

КОНТРОЛЬНЫЕ ТОЧКИ В АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

С. А. Абрамов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, ВМиК МГУ, Москва),
Д. Е. Хмельнов (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва),
А. А. Рябенко (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва)

sergeyabramov@mail.ru, dennis_khmelnov@mail.ru, ryabenko@cs.msu.ru

Алгоритмы поиска рациональных решений (т.е. решений в виде рациональных функций) линейных дифференциальных, разностных и q -разностных систем являются важными блоками, используемыми всеми компьютерно-алгебраическими программными решателями таких систем. Любые улучшения этих алгоритмов представляют интерес. При этом нельзя забывать, что, например, желаемые рациональные решения у исследуемых систем могут отсутствовать, и информация об их отсутствии очень важна для решателя. Мы показываем, что нередко установить отсутствие рациональных решений линейных систем можно уже на начальных стадиях алгоритма поиска, что позволяет сократить расход времени и других ресурсов. Например, если определяющее уравнение, корни которого включают в себя валюации всех ненулевых рациональных решений, не имеет целых корней, то алгоритм может быть немедленно остановлен. Сходным образом дело может обстоять при вычислении границ степеней числителей и знаменателей.

Для того, чтобы расширить возможности выделения контрольных точек и связывания с ними тех или иных условий, имеющийся алгоритм имеет смысл в некоторых случаях несколько изменить, не затрагивая при этом его основной схемы (например, поменять не имеющий принципиального значения порядок каких-то действий и т.д.).

Внесение в алгоритм поиска рациональных решений проверок обобщаемого типа для скалярного случая (т.е. для случая одного уравнения) было предложено в [1]. Позднее в [2] были предложены некоторые контрольные проверки для систем линейных дифференциальных уравнений. Мы переносим эти идеи на случай разностных систем. Уместно будет заметить, что поиск решений для систем имеет свою специфику в сравнении со скалярным случаем, а в случае систем есть существенное различие для дифференциального и разностного случаев, например, в конструкции так называемого универсального знаменателя. (Сразу после этапа построения универсального знаменателя $U(x)$ идет контрольная точка: если определяющее уравнение имеет целые корни и n^* – максимальный из них, то выполняется проверка: если $n^* + \deg U(x) < 0$, то STOP.) Разностный случай ставит и свои специфические проблемы.

Нами была выполнена реализация [3] в среде Maple 2020 [4] как

модификация процедуры `RationalSolution` (см. [5, Разд. 4]). Первым аргументом процедуры является система полного ранга дифференциальных или разностных уравнений. Проведены эксперименты по сравнению версий алгоритма — с контрольными точками и без. Наши эксперименты показывают, что при отсутствии рациональных решений экономия времени составляет около 75%, а при наличии таких решений время увеличивается не более, чем на 20-25%.

Рассмотрение алгоритма под иным углом зрения позволит, возможно, внести в алгоритм какие-то еще контрольные точки, не рассмотренные нами. Равным образом, можно игнорировать какие-то из точек нашего набора. При этом нет смысла добиваться остановки в момент, когда естественное завершение не потребует ощутимых затрат и т.д.

Реализация и примеры использования процедуры `RationalSolution` доступны по адресу <http://www.ccas.ru/ca/lfs>.

Внесение контрольных точек в алгоритм может не быть связано с поиском именно рациональных решений. Одна из наших общих целей — привлечение внимания к целесообразности использования этой идеи при поиске решений любого вида.

Список литературы

- [1] A. Gheffar. Linear differential, difference and q -difference homogeneous equations having no rational solutions. *ACM Commun. Comput. Algebra*, **44**(3), 78–83 (2010).
- [2] S.A. Abramov. When the search for solutions can be terminated. In the book “Algorithmic Combinatorics: Enumerative Combinatorics, Special Functions, and Computer Algebra — in Honour of Peter Paule on his 60th Birthday”, Springer, 1–7 (2020).
- [3] S. Abramov, D. Khmelnov, A. Ryabenko. Checkpoints in searching for rational solutions of linear ordinary difference and differential systems. *ACM Commun. Comput. Algebra*, **54**(2), 18–29 (2020).
- [4] Maple online help, <http://www.maplesoft.com/support/help/>
- [5] С.А. Абрамов, Д.Е. Хмельнов. Знаменатели рациональных решений линейных разностных систем произвольного порядка. *Программирование*, No 2, 45–54 (2012).