ЦИФРОВЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ УСЕЧЕННОЙ ЧИСЛОВОЙ МАТРИЦЫ

С.А. Абрамов, А.А. Рябенко

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: sabramov@frccsc.ru, aryabenko@frccsc.ru

Некоторые свойства определителя числовой вещественной матрицы могут быть установлены по усеченному представлению самой этой матрицы, когда известно лишь конечное число (возможно — небольшое число) цифр после десятичной точки в записи элементов матрицы. В каких-то случаях можно указать количество цифр, которое достаточно добавить, чтобы ответ о наличии свойства стал возможным.

Введение. Математические объекты, которые в формулировке условия некоторой задачи предполагаются полностью заданными, в конкретном варианте этой задачи могут оказаться известными лишь частично. В рамках ряда матричных задач ниже обсуждается возможность проверки достаточности имеющихся неполных данных для получения корректных ответов на вопросы задачи. Предполагается, что элементы исходных квадратных матриц имеют вид вещественных десятичных чисел с конечным числом цифр после десятичной точки. Но это лишь известные нам цифры, фактические же элементы матрицы могут дополнительно иметь еще какие-то цифры в последующих десятичных разрядах, возможно даже — бесконечную последовательность цифр.

Такого рода обсуждения уже проводились нами ранее для задачи проверки невырожденности матрицы ([1]). Числовые значения элементов матрицы могут быть некоторыми экспериментальными данными, результатами каких-то измерений. Измерения выполняются вплоть до некоторого знака после десятичной точки (разные матричные элементы могут иметь разное число знаков после десятичной точки). Заслуживает ли доверия, скажем, обнаруженная невырожденность полученной усеченной матрицы, останется ли матрица невырожденной при добавлении к ее элементам их последующих цифр? Поскольку эти «последующие цифры» неизвестны, обсуждавшимся в [1] был вопрос — остается ли эта матрица невырожденной при добавлении к ее элементам любых последующих цифр?

Получение информации о матрицах по их конечным усечениям обсуждается и в настоящей заметке. Рассматривается, в частности, множество значений определителя при всевозможных дописываниях цифр к элементам заданной усеченной матрицы. Выясняется, что эти значения целиком заполняют некоторый отрезок числовой прямой. Дается алгоритм нахождения чисел, служащих концами этого отрезка. При этом устанавливается, что такие концы всегда оказываются рациональными числами.

Предлагается также алгоритм приближенного вычисления определителей матриц, полученных какими-то цифровыми продолжениями элементов исходной матрицы. Здесь вычисления для бесконечных продолжений сводятся к работе с числами, имеющими лишь конечное количество цифр после десятичной точки. При этом гарантирована заданная точность вычисления: исходя из оговоренной точности ε, алгоритм устанавливает то количество цифр, которое при любом из возможных цифровых продолжений матрицы будет достаточно учесть для получения ответа с точностью ε.

Ниже под *конечным десятичным числом* понимается десятичное число с конечным количеством цифр после десятичной точки. Соответственно бесконечным количеством цифр после десятичной точки обладает *бесконечное десятичное число*, при этом каждая из этих цифр может быть нулевой.

Размеченные усеченные матрицы, их продолжения. Пусть элементами $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ служат вещественные числа. Предполагается, что эти ее элементы являются неполностью заданными элементами матрицы M, представляющей для нас интерес, но полностью нам не известной. Каждый из элементов A задан конечным числом десятичных цифр — от самой первой до некоторой цифры, расположенной до или после десятичной точки. Такие матрицы будем называть *конечными* матрицами. Каждому элементу a_{ij} исходной конечной вещественной матрицы A сопоставляется его *валюация* v_{ij} — целое число, равное номеру *десятичного разряда* (где единицы — нулевой разряд, десятки — первый, …, десятые доли — минус первый, сотые — минус второй,…), в котором располагается последняя известная цифра числа a_{ij}. Последняя известная цифра, как и несколько предшествующих цифр (и даже все предшествующие цифры) могут быть нулями.

Определение. *Пусть A — квадратная конечная матрица. Набор (v_{ij}) валюаций элементов матрицы A будем называть* разметкой *матрицы A и, если этот набор указан, — то говорить об A как о* размеченной матрице. *Вместе с размеченной $n \times n$-матрицей A будем рассматривать* секвенты *(продолжения) матрицы A, каждый секвент — это некоторая вещественная $n \times n$-матрица $L = (l_{ij}), 0 \leq l_{ij} \leq 1$.*

Результатом применения секвента L к A служит вещественная $n \times n$-матрица $A_L = (\tilde{a}_{ij})$ (*продолженная* матрица), в которой

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} \pm 10^{v_{ij}} l_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

где v_{ij} — валюация элемента a_{ij} и знак перед вторым слагаемым правой части совпадает со знаком a_{ij}. Равенство $l_{ij} = 1$ интерпретируется как $l_{ij} = 0.999\dots$ Множество всех секвентов образует подмножество вещественного пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ и является n^2-мерным единичным кубом $Q = [0,1]^{n^2}$. (Расстояние между секвентами $L^{(1)}, L^{(2)} \in Q$ определено как $\max_{ij} |l_{ij}^{(1)} - l_{ij}^{(2)}|$.)

