \psi(x)$, $\psi(x) \in k[x]$, имеет полиномиальное решение, то степень этого решения не превосходит

$$h = \max\{\deg \psi - \omega, \ \tilde{\lambda}\}, \tag{20}$$

где $\tilde{\lambda} = \max(\{d \in \mathbb{N} : I(d) = 0\} \cup \{-\infty\})$. Будем называть h *высотой* уравнения $L(y) = \psi(x)$.

Для нахождения высоты уравнения (17) на шаге RS3 нам потребуется определяющее уравнение оператора K, и, разумеется, такое уравнение может быть построено исходя непосредственно из K. Здесь уместно отметить простую связь между определяющим уравнением $I(\lambda) = 0$ оператора L и определяющим уравнением $\bar{I}(\lambda) = 0$ оператора K: с точностью до ненулевого постоянного множителя полином $\bar{I}(\lambda)$ совпадает с $I(\lambda + \mathrm{val}_\infty S(x))$ ([9]). Мы воспользуемся этим в разделе 3. Добавим еще, что домножение оператора слева на ненулевой полином $u(x)$ увеличивает инкремент оператора на $\deg u(x)$, а соответствующий оператору полином $I(\lambda)$ домножается на $\mathrm{lc}\, u(x)$. Из этого следует, что домножение уравнения $L(y) = \psi(x)$, $\psi(x) \in k[x]$, на ненулевой полином не изменяет высоты уравнения.

2.5 Алгоритмы $\langle \mathbf{A}_U \rangle$, $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, $\langle \mathbf{A}_B \rangle$

Если при построении уравнения (17) используется $S(x) = \frac{1}{U(x)}$, и при этом полином $U(x)$ получен с помощью $\mathbf{A}_U$, то равнение (17) называется U-*образом* исходного уравнения $L(y) = \psi$, а если используется полученная с помощью $\mathbf{A}_B$ рациональная функция $R(x)$, то соответственно B-*образом* этого уравнения.

Мы будем предполагать, что привлекаемый на шаге RS3 алгоритм поиска всех полиномиальных решений уравнения (17) первоначально вычисляет высоту этого уравнения, а затем разыскивает все полиномиальные решения, опираясь на то, что их степени не превосходят найденной высоты. Таковы, во всяком случае, все известные авторам этой статьи алгоритмы (простейший из них — метод неопределенных коэффициентов). Заметим еще, что уравнение может не иметь полиномиальных решений. В общем случае при неотрицательной высоте уравнения на обнаружение отсутствия полиномиальных решений тратится столько же времени, сколько на их построение при их существовании.

Как было сказано в разделе 1, обозначения $\langle \mathbf{A}_U \rangle, \langle \mathbf{A}'_U \rangle, \langle \mathbf{A}_B \rangle$ используются нами для алгоритмов построения рациональных решений, привлекающих на шаге RS1 соответственно алгоритмы $\mathbf{A}_U, \mathbf{A}'_U, \mathbf{A}_B$.

Примечание 1. *Большинство уравнений не имеет рациональных решений. Но при использовании схемы RS их отсутствие обнаруживается только на шаге RS3, когда предыдущие два шага выполнены до конца. В [9] показано, что для однородных уравнений (с нулевым полиномом $\psi(x)$ в (2)) отсутствие рациональных решений во многих случаях может быть предсказано значительно раньше. Мы не будем останавливаться на этом: в связи с исследованием сложности рассматриваемых алгоритмов нас интересуют, в основном, худшие случаи.*

3 Сравнение сложностей алгоритмов поиска рациональных решений

В [10] был введен в рассмотрение комбинированный размер уравнения и было установлено, что для любого фиксированного размера s можно указать такое уравнение E_s, что его U-образ есть некоторый полином $U(x)$, который имеет наибольшую степень среди всех U-образов уравнений размера s, и при этом B-образ уравнения E_s имеет вид $\frac{1}{U(x)}$. С одной стороны, это опровергает возможное предположение, что большие затраты алгоритма $\mathbf{A}_B$ на шаге RS1 всегда будут компенсированы тем, что затраты на шаге RS3 окажутся незначительными, и общие затраты $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ никогда не превзойдут общих затрат алгоритма $\langle \mathbf{A}_U \rangle$. Но с другой стороны, установленный в [10] факт *не* означает, что сложность алгоритма $\langle \mathbf{A}_U \rangle$ меньше, чем сложность алгоритма $\langle \mathbf{A}_B \rangle$, так как нет оснований утверждать, что уравнение E_s представляет худший случай для $\langle \mathbf{A}_U \rangle$: априори возможно, что для другого уравнения E'_s того же размера s алгоритм $\langle \mathbf{A}_U \rangle$ на шаге RS1 построит полином $U'(x)$, может быть, и меньшей степени, чем $U(x)$, но такой, что для соответствующего U-образа поиск полиномиальных решений (шаг RS3) потребует очень больших затрат (например, из-за того, что высота U-образа будет очень большой).

