ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 1995, N° 6, с.3 - 11

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 681.3.06

РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ И q-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

© 1995г. С. А. Абрамов

Вычислительный центр Российской академии наук

117967 Москва, ул. Вавилова 40

Поступила в редакцию 04.07.95 г.

Предлагается простой алгоритм вычисления полинома, делящегося на знаменатель любого рационального решения линейного разностного уравнения

$$a_n(x)y(x+n)+\ldots+a_0(x)y(x)=b(x)$$

с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью. Затем эта же задача решается для q-разностных уравнений.

Рассматриваются также неоднородные уравнения с правыми частями, имеющими вид гипергеометрических термов.

1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу поиска всех рациональных решений линейных разностных уравнений вида

$$a_n(x)y(x+n)+\ldots+a_0(x)y(x)=b(x) \qquad (1)$$

или, в операторной форме, $Ly(x)=b(x)$, где

$$L=a_n(x)E^n+\ldots+a_1(x)E+a_0(x). \qquad (2)$$

Здесь $a_0(x),\ldots,a_n(x),b(x)$ – полиномы над полем K характеристики 0. В [1] был предложен некоторый алгоритм поиска полинома $u(x)$ такого, что $u(x)$ делится на знаменатель любого (несократимого) решения уравнения (1). После построения $u(x)$ мы можем подставить $z(x)/u(x)$ в (1) вместо $y(x)$, где $z(x)$ – неизвестный полином. Это приводит к уравнению для $z(x)$ с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью. Поиск полиномиальных решений рассмотрен в [2 - 3].

Алгоритм, предложенный в [1], достаточно сложен. Мы покажем, что та же самая задача может быть решена значительно проще. Если мы возьмем в качестве исходных данных

$$A(x)=a_n(x-n),\ B(x)=a_0(x),$$

то выполнение следующего алгоритма дает полином $u(x)$, который может быть использован как знаменатель любого рационального решения уравнения (1):

input: ненулевые полиномы $A(x), B(x)$
output: полином $u(x)$

$u(x):=1;$
$R(m):=Res_x(A(x),B(x+m));$
if $R(m)$ имеет неотрицательные целые корни **then**
  N := наибольший неотрицательный целый корень $R(m)$;
  for $i=N,N-1,\ldots,0$ **do**
    $d(x):=НОД(A(x),B(x+i));$
    $A(x):=A(x)/d(x);$
    $B(x):=B(x)/d(x-i);$
    $u(x):=u(x)d(x)d(x-1)\ldots d(x-i)$
  od
fi.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01138а.

Пример 1.

$$(2x^3+13x^2+22x+8)E^3y-(2x^3+11x^2+18x+$$

$$+9)E^2y+(2x^3+x^2-6x)Ey-(2x^3-x^2-2x+1)y=0.$$

Легко видеть, что в этом случае $u(x) = x^3 - x$. Подстановка $y(x) = z(x)/(x^3 - x)$ приводит к уравнению

$$(2x^4+7x^3+7x^2+2x)E^3z+(-2x^4-11x^3-18x^2-$$

$$-9x)E^2z+(2x^4+7x^3-3x^2-18x)Ez+(-2x^4-11x^3-$$

$$-16x^2-x+6)z=0.$$

Общее полиномиальное решение последнего уравнения – это $C(2x^2-3x)$. Следовательно, общим рациональным решением исходного уравнения будет $C(2x-3)/(x^2-1)$.

Ниже мы докажем правильность алгоритма, но прежде условимся о терминологии.

Будем называть полином *специальным*, если его полная факторизация (разложение на неприводимые множители) над K имеет вид

$$p^{\gamma_0}(x)p^{\gamma_1}(x+1)\dots p^{\gamma_h}(x+h), \tag{3}$$

где $p(x)$ – неприводимый, $h, \gamma_0, \dots, \gamma_h$ – неотрицательные целые. Будем называть два специальных полинома *родственными*, если их произведение есть специальный полином.

