ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2004, № 2, с. 1–6

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 681.3.06

РАЗРЕЖЕННЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ*

С. А. Абрамов, А. А. Рябенко
Вычислительный Центр РАН
119991 Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: abramov@ccas.ru, ryabenko@cs.msu.su
Поступила в редакцию

Предлагается модулярно-вероятностный подход, позволяющий избежать требующего больших временных затрат вычисления наибольшего общего правого делителя линейных дифференциальных или разностных операторов, зависящих от параметра, которые появляются в связи с задачей поиска для данного линейного обыкновенного дифференциального уравнения всех его решений в виде разреженных степенных рядов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть дано однородное обыкновенное дифференциальное уравнение $Ly(x) = 0$,

$$L = \sum_{j=0}^{r} p_j(x) D^j, \quad p_j(x) \in \mathbb{C}[x], \tag{1}$$

где D – дифференцирование по x, $\gcd(p_0(x), \ldots, p_r(x)) = 1$, старший коэффициент $p_r(x)$ не равен тождественно нулю. *Порядком* дифференциального оператора называется $\operatorname{ord} L = r$. В [1] сформулирована и решена задача поиска для данного целого $m \geq 2$ всех точек $a \in \mathbb{C}$, называемых *m-точками*, таких, что уравнение имеет решение в виде формального m-разреженного степенного ряда. При этом ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

называется *m-разреженным*, если, начиная с некоторого места, только каждый m-й коэффициент c_n может быть отличен от 0. Т.е. существует целое N, $0 \leq N < m$, такое, что

$$(c_n \neq 0) \Rightarrow (n \equiv N \pmod{m})$$

для всех достаточно больших n. При каждом N m-разреженные решения образуют линейное пространство. Полиномиальные решения не считаются m-разреженными.

Для данного оператора L построим оператор

$$L^a = \sum_{j=0}^{r} p_j(x+a) D^j,$$

где a либо принадлежит $\mathbb{C}$, либо является параметром. В последнем случае L^a – параметризованный оператор. Имеем

$$L \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = 0 \Longleftrightarrow L^a \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Таким образом, задача поиска m-точек уравнения $Ly(x) = 0$ эквивалентна задаче поиска всех значений параметра a, при которых уравнение $L^a y(x) = 0$ имеет m-разреженные решения в точке $x = 0$.

Известно (см., например, [2]), что последовательность коэффициентов $\{c_n\}$ в (2) удовлетворяет рекуррентному соотношению $R^a c_n = 0$ (полагая $c_n = 0$ при $n < 0$), где

$$R^a = \sum_{k=l}^{d} q_k(n) E^k \tag{3}$$

– линейный разностный оператор, крайние коэффициенты $q_l(n)$, $q_d(n)$ которого не равны тождественно 0. Если a является параметром, то

*Работа выполнена при частичной поддержке Франко-русского центра им. Ляпунова, проект 98-03, и РФФИ, грант 01-01-00047.

$q_k(n) \in \mathbb{C}[a, n]$; если $a \in \mathbb{C}$, то $q_k(n) \in \mathbb{C}[n]$ в (3). *Порядком* разностного оператора называется $\operatorname{ord} R^a = d - l$.

Обозначим через $\mathcal{R} : \mathbb{C}[D, x, x^{-1}] \to \mathbb{C}[E, E^{-1}, n]$ преобразование, ставящее в соответствие дифференциальному оператору L разностный оператор R^0. В [2] показано, что $\mathcal{R}$ является изоморфизмом и задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \quad D &\mapsto (n+1)E, \\ x &\mapsto E^{-1}. \end{aligned}$$

Приведем несколько определений и утверждений из [1]. Дифференциальный оператор L называется m-разреженным, если существует целое N $(0 \le N < m)$ такое, что

$$(x^i D^j \in L) \Rightarrow (j - i \equiv N \pmod{m}), \qquad (4)$$

где $x^i D^j \in L$ означает, что коэффициент при x^i в полиноме $p_j(x)$ не равен нулю. Если L^a, где $a \in \mathbb{C}$, – m-разреженный оператор и $x = 0$ – *обыкновенная* точка уравнения $L^a y(x) = 0$ (т.е. $p_r(a) \neq 0$), то сумма размерностей пространств m-разреженных решений равна $r - r_0$, где $r = \operatorname{ord} L$, а r_0 – размерность пространства всех полиномиальных решений уравнения. Отсюда легко видеть, что, если L имеет m-разреженный правый делитель с постоянными коэффициентами (тогда соответствующий ему левый делитель имеет коэффициенты из $\mathbb{C}[x]$) и $r > r_0$, то в любой точке $a \in \mathbb{C}$ существуют m-разреженные решения. Более того, только в том случае, если L имеет такой правый делитель, множество m-точек бесконечно.