Ниже в этой статье мы показываем, что при некоторых естественных предположениях относительно привлекаемого на шаге RS3 алгоритма поиска полиномиальных решений, сложность алгоритма $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, который является вариантом алгоритма $\langle \mathbf{A}_U \rangle$, меньше сложности $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ (понятие размера при этом уточняется). Мы также даем некоторую нижнюю оценку разности этих сложностей.

Пусть в уравнении $L(y) = \psi(x)$ оператор L имеет вид (3). Положим $l = \max\{\deg b_0(x), \deg b_1(x), \ldots, \deg b_n(x)\}$, d определим как соответствующую дисперсию (см.

(11)), n будет обозначать $\operatorname{ord} L$, а h будет равно высоте (20) уравнения. Назовем четверку (l,d,n,h) *размером* (более полно: комбинированным размером) уравнения $L(y)=\psi(x)$. В дальнейшем в этом разделе без оговорок мы рассматриваем только случаи, когда $d \geqslant 0$. Для компонент размера U-образа введем обозначения l_U, d_U, n_U, h_U (сразу можно заметить, что $n_U = n$). Дополнительное обозначение r_U будет использоваться для степени правой части U-образа; считая, что U-образ имеет вид (17), имеем $r_U = \deg g(x)$.

Обозначим через $\mathcal{S}_{l,d,n,h}$ множество всех уравнений размера (l,d,n,h). Из алгоритмов $\mathbf{A}_U$, $\mathbf{A}_B$ довольно легко усматривается, что если $U(x)$ и $R(x)$ суть результаты применения этих алгоритмов к некоторому уравнению из $\mathcal{S}_{l,d,n,h}$, то $\deg U(x) \leqslant l(d+1)$ и $\deg \operatorname{den} R(x) \leqslant l(d+1)$.

Лемма 1. *Пусть уравнение $L(y)=\psi(x)$ имеет размер (l,d,n,h). Тогда*

(i) множество M для этого уравнения (см. раздел 2.1) имеет не более $l(d+1)$ элементов и

$$h_U \leqslant hl+(d+1), \quad l_U \leqslant l(n-1), \quad r_U \leqslant h+l(d+n);$$

(ii) высота уравнения

$$\begin{gathered} f(x+n+d)y(x+n)+(x+1)^l y(x+n-1)+\dots \\ \dots+(x+1)^l y(x+1)+f(x)y(x)=(x+1)^{h+l}, \end{gathered} \tag{21}$$

где

$$f(x)=\prod_{t=1}^{l}\left(x+\frac{1}{t+1}\right),$$

равна h (тем самым это уравнение имеет размер (l,d,n,h)), множество M, построенное для этого уравнения, имеет $l(d+1)$ элементов, универсальный знаменатель $U(x)$, получаемый алгоритмом $\mathbf{A}'_U$, имеет степень $l(d+1)$ и

$$h_U = h+l(d+1), \quad r_U = h+l(d+n),$$

при этом степень каждого из коэффициентов левой части U-образа равна $l(n-1)$.

Доказательство. (i) То, что M имеет не более $l(d+1)$ элементов, следует из структуры множества (10).

Пусть $G(x)$ — наименьшее общее кратное знаменателей коэффициентов оператора $L\frac{1}{U(x)}$ и, как обычно, L имеет вид (2). Пусть

$$s=\min\{\deg\gcd(U(x),b_0(x)),\ \deg\gcd(U(x),b_n(x-n))\}.$$

Тогда

$$\deg\operatorname{den}\frac{b_0(x)}{U(x)} \leqslant \deg U(x)-s, \quad \deg\operatorname{den}\frac{b_n(x)}{U(x+n)} \leqslant \deg U(x)-s$$

и $\deg U(x) \leqslant s(d+1)$. Отсюда $\deg G(x) \leqslant \deg U(x)+ns-2s \leqslant s(d+n-1) \leqslant l(d+n-1)$. Получаем $l_U \leqslant l+\deg G(x)-\deg U(x) \leqslant l(n-1)$.