Пусть $g(x)$ – специальный полином вида (3). Назовем делитель

$$p^{\sigma}(x+l) \tag{4}$$

полинома $g(x)$ *критическим первого рода*, если соотношение

$$p^{\sigma_1}(x+l_1)|g(x) \tag{5}$$

вместе с $l_1 > l$ влечет $\sigma_1 < \sigma$, а вместе с $\sigma_1 > \sigma$ влечет $l_1 < l$ (т.е. невозможно увеличить σ без уменьшения l, и увеличить l без уменьшения σ). Назовем делитель вида (4) полинома $g(x)$ *критическим второго рода*, если соотношение (5) вместе с $l_1 < l$ влечет $\sigma_1 < \sigma$, а вместе с $\sigma_1 > \sigma$ влечет $l_1 > l$ (т.е. невозможно увеличить σ без увеличения l, и уменьшить l без уменьшения σ).

Пусть $p^{\alpha_1}(x+M_1), \dots, p^{\alpha_s}(x+M_s)$ – все критические делители первого рода, а $p^{\beta_1}(x+m_1), \dots, p^{\beta_t}(x+m_t)$ – соотвественно, все критические делители второго рода полинома $g(x)$. Пусть $M_1 > \dots > M_s$ и $m_1 < \dots < m_t$. Тогда $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$ и $\beta_1 < \dots < \beta_t$. Дополнительно положим $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Пусть $A(x), B(x) \in K[x]$. Назовем рассматриваемый специальный полином $g(x)$ вида (3) *ограниченным* парой $(A(x), B(x))$, если

$$p^{\alpha_i-\alpha_{i-1}}(x+M_i)|A(x), i=1,\dots,s, \tag{6}$$

$$p^{\beta_j-\beta_{j-1}}(x+m_j)|B(x), j=1,\dots,t. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть результатом применения оператора (2) к рациональной функции $S(x)$ со специальным знаменателем будет полином. Тогда знаменатель $S(x)$ ограничен парой $(a_n(x-n), a_0(x))$.

Доказательство. Пусть знаменателем функции $S(x)$ служит полином $g(x)$ вида (3). Докажем, например, (6). Пусть

$$a_n(x-n) = p^{\delta_1}(x+M_1)\dots p^{\delta_s}(x+M_s)f(x),$$

где $\delta_1, \dots, \delta_s$ – неотрицательные целые и $f(x)$ не делится на $p(x+M_i), i=1,\dots,s$. Функция $S(x)$ может быть разложена в сумму полинома и дробей вида

$$\frac{w(x)}{p^{\gamma}(x+l)}, \deg w(x) < \deg p^{\gamma}(x+l),$$

с попарно различными значениями l. Это разложение включает дроби со знаменателями

$$p^{\alpha_1}(x+M_1), \dots, p^{\alpha_s}(x+M_s).$$

Применим ооператор L к каждому элементу разложения и сложим дроби с равными знаменателями. Это даст нам разложение функции $LS(x)$. Следовательно, если $\alpha_i - \delta_i > \alpha_{i-1}$ для некоторого i, то разложение $LS(x)$ содержит дробь со знаменателем $p^{\alpha_i - \alpha_{i-1}}(x + M_i)$ и $LS(x)$ не может быть полиномом. Противоречие.

Теорема 2. Пусть специальный полином $g(x)$ ограничен парой $(A(x), B(x))$. Пусть

$$R(m) = Res_x(A(x), B(x+m)).$$

Пусть $R(m)$ имеет неотрицательные целые корни и v – наибольший из них. Пусть

$$d(x) = НОД(A(x), B(x+v)), c(x) = \\ = d(x)d(x-1)\dots d(x-v).$$

Пусть

$$\tilde{g}(x) = g(x)/gcd(g(x), c(x)),$$

$$\tilde{A}(x) = A(x)/d(x),$$

$$\tilde{B}(x) = B(x)/d(x-v).$$

Тогда $\tilde{g}(x)$ ограничен парой $(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x))$ и $g(x)|c(x)\tilde{g}(x)$.