Разностный оператор называется m-разреженным, если существует целое N $(0 \le N < m)$ такое, что

$$(q_k(n) \neq 0) \Rightarrow (k \equiv N \pmod{m}).$$

Уравнение $L^a y(x) = 0$, где $a \in \mathbb{C}$, может иметь m-разреженное решение в точке $x = 0$, только если оператор $R^a = \mathcal{R}L^a$ имеет нетривиальный m-разреженный правый делитель. Пусть $\check{R}^a$ – m-разреженный делитель максимально возможного порядка. Тогда коэффициенты всех m-разреженных решений удовлетворяют, начиная с некоторого места, соотношению $\check{R}^a c_n = 0$.

Любой оператор (разностный или дифференциальный) можно представить в виде суммы m-разреженных операторов. Пусть, например, $L^a = L^a_0 + \dots + L^a_{m-1}$, где L^a_k удовлетворяет (4) при $N = k$. Тогда набор $L^a_0, \dots, L^a_{m-1}$ назовем *m-расщеплением* оператора L^a. Заметим, что m-расщепление оператора $R^a = \mathcal{R}L^a$ может быть построено двумя способами – непосредственным расщеплением разностного оператора или $\mathcal{R}$-отображением m-расщепления дифференциального оператора:

$$R^a_0 = \mathcal{R}L^a_0, \dots, R^a_{m-1} = \mathcal{R}L^a_{m-1}.$$

Для того, чтобы найти m-разреженный правый делитель максимально возможного порядка оператора L^a (либо R^a), нужно построить наибольший общий правый делитель m-расщепления этого оператора. Например,

$$\check{R}^a = \mathrm{GCRD}(R^a_0, \dots, R^a_{m-1}).$$

Общий правый делитель m-разреженных операторов также m-разрежен. Более того, если a – параметр, то $\mathrm{GCRD}(L^a_1, \dots, L^a_{m-1})$ – m-разреженный оператор с постоянными коэффициентами, и он является правым делителем оператора L.

Пример 1. Пусть

$$\begin{aligned} L \;=\; & -(x^4+4x^3+12x^2+16x+9)+ \\ & +(x^5+5x^4+16x^3+28x^2+25x+9)D+ \\ & (x^4+4x^3+12x^2+16x+9)D^4- \\ & -(x^4+4x^3+8x^2+8x+1)D^2- \\ & (x^5+5x^4+16x^3+28x^2+25x+9)D^5+ \\ & +(x^4+4x^3+8x^2+8x+1)D^6. \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнение $Ly(x) = 0$ имеет 4-разреженные решения в точке $x = 0$. Например,

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{360}x^6 + \frac{1}{1814400}x^{10} + \\ + \frac{1}{43589145600}x^{14} + \frac{1}{3201186852864000}x^{18} + \cdots$$

– 4-разреженное решение с $N = 2$ и, в то же время, 2-разреженное с $N = 0$. Следовательно, $x = 0$ является 2- и 4-точкой данного уравнения. Коэффициенты этого и других решений в $x = 0$ удовлетворяют рекуррентному соотношени $R^0 c_n = 0$, которое мы не будем здесь выписывать, поскольку оператор R^0 довольно громоздок: он имеет 10-й порядок, а максимальная степень коэффициентов равна 6. Но, как сказано выше, коэффициенты 4-разреженного решения можно вычислять с помощью более простого соотношения:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)c_n - c_{n-4} = 0,$$

начиная с $n \geq 6$. Разностный оператор, соответствующий последнему соотношению, – 2- и 4-разреженный. Его можно получить, вычислив GCRD 4-расщепления оператора R^0.