Из определения высоты уравнения $L(y)=\psi(x)$ выводится

$$\deg\psi(x) \leqslant h+\omega \leqslant h+l, \tag{22}$$

отсюда и из $\deg G(x) \leqslant l(d+n-1)$ следует $r_U \leqslant h+l(d+n)$.

При избавлении от знаменателей в уравнении $\left(L\frac{1}{U(x)}\right)(y)=\psi(x)$ мы можем начать с домножения обеих частей этого уравнения на $G(x)$. Это дает уравнение $L'(y)=\psi'(x)$,

$\deg\psi'(x) = \deg\psi(x) + \deg G(x)$. Инкремент ω' оператора L' равен $\omega + \deg G(x) - \deg U(x)$. Как уже отмечалось в разделе 2.4, полином $I'(\lambda)$, построенный для оператора L', с точностью до ненулевого постоянного множителя совпадает с $I(\lambda + \mathrm{val}_\infty \frac{1}{U(x)})$, т.е. с $I(\lambda - \deg U(x))$. Поэтому

$$\omega' = \omega + \deg G(x) - \deg U(x), \quad \deg\psi'(x) = \deg\psi(x) + \deg G(x),$$

$$\tilde\lambda' = \tilde\lambda + \deg U(x),$$

где $\tilde\lambda' = \max(\{d \in \mathbb{N} : I'(d) = 0\} \cup \{-\infty\})$. Высота уравнения $L'(y) = \psi'(x)$ равна

$$\max\{\deg\psi'(x) - \omega', \ \ \tilde\lambda'\} = h + \deg U(x)$$

и не превосходит, тем самым, $h + l(d+1)$. Заметим, что уравнение $L'(y) = \psi'(x)$ может отличаться от U-образа уравнения $L(y) = \psi(x)$ только ненулевым полиномиальным множителем. Домножение на такой множитель не меняет высоту уравнения, об этом говорилось в конце раздела 2.4. Поэтому $d_U \leqslant h + l(d+1)$.

(ii) Легко видеть, что для уравнения (21) множество M имеет $l(d+1)$ элементов и универсальный знаменатель $U(x)$, получаемый алгоритмом $\mathbf{A}'_U$, имеет степень, равную $l(d+1)$. Исходя из этого оставшаяся часть утверждения проверяется непосредственно. □

Далее мы рассматриваем сложности $T_B(l,d,n,h)$ и $T_U(l,d,n,h)$ алгоритмов $\langle\mathbf{A}_B\rangle$ и $\langle\mathbf{A}'_U\rangle$ по числу операций в поле k в худшем случае. Легко видеть, что если исключить h из числа входящих в комбинированный размер компонент, оставив только l, d, n, то сложность каждого из двух алгоритмов будет равна ∞, так как при заданных l, d, n высота уравнения может быть любой, и тем самым затраты на шаге RS3 могут быть сколь угодно большими. Присутствие компоненты h эту возможность исключает. Добавим еще, что для правой части $\psi(x)$ мы имеем (22), и поэтому затраты на построение каждого из уравнений вида (14), (15) ограничены при фиксированном размере исходного уравнения.

Множество тех уравнений размера (l,d,n,h), которые среди всех уравнений из $\mathcal{S}_{l,d,n,h}$ требуют наибольших затрат на построение полиномиальных решений (или обнаружение их отсутствия) соответствующего U-образа, обозначим через $\mathcal{U}_{l,d,n,h}$. Это множество может состоять более, чем из одного уравнения.