Доказательство. Вторая часть утверждения очевидна. Для доказательства первой части заметим, что критические делители полинома $\tilde{g}(x)$ являются критическими делителями $g(x)$. Вернемся к (6), (7). Если $g(x)$ был преобразован в $\tilde{g}(x)$, то разности $\alpha_i - \alpha_{i-1}, i = 1, \dots, s$ и $\beta_j - \beta_{j-1}, j = 1, \dots, t$ не увеличились. Различие между $A(x)$ и $\tilde{A}(x)$, и, соответственно, между $B(x)$ и $\tilde{B}(x)$, либо не задевают множителей $p(x + M_i), i = 1, \dots, s, p(x + m_j), j = 1, \dots, t$, либо задевают только показатели степеней полиномов $p(x+M_1), p(x+m_1)$ (или даже только один из этих показателей). Но в последнем случае показатели степени полиномов $p(x+M_1), p(x+m_1)$ в $g(x)$ или подвергаются тем же самым преобразованиям, что и соответствующие показатели в $A(x)$ и $B(x)$, или просто обращаются в нуль.

В заключение заметим, что если $R(m)$ не имеет неотрицательных целых корней, то 1 – это единственный полином, ограниченный парой $(A(x), B(x))$.

Последняя теорема показывает, что алгоритм, предложенный в самом начале, позволяет нам вычислить полином $u(x)$, который делится на любой специальный полином, ограниченный парой

$$(A(x), B(x)).$$

Но любая рациональная неполиномиальная функция $S(x)$ может быть представлена в виде $S_1(x) + \dots + S_k(x)$, где $S_1(x), \dots, S_k(x)$ – рациональные функции с неродственными специальными знаменателями. Произведение этих знаменателей равно знаменателю функции $S(x)$. Применение оператора (2) к $S_i(x), 1 \le i \le k$, дает или полином, или сумму полинома и рациональной функции, знаменатель которой является специальным и родственным знаменателю функции $S_i(x)$. Следовательно, если $S(x)$ является решением уравнения (1), то знаменатель каждой $S_i(x), i = 1, \dots, k$ ограничен парой $(a_n(x-n), a_0(x))$. И мы получим требуемый универсальный знаменатель, использовав $A(x) = a_n(x-n), B(x) = a_0(x)$ как входные данные предложенного алгоритма.

В заключение этого параграфа мы уточним наши предположения относительно поля K. Очевидно, мы должны уметь находить целые корни алгебраического уравнения $R(m)$. Наше поле коэффициентов мы предполагаем (как в [1]) *подходящим* полем в смысле следующего определения:

1. $\mathbf{Q} \subseteq K$;

2. имеется алгоритм нахождения целочисленных корней алгебраических уравнений над K с одной неизвестной.

Поле $\mathbf{Q}$ является, очевидно, подходящим. Легко видеть, что простое расширение (алгебраическое или трансцендентное) подходящего поля K само подходящее.

Алгоритм, предложенный в этом параграфе, является вариантом алгоритма, опубликованного в [4]. К сожалению, в текст этой статьи вкралась ошибка, которая была исправлена в Поправке. Статья [5] так же не свободна от ошибок. Данная версия алгоритма и приведенное доказательство не публиковались ранее.

Как уже говорилось, алгоритм, описанный в [1] – более сложный. Но он зато учитывает все $a_0(x), \ldots, a_n(x), b(x)$, а не только $a_0(x), a_n(x)$. Априори, такой алгоритм может давать знаменатель меньшей степени. Однако, этот вопрос пока не исследовался.

Предложенный выше алгоритм является достаточно удобным для компьютерной реализации (намного более удобным, чем алгоритм, предложенный в [1]). Помимо этого, он может быть адаптирован для случая q-разностных уравнений.