Далее будем обозначать через $r^{\langle k \rangle}$ результат обнуления в вещественном десятичном числе r всех его десятичных разрядов с номерами $k-1, k-2, \ldots$

Непрерывность на Q. Заданная фиксированной размеченной $n \times n$-матрицей A функция $F(L) = \det A_L$ непрерывна на Q, так как для $A_L = (\tilde{a}_{ij})$ каждый элемент $\tilde{a}_{ij}$, определенный с помощью (1), есть непрерывная функция значения l_{ij}.

Множество Q замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^{n^2}$. Из этого получаем, что $F(L)$ принимает на Q как свои конечные минимальное и максимальное значения, так и все промежуточные значения [2, разд. 73].

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $\max_{L \in Q} F(L) = t$. *Тогда найдется такой секвент* $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})$, *что* $F(\tilde{L}) = t$ *и* $\tilde{l}_{ij} \in \{0,1\}$ *для всех* i, j. *Аналогичное верно и для минимального значения* s *функции* $F(L)$ *на* Q.

На основе этой леммы может быть доказано

Предложение 1. *Для произвольной размеченной матрицы A существует такой вещественный отрезок* $[s, t]$, *что для любой матрицы* A_L, *получающейся применением к A некоторого принадлежащего Q секвента, значение* $\det A_L$ *принадлежит* $[s, t]$. *При этом любое число из этого отрезка является значением определителя указанного вида. Числа* s, t *являются конечными десятичными числами (и, тем самым, рациональными числами). Существует алгоритм, позволяющий по заданной матрице A найти эти числа.*

Исходная матрица A может иметь среди всех своих элементов и такие, про которые известно, что несмотря на конечность числа их цифр, эти элементы заданы точно, их ненулевое продолжение не предполагается. Тогда множество Q всех секвентов будет единичным кубом размерности меньшей, чем n^2, но останется замкнутым ограниченным подмножеством множества $\mathbb{R}^{n^2}$. Сказанное о непрерывности $\det A_L$ на замкнутом ограниченном подмножестве пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ остается в силе, как и предложение 1.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1. & -3.333 \\ -0.30 & 0.09 \end{pmatrix}$$

с разметкой $v_{1,2} = -3, v_{2,1} = -2, v_{2,2} = -2$ (элемент a_{11} считаем заданным точно).

Упоминаемый в предложении 1 алгоритм позволяет решить задачу, рассмотренную ранее в [1]: заслуживает ли доверия обнаруженная невырожденность заданной усеченной матрицы, т. е. останется ли эта матрица невырожденной при добавлении к ее элементам любых последующих цифр? В самом деле, достаточно найти s и t и проверить, выполнено ли $st \leq 0$.

Для $\det A_L$ здесь получаем $s = -0.94354$ и $t = -0.8999$, системе Maple 2025 ([3]) на это вычисление требуется 0.003 сек.

Любое продолжение матрицы A является невырожденной матрицей: значение определителя любого из продолжений принадлежит отрезку $[-0.94354, -0.8999]$ и не может быть нулевым.

В [1] для этой задачи давалось более трудоемкое решение, основанное на [4] – [6].

Равномерная непрерывность. Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном подмножестве метрического пространства, является, как известно, равномерно непрерывной на этом подмножестве [2, разд. 137].

Равномерная непрерывность дает, в частности, ключ к решению следующей задачи. Дана конечная размеченная $n \times n$-матрица A, представляющая собой усеченный вариант некоторой матрицы M такого же размера. Допустим, нас интересуют определители некоторых продолжений матрицы A, эти продолжения возникают как гипотезы, касающиеся самой матрицы $M = (m_{ij})$. Каждая такая гипотеза имеет вид секвента. Допускается, что интересующие нас определители могут вычисляться приближенно с не превосходящей ε абсолютной погрешностью.