Теорема 1. *Пусть используемый алгоритм поиска полиномиальных решений таков, что уравнение (21) для любых допустимых значений l, d, n, h принадлежит $\mathcal{U}_{l,d,n,h}$. Тогда для сложностей $T_B(l,d,n,h)$, $T_U(l,d,n,h)$ алгоритмов $\langle\mathbf{A}_B\rangle$, $\langle\mathbf{A}'_U\rangle$ выполняется неравенство $T_B(l,d,n,h) > T_U(l,d,n,h)$, при этом $T_B(l,d,n,h) - T_U(l,d,n,h) = \Omega(dln)$.*[1]

Перед доказательством теоремы отметим, что сделанное допущение относительно принадлежности уравнения (21) множеству $\mathcal{U}_{l,d,n,h}$, т.е. допущение, что применительно к этому уравнению выполнение этапа RS3 алгоритма $\langle\mathbf{A}'_U\rangle$ требует максимальных затрат, является вполне естественным. Мы не уточняем, какой именно из алгоритмов привлекается для поиска полиномиальных решений, но по предположению из раздела 2.5 этот алгоритм использует высоту уравнения как границу степеней решений. Согласно лемме 1 высота U-образа уравнения (21) максимально велика, а сам U-образ максимально "громоздок" в сравнении с U-образами других уравнений из $\mathcal{S}_{l,d,n,h}$.

Доказательство теоремы. Множество M для уравнения (21) имеет наибольшее возможное число элементов. Число тех элементов множества M, которые являются делителями $V(x)$ или $W(x)$ равно $2l$, т.е. тоже достигает наибольшего возможного значения (см.

[1]Мы прибегаем к принятой в теории сложности Ω-нотации, применяемой для описания асимптотических нижних границ (тогда как O-нотация используется для описания асимптотических верхних границ), — см., например, [12], [4, §2].

последний абзац раздела 2.2). Поэтому затраты алгоритма $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ на этапе RS1 при применении к (21) достигают наибольшего возможного значения. Исходя из этого, а также из предположения, что уравнение (21) принадлежит множеству $\mathcal{U}_{l,d,n,h}$, заключаем, что уравнение (21) как вход алгоритма $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ соответствует худшему случаю. Разность $T_B(l,d,n,h) - T_U(l,d,n,h)$ не меньше разности затрат на построение всех рациональных решений уравнения (21) с помощью $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ и соответственно $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$. Применение $\mathbf{A}_B$ к (21) дает $R(x) = \frac{1}{U(x)}$, где $U(x)$ — универсальный знаменатель, получаемый алгоритмом $\mathbf{A}'_U$. Это выводится из того, что

$$v_{N,\,-1}(x) = \frac{(x-n-N+2)^{h+2}}{f(x+d-N+1)}$$

в (14), и в данном случае для каждого $p(x) \in M$ выполнено

$$\mathrm{val}_{p(x+d-N+1)} v_{N,\,-1}(x) = -1.$$

Поэтому затраты на шаге RS3 для обоих алгоритмов применительно к (21) одинаковы. Рассмотрим построение полинома $U(x)$ алгоритмом $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и рациональной функции $\frac{1}{U(x)}$ алгоритмом $\langle \mathbf{A}_B \rangle$. Мы будем для простоты считать, что вычисление каждого $\gamma_{j,t}$ в (13) совпадает по затратам с вычислением $\beta_{j,t}$ в (16), коль скоро уже построены уравнения (14), (15), необходимые алгоритму $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ (хотя, как показано в [7], затраты алгоритма $\mathbf{A}'_U$ на вычисление показателей очень невелики).

В силу того, что при записи уравнения (21) в виде (1) все $a_i(x)$ и $\varphi(x)$ имеют числители и знаменатели степени l, мы получаем, что если, например, уравнение (14) построено для некоторого $1 \leqslant N \leqslant d+1$, то при построении аналогичного уравнения для $N+1$ только на очередной сдвиг уравнения (1) понадобится $\Omega(nl)$ операций в поле k. Алгоритм $\mathbf{A}_B$ строит такие уравнения для $N = 1, 2, \ldots, d+1$, откуда следует требуемое. □

Примечание 2. *Доказанное утверждение о разности $T_B(l,d,n,h) - T_U(l,d,n,h)$ может быть, по-видимому, существенно усилено. В выводе оценки $T_B(l,d,n,h) - T_U(l,d,n,h) = \Omega(ldn)$ нами никак не учитывалось "распухание"коэффициентов уравнений (14), (15) при увеличении N, благодаря которому при фиксированных n, l и при увеличении d разность $T_B(l,d,n,h) - T_U(l,d,n,h)$ растет быстрее, чем d. Но мы ставили себе цель лишь показать, что разность $T_B(l,d,n,h) - T_U(l,d,n,h)$ положительна и что она возрастает при увеличении каждой из компонент n, l, d размера уравнения.*