2. q-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим теперь проблему поиска знаменателей рациональных решений линейных q-разностных уравнений вида

$$a_n(x)y(q^n x) + \ldots + a_1(x)y(qx) + \\ + a_0(x)y(x) = b(x), \qquad (8)$$

или, в операторной форме, $Ly(x) = b(x)$, где

$$L = a_n(x)Q^n + \ldots + a_1(x)Q + a_0(x).$$

Здесь $a_0(x), \ldots, a_n(x), b(x) \in K[x]$, q – неопределенный параметр. Наше поле коэффициентов K является *q-подходящим* в смысле следующего определения:

1. $\mathbf{Q}(q) \subseteq K$;

2. имеется алгоритм нахождения корней вида q^m, m – неотрицательное целое, алгебраических уравнений над K с одной неизвестной.

Поле $\mathbf{Q}(q)$ является, очевидно, q-подходящим. Легко видеть, что простое расширение (алгебраическое или трансцендентное) q-подходящего поля K само q-подходящее.

Исследуем полином $u(x)$, который получается в результате применения q-аналога алгоритма, предложенного в разделе 1 (берем $B(q^i x)$ вместо $B(x+i)$, $d(q^{-i}x)$ – вместо $d(x-i)$ и т.д.). Этот q-аналог алгоритма мы запишем в виде функции P:

```
function P(A(x), B(x));
  u(x) := 1;
  R(m) := Res_x(A(x), B(q^m x));
  if R(m) имеет неотрицательные целые корни then
      N := наибольший такой корень
      for i = N, N − 1, ..., 0  do
        d(x) := НОД(A(x), B(q^i x));
        A(x) := A(x)/d(x);
        B(x) := B(x)/d(q^{−i} x);
        u(x) := u(x)d(x)d(q^{−1} x)...d(q^{−i} x)
      od
  fi;
  return(u(x)).
```

Заметим, что уравнение $R(m) = 0$ имеет вид

$$f_t q^{tm} + f_{t-1} q^{(t-1)m} + \ldots + f_1 q^m + f_0 = 0,$$

$f_0, \ldots, f_t \in K$. Поиск его целых неотрицательных корней равнозначен поиску корней вида q^m алгебраического уравнения

$$f_t X^t + f_{t-1} X^{(t-1)} + \ldots + f_1 X + f_0 = 0$$

над K. Поле K является q-подходящим, и такие корни могут быть найдены.

Теорема 3. Пусть (8) имеет решение $v(x)/w(x)$ такое, что

$$v(x), w(x) \in K[x], gcd(v(x), w(x)) = 1,$$

$$w(x) = x^\alpha w^*(x), w^*(0) \neq 0.$$

Пусть

$$a_0(x) = x^\beta a_0^*(x), a_n(x) = x^\gamma a_n^*(x), a_0^*(0) \neq 0, \quad a_n^*(0) \neq 0.$$

Пусть

$$A(x) = a_n^*(q^{-n}x), B(x) = a_0^*(x), u(x) = = P(A(x), B(x)).$$

Тогда

$$w^*(x)|u(x). \tag{9}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого неприводимых полиномов $p_1(x), p_2(x) \in K[x]$ таких, что $p_1(0) \neq 0, p_2(0) \neq 0$, мы можем найти самое большее одно неотрицательное целое l такое, что $p_1(q^l x)$ и $p_2(q^l x)$ равны с точностью до множителя из K. Таким образом, все наши рассуждения, которые приводились в разделе 1 останутся в силе, если мы заменим сдвиги

$$x \to x + h, x \to x - h,$$

где h – неотрицательное целое, на

$$x \to q^h x, x \to q^{-h} x,$$

и если мы будем игнорировать множитель x при рассмотрении неприводимых множителей полиномов.

Чтобы рассмотреть $a_0(x), a_n(x)$ целиком, заметим, что любое рациональное решение уравнения (8) может быть записано в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{l_1}{x} + \ldots + \frac{l_m}{x^m}, \tag{10}$$

где $f(x), g(x) \in K[x]$; $g(0) \neq 0$; $l_1, \ldots, l_m \in K$; m – неотрицательное целое. Результаты подстановки $f(x)/g(x)$ и

$$\frac{l_1}{x} + \ldots + \frac{l_m}{x^m} \tag{11}$$

вместо $y(x)$ в левую часть (8) будут рациональными функциями со взаимно простыми знаменателями. Следовательно, эти функции должны быть полиномами. Мы уже знаем, как найти полином $u(x)$ такой, что $g(x)|u(x)$. Теперь достаточно найти верхнюю границу M для m, и тогда $U(x) = x^M u(x)$ можно будет взять в качестве универсального знаменателя всех рациональных решений уравнения (8).