Предложение 2. *Существует алгоритм, который по данной конечной $n \times n$-матрице A с разметкой (v_{ij}) и $\varepsilon > 0$ находит такое целое $k \geq 0$, что если матрица M является бесконечным продолжением матрицы A, а матрица $T = (t_{ij})$ — таким усечением матрицы M, что $t_{ij} = m_{ij}^{<v_{ij}-k>}$, то $|\det T - \det M| < \varepsilon$. При этом $\det T$ есть конечное десятичное число.*

Примечание. *Упоминаемый в предложении 2 алгоритм использует возможность нахождения δ по ε для равномерно непрерывной функции нескольких переменных. В нашем случае функция задана полиномом и рассматривается на единичном кубе. Здесь вычисление δ не вызывает серьезных трудностей.*

Пример 2. Матрица

$$M = \begin{pmatrix} \sin 1 & \cos 1 \\ -\cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

имеет определитель $\det M = \sin^2 1 + \cos^2 1 = 1.000\ldots = 0.999\ldots$ Усечением M является, например, матрица с конечными вещественными элементами

$$A = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.54 \\ -0.54 & 0.84 \end{pmatrix}$$

с разметкой $v_{ij} = -2, i, j = 1,2$. Следуя алгоритму из предложения 2, найдем $k = 2$ для $\varepsilon = 10^{-3}$. Тогда

$$T = M^{\langle -4 \rangle} = \begin{pmatrix} 0.8414 & 0.5403 \\ -0.5403 & 0.8414 \end{pmatrix}$$

Определитель $\det T = 0.99987805$ отличается от $\det M$ менее, чем на 10^{-3}. Аналогично, для $\varepsilon = 10^{-10}$ будет вычислено $k = 9$. Тогда

$$M^{\langle -11 \rangle} = \begin{pmatrix} 0.84147098480 & 0.54030230586 \\ -0.54030230586 & 0.84147098480 \end{pmatrix}$$

Определитель

$$\det M^{\langle -11 \rangle} = 0.99999999999779148213796$$

отличается от $\det M$ менее, чем на 10^{-10}.

В системе Maple 2025 выполнена реализация алгоритма построения диапазона значений определителей всех цифровых продолжений заданной размеченной усеченной матрицы A (см. предложение 1) и алгоритма определения k из предложения 2 — количества цифр, необходимых для построения продолжения усеченной матрицы A, чтобы получить значение определителя $\det M$ с заданной точностью ε. Реализация имеет вид Maple-процедур DeterminantRange и NeededDigitsNumber, соответственно. Процедуры и примеры их использования доступны по ссылке [7].

Дополнение: полиномиальные матрицы. В [8] сходная задача рассматривалась для матриц, элементы которых — не числа, а полиномы от x над полем K характеристики 0. Можно ли, превращая элементы исходной невырожденной полиномиальной матрицы P в формальные степенные ряды, добавляя для этого такие новые члены, степени которых больше максимальной степени d элементов матрицы, получить вырожденную матрицу? Если это невозможно, то матрица P называлась в [8] *строго невырожденной* (полиномиальной) матрицей. В значительной мере благодаря тому, что фиксирована единая для всех элементов матрицы P нижняя граница $d + 1$ для степеней добавляемых членов, а также тому, что при оперировании с рядами, в отличие от чисел, не возникают «переносы в старшие разряды», равно как и «заемы в старших разрядах», критерий строгой невырожденности полиномиальной матрицы оказался достаточно простым. Перед его формулировкой введем некоторые обозначения и понятия. Кольцо *формальных степенных рядов* над полем K обозначается через $K[[x]]$, а поле *формальных лорановых рядов*, являющееся полем частных кольца $K[[x]]$, — через $K((x))$. Для ненулевого элемента $s = \sum s_i x^i \in K((x))$ обозначение $\operatorname{val} s$ используется для его валюации, определенной как $\min\{i | s_i \neq 0\}$. Принимается, что $\operatorname{val} 0 = \infty$. Валюацией $\operatorname{val} M$ матрицы M над полем $K((x))$ считается наименьшая из валюаций элементов этой матрицы.

Для полиномиальной матрицы P ее степенью $\deg P$ считается наибольшая из степеней элементов этой матрицы (для полиномов принимается, что $\deg 0 = -\infty$).

Как установлено в [8], полиномиальная квадратная матрица P строго невырождена, если и только если $\deg P + \mathrm{val}\, P^{-1} \geq 0$.

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

Литература

1. *Абрамов С.А., Рябенко А.А.* Конечные десятичные дроби как элементы невырожденных матриц // Программирование. 2025. № 2. С. 83–90.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа, том I. М.: Наука, 1964.
3. Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help
4. *Tarski A.* A decision method for elementary algebra and geometry. Santa Monica CA: RAND Corp., 1948.
5. *Collins G.E.* Hauptvortrag: Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition // In Proc.2nd GI Conf. Automata Theory and Formal Languages. New York: Springer-Verlag, 1975. P. 134–183.
6. *Caviness B.F., Johnson J.R.* (eds.) Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition. Texts & Monographs in Symbolic Computation, Springer, 1998.
7. http://www.ccas.ru/ca/_media/numericalmatrix.mw
8. *Abramov S., Barkatou M.* On strongly non-singular polynomial matrices // In: Schneider C., Zima E. (eds) Advances in Computer Algebra. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2018. V. 226. P. 1–17.