4 Экспериментальное сравнение

Нами также проведено экспериментальное сравнение алгоритмов $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$. Для этого они реализованы нами в системе компьютерной алгебры Maple ([14]). На шаге RS1 реализация алгоритма $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ использует реализацию алгоритма $\mathbf{A}'_U$, описанную в [7], а реализация алгоритма $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ — реализацию алгоритма $\mathbf{A}_B$, выполненную специально для целей этого сравнения согласно описанию в разделе 2.3. На шаге RS3 реализации обоих алгоритмов $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ используют процедуру `polysols` из стандартного пакета `LREtools` системы Maple, предназначенную для поиска полиномиальных решений разностных уравнений.

Было проведено три эксперимента.

4.1 Эксперимент 1

В первом эксперименте были использованы уравнения вида (21) из леммы 1. Всего в эксперименте было использовано 27 уравнений — для всех уравнений $h = 6$, а остальные параметры принимали по 3 различных значения: $n = 3, 6, 9$, $l = 2, 4, 6$, $d = 5, 10, 15$. Каждое уравнение решалось с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$. В таблице 1 приведены результаты этого эксперимента.

Таблица 1: Результаты эксперимента 1

n	l	d=5	d=10	d=15
3	2	0.546 - 0.141 = 0.405 (0.081)	1.438 - 0.125 = 1.313 (0.131)	2.796 - 0.203 = 2.593 (0.173)
3	4	1.359 - 0.235 = 1.124 (0.225)	4.188 - 0.375 = 3.813 (0.381)	9.594 - 0.812 = 8.782 (0.585)
3	6	2.703 - 0.375 = 2.328 (0.466)	10.172 - 0.969 = 9.203 (0.920)	24.937 - 1.734 = 23.203 (1.547)
6	2	0.813 - 0.234 = 0.579 (0.116)	2.015 - 0.328 = 1.687 (0.169)	4.625 - 0.453 = 4.172 (0.278)
6	4	2.313 - 0.672 = 1.641 (0.328)	7.515 - 1.063 = 6.452 (0.645)	17.235 - 2.140 = 15.095 (1.006)
6	6	5.094 - 1.547 = 3.547 (0.709)	18.484 - 3.156 = 15.328 (1.533)	45.656 - 6.094 = 39.562 (2.637)
9	2	1.047 - 0.563 = 0.484 (0.097)	3.062 - 0.671 = 2.391 (0.239)	6.610 - 1.063 = 5.547 (0.370)
9	4	3.687 - 1.328 = 2.359 (0.472)	11.063 - 2.516 = 8.547 (0.855)	25.484 - 4.265 = 21.219 (1.415)
9	6	8.281 - 3.172 = 5.109 (1.022)	28.453 - 6.875 = 21.578 (2.158)	69.672 - 13.328 = 56.344 (3.756)

Результаты для каждого уравнения представлены в ячейке в столбце с соответствующим значением d и в строке с соответствующими значениями в столбцах n и l . В каждой такой ячейке представлена разность времени решения данного уравнения с помощью $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ и $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, а также в скобках приведено отношение этой разности к d.

Эксперимент иллюстрирует утверждение, доказанное в теореме 1, а также подтверждает предположение, сделанное в примечании 2, что для фиксированных n, l разность $T_B(l, d, n, h) - T_U(l, d, n, h)$ при увеличении d растет быстрее, чем d.

Отметим, что параметр h не фигурирует в таблице 1, так как его значение было фиксировано равным 6 для всех уравнений в этом эксперименте. Нами были проведены дополнительные аналогичные эксперименты, отличающиеся тем, что параметр h принимал значения 2 и 4. При этом результаты практически не менялись (например при росте h в 3 раза с 2 до 6 разность времени решения уравнения при фиксированных значениях остальных параметров изменялась менее чем на 3%), что также соответствует утверждению, доказанному в теореме 1.

4.2 Эксперимент 2

Во втором эксперименте были использованы 3 набора по 20 уравнений порядка $n = 2, 4, 6$ соответственно. Каждое из уравнений имеет фундаментальную систему решений, состоящую из рациональных функций. Числители этих рациональных функций являются случайными полиномами степени от 1 до 3 с целыми коэффициентами от -9 до 9, а знаменатели — полиномами степени от 1 до 3 со случайными целыми корнями от -9 до 9. Такой выбор уравнений обеспечивает точность (невозможность улучшения) границ знаменателей, получаемых алгоритмом $\mathbf{A}_B$ ([11, теорема 1]) и ставит алгоритм $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ в более выгодное положение, чем $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$.