Для нахождения границы M можно использовать технику определяющих уравнений (хорошо известную в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений). Запишем все $a_i(x)$, входящие в (1), в виде

$$a_i(x) = x^{\alpha_i} a_i^*(x) \tag{12}$$

где $a_i^*(x) \in K[x], a_i^*(0) \neq 0, \alpha_i$ – неотрицательное целое. Если $a_i(x)$ – нулевой полином, то $a_i^*(x) = a_i(x), \alpha_i = \infty$. Пусть

$$\alpha = \min\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}.$$

Допустим, что $\alpha = \alpha_i$ для $i = i_1, \ldots, i_s$. Если $m < \alpha$, то подстановка (11) вместо $y(x)$ в левую часть (8) заведомо дает полином. Если $m > \alpha$, то в выражение, являющееся результатом такой подстановки, член $x^{\alpha - m}$ должен входить с нулевым коэффициентом. Это условие позволяет выписать определяющее уравнение

$$a_{i_1}^*(0)(q^{-m})^{i_1} + \ldots + \\ + a_{i_s}^*(0)(q^{-m})^{i_s} = 0. \tag{13}$$

Итак, если $q^{m_1}, \ldots, q^{m_t}$ суть все корни вида q^l, l – неотрицательное целое, алгебраического уравнения

$$a^*_{i_s}(0)X^{i_1-i_s}+a^*_{i_{s-1}}(0)X^{i_1-i_{s-1}}+\ldots+$$
$$+a^*_{i_1}(0)=0, \qquad (14)$$

то в (10) мы можем взять $M=\max\{m_1,\ldots,m_t,\alpha\}$.

Полный алгоритм нахождения универсального знаменателя $U(x)$ рациональных решений уравнений вида (8) запишется так:

input: уравнение (8)
output: универсальный знаменатель $U(x)$

найти $a^*_i(x),\alpha_i (i=0,\ldots,n)$ (см.(12));
$\alpha:=\min\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\}$;
построить уравнение (14);
$N:=\max\{m|q^m$ - корень уравнения (14)$\}$, или
-1 если множество этих корней пусто;
$M:=\max\{N,\alpha\}$;
$U(x):=x^M P(a^*_n(q^{-n}x),a^*_0(x))$.

После построения $U(x)$ мы можем подставить $y(x)=z(x)/U(x)$ с неопределенным $z(x)$ в (8). Это даст нам уравнение для $z(x)$ с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью. Поиск полиномиальных решений q-разностных уравнений разобран в [3].

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$q^3(qx+1)Q^2y-2q^2(x+1)Qy+(x+q)y=$$
$$=(q^{6}-2q^3+1)x^2+(q^{4}-2q^3+1)x.$$

Найдем универсальный знаменатель $U(x)$ для его рациональных решений. Здесь $\alpha=0$, а алгебраическое уравнение (14) имеет вид

$$qX^2-2q^2X+q^3=0,$$

при этом q – единственный его корень интересующего нас вида. Итак, $M=1$. Теперь мы находим множитель $x+q$ полинома $U(x)$ при помощи функции P. Таким образом, $U(x)=x(x+q)$. Подставляя в исходное уравнение $y=z(x)/x(x+q)$, получим

$$Q^2z-2Qz+z=(q^5-2q^3+1)x^2+(q^4-2q^3+q)x.$$

Последнее уравнение имеет общее полиномиальное решение

$$C+qx^2+x^3,$$

где C – произвольная постоянная. Получили общее рациональное решение исходного уравнения:

$$\frac{C+qx^2+x^3}{x(qx+1)}.$$

3. СЛУЧАЙ, КОГДА q – ЧИСЛО

В предыдущем параграфе мы считали q неопределенным параметром (еще одной переменной). Но q-разностные уравнения могут рассматриваться и с конкретным фиксированным числом в роли q. Пусть q – число, $q\neq 1$. Пусть K – это поле $\mathbf{Q}$, если q является рациональным числом, и $\mathbf{Q}(q)$ в противном случае. Если мы хотим сохранить главные шаги предыдущего алгоритма, то мы должны наложить ограничения на q.

