Построение определяющих рациональных функций линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами
Constructing Indicial Rational Functions for Linear Ordinary Differential Equations with Polynomial Coefficients

Абрамов С.А.

Вычислительный центр РАН, Вавилова 40, Москва 119991, Россия
e-mail: `sabramov@ccas.ru`

Известно, что аналитическое решение дифференциального уравнения

$$a_n(z)y^{(n)} + \cdots + a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) = 0, \tag{1}$$

$a_0(z), a_1(z), \ldots, a_n(z) \in \mathbf{C}[z]$, может иметь особенность, в частности — полюс, в точке α только в том случае, если $a_n(\alpha) = 0$. Нижнюю границу порядка полюса можно получить, найдя наименьший целый корень определяющего уравнения, которое является алгебраическим уравнением степени $\leq n$, сопоставляемым уравнению (1) и точке α (см. [1]). Если у определяющего уравнения нет целых корней, то у уравнения (1) нет таких ненулевых решений, которые либо регулярны, либо имеют полюс в α. Предположим, что каждое из определяющих уравнений, соответствующих корням полинома $a_n(z)$, имеет целые корни. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ суть все комплексные корни полинома $a_n(z)$, и $l_0, l_1, \ldots, l_k$ — наименьшие целые корни соответствующих определяющих уравнений (которые могут быть произвольными — не обязательно отрицательными — целыми числами). Тогда любое мероморфное во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ решение уравнения (1) может быть представлено как произведение рациональной функции

$$V(z) = (z - \alpha_0)^{l_0}(z - \alpha_1)^{l_1} \ldots (z - \alpha_k)^{l_k} \tag{2}$$

на некоторую целую функцию; назовем $V(z)$ *определяющей рациональной функцией* уравнения (1).

Задача распознавания существования определяющей рациональной функции для (1) и построения этой функции в случае ее существования может быть рассмотрена применительно к (1) и в том случае, когда $a_0(z), a_1(z), \ldots, a_n(z)$ являются полиномами над произвольным полем K характеристики 0, в этом случае $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ принадлежат полю разложения K' коэффициента $a_n(z)$. Подстановка

$$y(z) = u(z)V(z), \tag{3}$$

где $V(z)$ — определяющая рациональная функция, $u(z)$ — новая неизвестная функция, сводит задачу поиска рациональных решений уравнения (1) к задаче поиска полиномиальных решений. В [2] показано, что основываясь на разложении $a_n(z)$ на неприводимые над K множители и используя p-адические разложения рациональных функций, определяющая рациональная функция может быть построена без вычислений в алгебраических расширениях поля K.

Оказывается, что определяющая функция, если существует, может быть построена, основываясь на вычислении наибольших общих делителей и результантов полиномов над K, не прибегая при этом к разложению $a_n(z)$ на неприводимые множители. В [3] автором предлагался такого рода алгоритм, позволяющий получить рациональную функцию

$$\tilde{V}(z) = (z - \alpha_0)^{m_0}(z - \alpha_1)^{m_1} \dots (z - \alpha_k)^{m_k},$$

где $m_0 \le l_0$, $m_1 \le l_1, \dots, m_k \le l_k$. Предлагаемый же тередь алгоритм строит рациональную функцию, равную (2). (Надо добавить, что как алгоритмы из [2, 3], так и новый алгоритм, используют нахождение целых корней полиномов из $K[z]$.) Подстановка (3) с определяющей $V(z)$ сводит поиск рациональных решений к поиску полиномиальных решений, имеющих в общем случае меньшие степени, чем при использовании $\tilde{V}(z)$.

Предлагаемый алгоритм можно модифицировать для случая, когда дифференциальное уравнение имеет полиномиальную правую часть.

Список литературы

[1] Коддингтон Э.А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М: Издательство иностранной литературы, (1958).

[2] Singer M.F., “Liouvillian Solutions of n^{th} Order Homogeneous Linear Equations,” *American Journal of Mathematics*, 103, No. 4, 661–682 (1981).

[3] Абрамов С.А., “Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами,” *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, 29, No. 11, 1611–1620 (1989).