Уравнения в каждом наборе решались с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$. В таблице 2 приведены результаты этого эксперимента.

Таблица 2: Результаты эксперимента 2

n	l	d	$\deg U(x)$ $\mathbf{A}'_U$	$\deg \mathrm{den} R(x)$ $\mathbf{A}_B$	Время $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$	Время $\langle \mathbf{A}_B \rangle$
2	4-14	0-16	1-26	1-6	2.813	14.765
4	11-32	9-18	19-47	4-9	13.563	99.828
6	17-47	14-18	23-53	5-12	45.937	340.093

Строка таблицы соответствует набору уравнений порядка n, указанного в первом столбце. В остальных столбцах таблицы указаны диапазоны параметров l и d уравнений соответствующего набора, диапазоны степеней знаменателей, найденных на шаге RS1 каждым из алгоритмов $\mathbf{A}'_U$ и $\mathbf{A}_B$ при применении к уравнениям соответствующего набора, а также суммарное время решения всех уравнений соответствующего набора с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$.

В этом эксперименте для всех наборов время, потребовавшееся $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, оказалось меньше времени, потребовавшегося $\langle \mathbf{A}_B \rangle$, несмотря на выигрышный для $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ выбор исходных данных.

4.3 Эксперимент 3

В третьем эксперименте были использованы 8 наборов по 20 случайно сгенерированных уравнений порядка $n = 3, 9$ с параметрами $l = 3, 9$ и $d = 3, 9$ соответственно. Для каждого уравнения в наборе случайно генерировались полиномы – коэффициенты этого уравнения. Для старшего и младшего коэффициента строился полином $p(x)$ степени l со случайными целыми корнями от -9 до 9; после этого младший коэффициент уравнения брался равным $p(x)$, а старший — $p(x + r)$, где выбор r определялся параметром d. Остальные коэффициенты строились как полиномы степени от 1 до l со случайными целыми корнями от -9 до 9. Построенные таким образом уравнения не имеют нетривиальных рациональных решений, но имеют нетривиальные универсальные знаменатели и границы знаменателя, вычисляемые с помощью $\mathbf{A}'_U$ и $\mathbf{A}_B$ соответственно.

Уравнения в каждом наборе решались с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$. В таблице 3 приведены результаты этого эксперимента.

Таблица 3: Результаты эксперимента 3

n	l	d	$\deg U(x)$ $\mathbf{A}'_U$	$\deg \mathrm{den} R(x)$ $\mathbf{A}_B$	Время $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$	Время $\langle \mathbf{A}_B \rangle$
3	3	3	4-6	2-6	0.937	3.313
3	3	9	10-21	9-21	0.985	15.500
3	9	3	4-8	2-8	1.531	7.703
3	9	9	13-37	8-33	1.875	56.922
9	3	3	4-9	2-9	2.250	6.937
9	3	9	10-24	9-24	3.406	38.531
9	9	3	4-9	2-9	4.078	19.297
9	9	9	15-29	12-28	6.922	146.110

Строка таблицы соответствует набору, задаваемому столбцами с параметрами n, l и d. В остальных столбцах таблицы указаны диапазоны степеней знаменателей, найденных на шаге RS1 каждым из алгоритмов $\mathbf{A}'_U$ и $\mathbf{A}_B$ при применении к уравнениям соответствующего набора, а также суммарное время решения всех уравнений соответствующего набора с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$.

Как и в первых двух экспериментах, в этом эксперименте для всех наборов время, потребовавшееся $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, оказалось меньше времени, потребовавшегося $\langle \mathbf{A}_B \rangle$.

5 Системы уравнений

Пусть дана система(4), $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathrm{Mat}_n(k(x))$, $A^{-1}(x) = (\tilde{a}_{ij}(x)) \in \mathrm{Mat}_n(k(x))$. Определим

$$\mathrm{den}A(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^n \mathrm{lcm}_{j=1}^n \mathrm{den} a_{ij}(x), \;\; \mathrm{den}A^{-1}(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^n \mathrm{lcm}_{j=1}^n \mathrm{den} \tilde{a}_{ij}(x)$$

и положим

$$V(x) = u_1(x-1), \;\; W(x) = u_0(x),$$

где $u_1(x) = \mathrm{den}A(x)$, $u_0(x) = \mathrm{den}A^{-1}(x)$.