Прежде всего, мы не можем использовать в роли q корни из единицы, поскольку иначе не будет справедливым замечание, сделанное в начале доказательства теоремы 3. Далее, мы должны внимательно отнестись к проблеме нахождения корней вида q^m алгебраических уравнений над K. Если q рационально или трансцендентно, то такие корни находятся легко. Если q – алгебраическое над $\mathbf{Q}$ и $|q|\neq 1$, то мы можем построить алгебраическое уравнение над $\mathbf{Q}$, которому удовлетворяют все корни старого уравнения и найти границы для модулей ненулевых корней нового уравнения. Это даст нам возможность найти верхнюю границу для m.

Но если q – алгебраическое комплексное число и $|q| = 1$, то рассматриваемая проблема становится слишком сложной. Автору известно полное решение этой проблемы только для случая, когда q является квадратичной иррациональностью, а заданное уравнение – квадратным над $\mathbf{Q}$ ([6]).

Все остальные шаги алгоритма, описанного в разделе 2, остаются без изменения.

4. ПРАВАЯ ЧАСТЬ В ВИДЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТЕРМА

Итак, мы можем быстро находить рациональные решения линейных разностных и q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми частями. Быстрый алгоритм решения аналогичной задачи, связанной с дифференциальными уравнениями, был предложен в [1, 7]. Задача нахождения рациональных решений уравнений (1), (8) или аналогичного дифференциального уравнения является достаточно важной в компьютерной алгебре, поскольку многие другие интересные задачи могут быть сведены к ней.

Пусть правая часть линейного неоднородного уравнения $Ly = b$ является гипергеометрическим термом:

$$Eb(x) = R(x)b(x) \tag{15}$$

для некоторой $R(x) \in K(x)$. Рассмотрим задачу поиска тех решений данного уравнения, которые имеют вид гипергеометрических термов. Пусть коэффициенты оператора L будут полиномами. М. Петковшек показал в [8], что если гипергеометрический терм $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1), то он имеет вид $F(x)b(x)$ с некоторой рациональной $F(x)$. Можно подставить $F(x)b(x)$ вместо $y(x)$ в (1), считая $F(x)$ неизвестной. Это даст уравнение с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью для $F(x)$. Итак, алгоритм поиска рациональных решений оказывается полезным для поиска решений в виде гипергеометрических термов.

Пример 3. Уравнение

$$y(x+1) - y(x) = b(x)$$

с $b(x)$ в виде гипергеометрического терма может быть преобразовано подстановкой $y = F(x)b(x)$ в следующее уравнение для $F(x)$:

$$R(x)F(x+1) - F(x) = 1,$$

где $R(x) = b(x+1)/b(x)$. Последнее уравнение легко преобразуется в уравнение с полиномиальными коэффициентами и полиномиальной правой частью:

$$a_1(x)F(x+1) + a_0(x)F(x) = c(x),$$

к которому остается применить наш алгоритм.

Пусть $A(x) = a_1(x-1), B(x) = a_0(x)$, где $a_0(x), a_1(x)$ – коэффициенты полученного уравнения для $F(x)$. В процессе применения хорошо известного алгоритма Госпера [9], разработанного специально для неопределенного гипергеометрического суммирования, знаменатель $u(x)$ рациональной функции $F(x)$ вычислялся бы следующим образом:

$u(x) := 1$;
$R(m) := Res_x(A(x), B(x+m))$;
if $R(m)$ имеет неотрицательные целые корни **then**
  $N :=$ наибольший неотрицательный целый корень $R(m)$;
  for $i = 0, 1, ..., N$ **do**
    $d(x) := НОД(A(x), B(x+i))$;
    $A(x) := A(x)/d(x)$;
    $B(x) := B(x)/d(x-i)$;
    $u(x) := u(x)d(x)d(x-1)\ldots d(x-i)$
  od
fi.