Оператор L имеет правый делитель $\check{L} = D^4 - 1$. В этом примере его можно получить, построив GCRD 4-расщепления оператора L, либо оператора L^a, где a может быть как параметром, так и числом. Следовательно, в любой точке существуют 4-разреженные решения. Они образуют четыре одномерных линейных пространства:

$$\begin{aligned}
&C_1\left(1+\frac{1}{24}(x-a)^4+\frac{1}{40320}(x-a)^8+\cdots\right),\\
&C_2\left((x-a)+\frac{1}{120}(x-a)^5+\frac{1}{362880}(x-a)^9+\cdots\right),\\
&C_3\left((x-a)^2+\frac{1}{360}(x-a)^6+\frac{1}{1814400}(x-a)^{10}+\cdots\right),\\
&C_4\left((x-a)^3+\frac{1}{840}(x-a)^7+\frac{1}{6652800}(x-a)^{11}+\cdots\right),
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Те же самые решения являются и 2-разреженными, но существует дополнительная точка $x = -1$, где уравнение имеет одно двумерное и одно трехмерное пространства 2-разреженных решений:

$$\begin{aligned}
&C_1\left(1+\frac{1}{24}(x+1)^4+\frac{1}{40320}(x+1)^8+\cdots\right)+\\
&+C_3\left((x+1)^2+\frac{1}{360}(x+1)^6+\frac{1}{1814400}(x+1)^{10}+\cdots\right)+\\
&+C_5\left((x+1)^4+\frac{1}{30}(x+1)^6+\frac{1}{210}(x+1)^8+\cdots\right),\\
&C_2\left((x+1)+\frac{1}{120}(x+1)^5+\frac{1}{362880}(x+1)^9+\cdots\right)+\\
&+C_4\left((x+1)^3+\frac{1}{840}(x+1)^7+\frac{1}{6652800}(x+1)^{11}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Это связано с тем, что дифференциальный оператор

$$\begin{aligned}
L^a|_{a=-1} \;=\; & -(x^4+6x^2+2)+(x^5+6x^3+2x)D-\\
& -(x^4+2x^2-2)D^2+(x^4+6x^2+2)D^4-\\
& -(x^5+6x^3+2x)D^5+(x^4+2x^2-2)D^6
\end{aligned}$$

– 2-разреженный, и $x = 0$ – обыкновенная точка $L^a|_{a=-1}y(x) = 0$.

В [1] показано, что для любого целого m такого, что

$$2 \leq m \leq \operatorname{ord} L - \min_{x^iD^j \in L}\{j-i\},$$

возможны две альтернативы:

- оператор L имеет нетривиальный m-разреженный правый делитель $\check{L}$ с постоянными коэффициентами;
- множество m-точек конечно.

Если имеет место первая альтернатива, то в любой точке $x = a$ уравнение $Ly(x) = 0$ имеет m-разреженные решения, которые являются решениями уравнения $\check{L}y(x) = 0$. Построив оператор $\check{L}$ максимально возможной степени, полезно проверить m-точки уравнения $\hat{L}y(x) = 0$, где $L = \hat{L} \circ \check{L}$. В этих дополнительных точках могут существовать m-разреженные решения, не являющиеся решениями $\check{L}y(x) = 0$. Действительно, если $Y(x)$ – m-разреженное решение уравнения $\hat{L}Y(x) = 0$ в некоторой точке $a \in \mathbb{C}$, то неоднородное уравнение $\check{L}y(x) = Y(x)$ может иметь m-разреженное решение в $x = a$, которое будет решением $Ly(x) = 0$.

В [1] приведен алгоритм (в [3] описана его реализация) поиска m-точек, согласно которому эта задача распадается на две:

P1. Построение для L его правого m-разреженного делителя $\check{L}$ с постоянными коэффициентами максимального порядка.

P2. Построение конечного множества S, содержащего все m-точки уравнения $\hat{L}y(x) = 0$.

Для решения первой задачи строится GCRD m-расщепления парметризованного оператора L^a. В [1] показано, что такой GCRD будет m-разреженным оператором с постоянными коэффициентами и будет правым делителем оператора L максимально возможного порядка.