Множество M определяется также, как в случае (6).

Алгоритмы $\mathbf{A}_U$, $\mathbf{A}'_U$ выполняются так же, как и в скалярном случае, т.е. в соответствии с формулой (12)

Ниже мы приводим предложенное в [10] обобщение алгоритма из [11] для случая произвольного поля k характеристики 0.

Следуя [11], определим $A_N(x) = A(x-1)A(x-2)\dots A(x-N)$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Матрица A обратима, и можно также определить $A_{-N} = A^{-1}(x)A^{-1}(x+1)\dots A^{-1}(x+N-1)$. Тогда для каждого рационального решения (5) системы (4) выполнены равенства $Y(x) = A_N(x)Y(x-N)$ и $Y(x) = A_{-N}(x)Y(x+N)$.

Пусть $p(x) \in \mathrm{Irr}(k[x])$ и N — положительное целое, $1 \leqslant i \leqslant n$. Определим $B(p(x), N, i)$ как минимум значений функции $\mathrm{val}_{p(x)}$ для всех элементов i-й строки матрицы $A_N(x)$. Таким же образом определим $B(p(x), -N, i)$ как минимум значений функции $\mathrm{val}_{p(x)}$ для всех элементов i-й строки матрицы $A_{-N}(x)$. Пусть множество $M_{q_t(x)}$ определено как в (8), $t = 1, 2, \dots, s$, и пусть $d = \max\{d_1, d_2, \dots, d_t\}$.

Алгоритм $\mathbf{A}_B$ строит последовательно матрицы $A_N(x)$ для $N = 1, 2, \dots, d+1$ и для каждого t такого, что $1 \leqslant t \leqslant s$ и $d_t \geqslant N-1$ находит $B(q_t(x + d_t - N + 1), N, i)$, $i = 1, 2, \dots, n$; это дает левосторонние нижние границы для $\mathrm{val}_{q_t(x+N-1)} Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Аналогичным образом алгоритм строит матрицы $A_{-N}(x)$ для $N = 1, 2, \dots, d+1$ и для каждого t такого, что $1 \leqslant t \leqslant s$ и $d_t \geqslant N-1$ находит $B(q_t(x+N-1), -N, i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, что дает правосторонние нижние границы для $\mathrm{val}_{q_t(x+N-1)} Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из двух нижних границ для $\mathrm{val}_{q_t(x+j)} Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t = 1, 2, \dots, s$, $j = 0, 1, \dots, d_t$, берется максимальная, которая обозначается через $\alpha_{i,j,t}$. Рациональные функции

$$R_i(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant t \leqslant s \\ 0 \leqslant j \leqslant d_t}} q_t^{\alpha_{i,j,t}}(x+j), \;\; i = 1, 2, \dots, n,$$

дают границу знаменателей для исходной системы.

Алгоритмы $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ используют рациональные функции

$$S_1(x) = S_2(x) = \dots = S_n(x) = \frac{1}{U(x)}$$

и соответственно

$$S_i(x) = R_i(x), \;\; i = 1, 2, \dots, n,$$

для преобразования исходной системы в такую, что

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T, \ \ f_i(x) \in k[x], \ \ i = 1, 2, \dots, n,$$

является решением преобразованной системы если и только если

$$(f_1(x)S_1(x),\ f_2(x)S_2(x),\ \dots,\ f_n(x)S_n(x))^T$$

является решением исходной системы (аналог шага RS2), после чего для преобразованной системы останется найти полиномиальные решения (аналог шага RS3).

Из общих соображений понятно, что в случае системы алгоритм $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ требует построения матриц A_N, A_{-N}, что связано с еще большими затратами, чем построение уравнений (14), (15). Это подтверждается экспериментально.

Для такого эксперимента в системе Maple были реализованы алгоритмы $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ и для случая систем. Как и в скалярном случае, на шаге RS1 реализация алгоритма $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ использует реализацию алгоритма $\mathbf{A}'_U$, описанную в [7], а реализация алгоритма $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ — реализацию алгоритма $\mathbf{A}_B$, выполненную специально для целей этого сравнения согласно описанию выше в этом разделе. На шаге RS3 реализации обоих алгоритмов $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$ для случая систем используют процедуру `PolynomialSolution` из стандартного пакета `LinearFunctionalSystems` системы Maple, предназначенную для поиска полиномиальных решений систем обыкновенных уравнений (в том числе и разностных).