В общем случае для задачи неопределенного гипергеометрического суммирования последний алгоритм дает $u(x)$ более низкой степени, чем наш. Но последний алгоритм непригоден для уравнений произвольного порядка с произвольными полиномиальными правыми частями, на что указывает следующий пример.

Пример 4. Уравнение

$$(x+5)(x+8)^2y(x+4)-(x^3+11x^2+38x+ \\ +40)y(x+2)+x(x+2)y(x)=0$$

имеет рациональное решение

$$\frac{1}{x(x+2)^2(x+4)^2},$$

но знаменатель $x(x+2)^2(x+4)^2$ не может быть получен по последнему алгоритму (равным образом не может быть получено кратное этого знаменателя): применение последнего алгоритма дает здесь

$$u(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4),$$

применение же нашего алгоритма даст

$$u(x)=x(x+1)(x+2)^2(x+3)^2(x+4)^2.$$

Идея примера 3 сообщена мне проф. Ф. Штрелем.

Результат Петковшека, упомянутый выше, может быть обобщен на случай произвольного кольца полиномов Оре (определение см. в [10]). Пусть k – поле коэффициентов. Если $\theta f/f\in k$, то $\theta f=af$ для некоторого $a\in k$. Индукция по m позволяет показать, что $\theta^m f/f\in k$ для некоторого $m>0$. В самом деле, пусть $\theta^{m-1}f=cf, c\in k$. Тогда $\theta^m f=\theta(cf)=\sigma(c)\theta f+\delta(c)f=(a\sigma(c)+\delta(c))f$, но $\sigma(c),\delta(c)\in k$. Теперь ясно, что $L*_\theta f=df, d\in k$ для некоторого $L\in k[x;\sigma,\delta]$.

Таким образом, мы можем использовать этот результат не только в разностном случае, но и, например, в q-разностном (см. [11]) и в дифференциальном случаях, т.е. мы можем в (15) вместо E использовать Q, d/dx и т.д.

Автор благодарит М. Петковшека и Ф. Штреля за дискуссии, связанные с содержанием этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // ЖВМ и МФ. 1989. Т.29. N° 11. С.1611 - 1620.

2. *Абрамов С.А.* Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений // Вестник МГУ. Сер.15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1989. N° 3. С.56 - 60.

3. *Abramov S.A., Bronstein M., Petkovšek M.* On polynomial solutions of linear operator equations // Proc. of ISSAC'91. ACM press. PP.290 - 296.

4. *Абрамов С.А.* Знаменатели рациональных решений линейных разностных уравнений // Программирование. 1994. N° 2. С.49 - 52.

5. *Abramov S.A.* Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients // Proc. of ISSAC'95. 1995. ACM press. PP.303 - 308.

6. *Абрамов С.А.* Сложность решения показательных уравнений и проблема орбит для матриц второго порядка // Вестник МГУ. Сер.15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1994. N° 4. С.56 - 60.

7. *Abramov S.A., Kvashenko K.Yu.* Fast algorithm to search for rational solutions of linear differential equations with polynomial coefficients // Proc. of ISSAC'91. 1991. ACM press. PP.267 - 270.

8. *Petkovšek M.* Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients // J. Symb. Comp. 1992. V.14. PP.234 - 264.

9. *Gosper R.W.* Decision procedures for indefinite hypergeometric summation // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 1978. V.75. PP.40 - 42.

10. *Bronstein M., Petkovšek M.* On Ore rings, linear operators and factorization // Программирование. 1994. N° 1. C.27 - 45.

11. *Abramov S.A., Petkovšek M.* Finding all q-hypergeometric solutions of q-difference equations // Proc. of FPSAC'95. 1995. Universite de Marne la Valle. PP.1 - 10.