Для решения второй задачи достаточно найти значения параметра a, при которых существует нетривиальный GCRD m-расщепления оператора $\hat{R}^a = \mathcal{R}\hat{L}^a$. Для того, чтобы найти множество m-точек для $\hat{L}$, нужно будет во всех точках S проверить существование m-разреженных решений. Алгоритм построения таких решений приведен в [1, 3].

Таблица 1. Время построения оператора $\check{L}$

m $\check{L}$	2 D^4-1	3 1	4 D^4-1	5 1	6 1	7 1	8 1	9 1	10 1
Новый алгоритм вычисления с параметром	.099 1.640	.509 202.911	.301 .720	.350 47.300	.320 7.810	.321 3.710	.330 5.951	.301 2.240	.140 .750

2. ПРАВЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Решение задачи P1 с помощью построения GCRD для параметризованных дифференциальных операторов $L_0^a, \ldots, L_{m-1}^a \in \mathbb{C}[a,x,D]$ тем менее эффективно, чем выше степени полиномиальных коэффициентов операторов и чем меньший порядок имеет GCRD этих коэффициентов. И если они, например, взаимно просты, то вычислительных ресурсов может не хватить для завершения работы.

Опишем другой, более эффективный, алгоритм. Строим m-расщепление дифференциального оператора L^a при некотором значении параметра, например, $a=0$: $L_0^a|_{a=0}, \ldots, L_{m-1}^a|_{a=0} \in \mathbb{C}[x,D]$. Находим $g = \mathrm{GCRD}(L_0^a|_{a=0}, \ldots, L_{m-1}^a|_{a=0})$. Тогда g – m-разреженный оператор, является правым делителем оператора L. Пусть $\operatorname{ord} g > 0$ (в противном случае $\operatorname{ord} \check{L} = 0$, и вычисления заканчиваются). Тогда возможно, что $x=0$ является m-точкой оператора L, если же $x=0$ – обыкновенная точка, то она заведомо является m-точкой.

Если g – оператор с постоянными коэффициентами, то $\check{L} = g$. Иначе строим m-расщепление оператора L^a при другом значении параметра, например, $a=1$, и находим $g_1 = \mathrm{GCRD}(g, L_0^a|_{a=1}, \ldots, L_{m-1}^a|_{a=1})$. Аналогично, мы узнаем, является ли $x=1$ m-точкой или точкой-кандидатом, и, если g_1 имеет постоянные коэффициенты, то $\check{L} = g_1$, и т.д. до тех пор, пока не получим дифференциальный оператор (тривиальный или нетривиальный) с постоянными коэффициентами.

Преимущество этого метода в том, что GCRD строится для операторов, независящих от параметра, и в процессе вычисления получаем некоторую информацию о возможных дополнительных m-точках.

Пример 2. Построим оператор $\check{L}$ при $m = 2$ для (5). Применим алгоритм построения GCRD к 2-расщеплению оператора L^a, получим $\check{L} = D^4 - 1$ за 1.640 сек[1]. Если построить GCRD 2-расщепления оператора $L^a|_{a=0}$, то получим тот же результат D^4-1 за время .099 сек.

В таблице 1 приведено время построения оператора $\check{L}$ при всех возможных значениях m.

3. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ВСЕ m-ТОЧКИ

Пусть теперь L – дифференциальный оператор, для которого может существовать лишь конечное число m-точек. В [1, 3] предлагается следующий алгоритм построения конечного множества S кандидатов, содержащего все m-точки (и, возможно, некоторые лишние точки). Строим разностный оператор $R^a = \mathcal{R}L^a$, где a – параметр. Затем строим расщепление

$$R_0^a,\ R_1^a,\ \ldots,\ R_{m-1}^a; \tag{6}$$

GCRD элементов этого расщепления как операторов из $\mathbb{C}[a,n,E,E^{-1}]$ имеет порядок 0. Применяем описанный в [4] алгоритм GCRDpar для нахождения всех значений параметра, при которых $\operatorname{ord}\mathrm{GCRD}(R_0^a, R_1^a, \ldots, R_{m-1}^a) > 0$. Тогда в качестве S можно взять множество всех этих значений. Можно показать, что построенное таким образом множество кандидатов S включает в себя точки-кандидаты, обсуждавшиеся в предыдущем разделе.

[1] Здесь и далее приводится время (в сек) счета в системе компьютерной алгебры Maple 7 на 333 МГц Pentium II 256 Мб RAM.