Для эксперимента были использованы 3 набора по 20 случайно сгенерированных систем порядка $n = 2, 3, 4$ соответственно. Для генерации каждой системы в наборе сначала случайно генерировалось скалярное уравнение порядка n методом, примененным в эксперименте из раздела 4.2. Затем на основе этого уравнения строилась соответствующая сопровождающая система, которая преобразовывались с помощью замены переменных, задаваемых случайно сгенерированными невырожденными матрицами. Для этих матриц была установлена вероятность ненулевых элементов равная 1/2, а ненулевые элементы были рациональными функциями со случайными числителями и знаменателями степени от 1 до 3. Отметим, что как и в эксперименте из раздела 4.2 такое построение систем обеспечивает точность границы знаменателя, найденного алгоритмом $\mathbf{A}_B$.

Системы в каждом наборе решались с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$. В таблице 4 приведены результаты этого эксперимента.

Таблица 4: Результаты эксперимента для случая систем

n	$\deg U(x)$ $\mathbf{A}'_U$	$\deg \mathrm{den} R_i(x)$ $\mathbf{A}_B$	Время $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$	Время $\langle \mathbf{A}_B \rangle$
2	7-39	2-8	7.216	22.922
3	18-49	3-21	38.859	169.906
4	36-74	5-28	176.829	836.172

Строка таблицы соответствует набору, задаваемому столбцом с параметром n. В остальных столбцах таблицы указаны диапазоны степеней знаменателей, найденных на шаге RS1 каждым из алгоритмов $\mathbf{A}'_U$ и $\mathbf{A}_B$ при применении к системам соответствующего набора, а также суммарное время решения всех систем соответствующего набора с помощью $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$ и $\langle \mathbf{A}_B \rangle$.

Как и в экспериментах для скалярного случая из раздела 4, в этом эксперименте для всех наборов время, потребовавшееся $\langle \mathbf{A}'_U \rangle$, оказалось меньше времени, потребовавшегося $\langle \mathbf{A}_B \rangle$, несмотря на точность (невозможность улучшения) результатов $\mathbf{A}_B$ на системах в наборах, и, при этом, заметное уклонение от них результатов $\mathbf{A}'_U$ на системах в этих наборах, что видно из диапазона степеней найденных им универсальных знаменателей, указанных в таблице 4.

Список литературы

[1] С.А. Абрамов. Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений, *Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика*, No. 3, 53–60 (1989).

[2] С.А. Абрамов. Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, 29, No. 11, 1611–1620 (1989).

[3] С.А. Абрамов, Рациональные решения линейных разностных и q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, *Программирование*, No. 6, 3–11 (1995).

[4] С.А. Абрамов. Лекции о сложности алгоритмов. Изд-во МЦНМО, М., 2009.

[5] S. Abramov, M. Barkatou. Rational solutions of first order linear difference systems, *ISSAC'98 Proceedings* , 124–131 (1998).

[6] S. Abramov, M. Bronstein and M. Petkovšek. On polynomial solutions of linear operator equations, *ISSAC'95 Proceedings* , 290–295 (1995).

[7] S.A. Abramov, A. Gheffar, D.E. Khmelnov. Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators, *CASC'2010 Proceedings* , 4–18 (2010)

[8] M. Barkatou. Rational solutions of matrix difference equations: problem of equivalence and factorization, *ISSAC'99 Proceedings* , 277–282 (1999).

[9] A. Gheffar. Linear differential, difference and q-difference homogeneous equations having no rational solutions. *ACM Commun. Comput. Algebra*, **44**, No 3, 78–83 (2010).

[10] A. Gheffar, S. Abramov. Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials, *Adv. in Appl. Maths.* (accepted), (2010).

[11] M. van Hoeij. Rational solutions of linear difference equations, *ISSAC'98 Proceedings*, 120–123 (1998).

[12] D.E. Knuth. Big omicron and big omega and big theta, *ACM SIGACT News* 8(2): 18–23 (1976).

[13] M. Petkovšek, H.S. Wilf, D. Zeilberger, $A = B$, Peters, 1996.

[14] Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/