Таблица 2. Время работы GCRDpar

m $P(a)$	2 $(4a^4+1)a$	3 –	4 a	5 –	6 –	7 –	8 –
GCRDpar	778.551	268.080	157.470	4.161	11.350	30.859	.399

Пример 3. Найдем конечное множество m-точек для следующего дифференциального оператора:

$$\begin{aligned} L \;=\; & (x^8-4x^6-2x^4+4x^2+1)D^2+ \\ & +(4x^7-24x^5-4x^3-8x)D+2x^6- \\ & -18x^4-18x^2+2. \end{aligned}$$

Применив GCRDpar, получим, что множество возможных 2-точек – это множество корней полинома $P(a)=(4a^4+1)a$. В таблице 2 приведены время и результаты работы GCRDpar при всех значениях m.

Мы видим, что уравнение $Ly(x)=0$ не может иметь более пяти 2-точек и одной 4-точки. При непосредственной проверке (построение разреженного решения в заданной точке) оказывается, что только в точке $x=0$ существуют 2-разреженные решения.

Покажем, что подобное, но, возможно, большего размера, множество можно построить быстрее. Пусть A_1 и A_2 – два ненулевых, взаимно простых (как элементы $\mathbb{C}[n,a,E,E^{-1}]$) оператора из расщепления (6). Найдем, при каком условии вида $P(a)=0$ эти операторы могут иметь нетривиальный общий правый делитель. Тогда множество S' корней полинома $P(a)$ включает в себя множество S, построенное с помощью GCRDpar: $S\subset S'$.

Для построения $P(a)$ достаточно изучить результант A_1 и A_2. Результантом Resultant(A_1,A_2) двух разностных операторов называется определитель матрицы M, строки которой составлены из коэффициентов операторов A_1, $EA_1,\ldots,E^{\operatorname{ord}A_2-1}A_1$, A_2, $EA_2,\ldots,E^{\operatorname{ord}A_1-1}A_2$. Операторы A_1 и A_2 имеют нетривиальный общий правый делитель тогда и только тогда, когда их результант равен нулю [5].

Вычисляем определитель матрицы при различных значениях n. Например, для $P_0(a)=$ $=\det M|_{n=0}$ возможны три случая:

1. $P_0(a)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$;
2. $P_0(a)\in\mathbb{C}[a]\setminus\mathbb{C}$;
3. $P_0(a)=0$.

В первом случае очевидно, что при всех значениях парметра a операторы A_1, A_2 имеют лишь тривиальный общий делитель, т.е. множество S' – пусто.

Во втором случае A_1, A_2 могут иметь нетривиальный общий правый делитель только при таких значениях парметра a, которые являются корнями полинома $P_0(a)$.

В третьем случае будем последовательно вычислять результант A_1, A_2 при $n=1,2,\ldots$ Поскольку операторы взаимно просты как элементы $\mathbb{C}[E,E^{-1},n,a]$, найдется такое n_1, что $P_{n_1}(a)\in\mathbb{C}[a]\setminus\{0\}$.

В качестве множества кандидатов можно взять множество корней S'' полинома $P_{n_1}(a)$, где $n_1\geq 0$: $S'\subset S''$.

Пример 4. Применим этот метод к оператору L, рассмотренному в предыдущем примере. Для $m=2$ в (6) только два оператора. За время 6.730 сек мы получаем множество S'' из 45 точек. Для $m=3$ две пары операторов из (6) взаимно просты как элементы $\mathbb{C}[E,E^{-1},n,a]$. Выбирая ту или иную пару, мы за время 3.740 сек получаем множество S'' из 42 точек, либо за время 4.490 сек – множество из 48 точек. Таким образом, множества кандидатов мы получаем в 50–100 раз быстрее. Но эти множества содержат намного больше точек, чем те, что были получены при использовании GCRDpar.

Пусть $P_{n_1}(a)$, где $n_1\geq 0$, – полином от a ненулевой степени. Чтобы уменьшить размер множества S'', вычислим определитель матрицы при следующем, $n=n_1+1$, значении с учетом того, что $P_{n_1}(a)=0$:

$$P_{n_1+1}(a)=\gcd(\det M|_{n=n_1+1},P_{n_1}(a)).$$

Размер множества S''' корней $P_{n_1+1}(a)$ будет меньше S'' , если $d=\deg P_{n_1}(a)>\deg P_{n_1+1}(a)$.

Если это не так, то можно вычислять $P_{n_1+k}(a)$ для $1 \leq k \leq N$, где N – оценка степени переменной n в полиноме $\mathrm{Resultant}(A_1, A_2)$, пока не понизится степень.

Пример 5. Продолжим рассмотрение предыдущего примера. Для операторов 2-расщепления мы за время 17.270 сек последовательно получаем

$$\deg P_0(a) = 45,\ \deg P_1(a) = 25,\ P_2(a) = (4a^4+1)a.$$

Для того чтобы убедиться, что лучшего результата мы не получим, нам придется вычислить

$$P_{2+k}(a) = (4a^4+1)a \ \text{ для } 1 \leq k \leq 26,$$

поскольку N в этом случае равно 26. На все вычисления затрачено 176.089 сек. Для одной из пар 3-расщепления за время 12.490 сек (т.е. в 20 раз быстрее GCRDpar) получаем

$$\deg P_0(a) = 48,\ \deg P_1(a) = 32,$$
$$\deg P_2(a) = 16,\ P_3(a) = 1.$$

Итак, мы видим, что имеет смысл вычислять полиномы $P_{n_1+j}(a)$, пока степень их полиномов понижается:

$$\deg P_{n_1}(a) > \deg P_{n_1+1}(a) > \ldots >$$
$$> \deg P_{n_2}(a) = \deg P_{n_2+1}(a).$$

Если получаем на очередном шаге $\deg P_{n_1+j}(a) = 0$, вычисления заканчиваются, и множество кандидатов пусто. Пусть, начиная с некоторого n_2, $n_2 \geq n_1$, мы получили $\deg P_{n_2}(a) = \deg P_{n_2+1}(a) = \ldots = \deg P_{n_2+k}(a) > 0$. Чем больше сделано шагов k, тем больше вероятность того, что дальнейшего понижения степени не будет. Естественно предположить, что имеет смысл заканчивать вычисления в случае, если $d = \deg P_{n_2}(a)$ намного меньше $d_1 = \deg P_{n_1}(a)$ или если k достаточно велико. Но если до конца цикла $k = 1, \ldots, N$ осталось мало шагов, можно досчитать до конца. Все эти соображения будут приняты в расчет, если, например, вычисления останавливать с вероятностью

$$p(k) = \left(1 - \frac{4\left(k - \dfrac{N}{2}\right)^2}{N^2}\right)^{\frac{d}{d_1}}.$$

Эксперименты показали, что такое правило остановки выгодно применять при $N > 10$.

Для того, чтобы выбрать взаимно простые операторы из (6), рассмотрим m-расщепление $L_0^a, \ldots, L_{m-1}^a$ дифференциального оператора L^a. Как сказано во введении, $R_i^a = \mathcal{R}L_i^a$, $i = 0, \ldots, m-1$. Разностные операторы A_1, A_2 имеют нетривиальный общий делитель тогда и только тогда, когда соотвествующие им параметризованные дифференциальные операторы B_1, B_2 имеют нетривиальный общий делитель с постоянными коэффициентами. Быстрая проверка последнего условия описана в предыдущем разделе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S.A.* m-Sparse Solutions of Linear Ordinary Differential Equations with Polynomial Coefficients // Discrete Mathematics. 2000. V. 217. P. 3–15.
2. *Abramov S.A., Petkovšek M., Ryabenko A.A.* Special Formal Series Solutions of Linear Operator Equations // Descrete Mathematics 2000. V. 210. P. 3–25.
3. *Рябенко А.А.* Maple-пакет символьного построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в виде степенных рядов // Программирование. 1999. № 5. С. 71–80.
4. *Глотов П.Е.* Алгоритм поиска наибольшего общего делителя полиномов Оре с полиномиальными коэффициентами, зависящими от параметра // Программирование. 1998. № 6. С. 14–21.
5. *Chardin M.* Differential Resultants and Subresultants / Fundamental of Computation Theory // Lecture Notes in Computer Science. V. 529. P. 180–189.