не является LK-матрицей, то существует $l\in N\setminus L$ такой, что $a_{lk}=0$ $\forall k\in L$. Таким образом мы получим $\nu(L)$ нулевых недиагональных элементов, стоящих на l-строке (здесь $\nu(L)$ — число элементов множества L). Кроме того для каждого $i\in N\setminus L$ и $i\neq l$ существует индекс $j\neq i$ такой, что $a_{ij}=0$ (по определению множества L), следовательно, число нулевых недиагональных элементов всех строк, имеющих индекс $i\notin L$, не меньше $\nu(L)+(n-1-\nu(L))=n-1$. Так как $H_2\subset L$, то из этого следует, что A не является H_2-матрицей. Это противоречит предположению, и следствие 3 доказано.

§ 3. Числовой пример

Посмотрим систему (3), где

$$A=\begin{Vmatrix}4&2&0&1&0\\2&5&0&1&0\\2&2&8&2&2\\1&1&0&2&0\\0&0&1.5&4.5&6\end{Vmatrix},\qquad b=\begin{Vmatrix}-2\\-18\\28\\-6\\9\end{Vmatrix}.$$

Матрица A разложима, не строго доминантна, не является ни H_1-матрицей, ни H_2-матрицей. Все же A есть LK-матрица ($K=\{1,\ 2\}$ и $L=\{1,\ 2,\ 3\}$), следовательно, из теоремы 1 вытекает, что $A\in M^0$. Вычисление на ЭВМ «Минск-22» дает следующие результаты. После 15 шагов метода Якоби получим

$x_1=1.983200$, $x_2=-4.014574$, $x_3=3.972366$, $x_4=-2.020976$, $x_5=1.969691$.

После 15 шагов метода Гаусса — Зейделя получим

$x_1=1.999999$, $x_2=-3.999999$, $x_3=4.000000$, $x_4=-1.999999$, $x_5=1.999999$.

Точное решение этой системы таково: $x_1=2$, $x_2=-4$, $x_3=4$, $x_4=-2$, $x_5=2$.

Поступила в редакцию 24.12.1973

Цитированная литература

1. *R. S. Varga.* Matrix iterative analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

УДК 518:512.34

РАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОНЕНТА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО РЕКУРРЕНТНОГО СООТНОШЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С. А. АБРАМОВ

(Москва)

Рассматривается соотношение $F(x+1)+aF(x)=R(x)$, где $R(x)$ — рациональная функция. Предлагается метод выделения рациональной компоненты (слагаемого) решения этого соотношения.

В работах [1, 2] изучаются вопросы решения линейных рекуррентных соотношений с рациональными правыми частями в поле рациональных функций. В том случае, когда соотношение не имеет рационального решения, может оказаться желательным выделить из решения соотношения некоторую рациональную компоненту так, чтобы другая компонента удовлетворяла более простому (в каком-то смысле) соотношению. В настоящей работе предлагается метод выделения из решения соотношения первого порядка рационального слагаемого так, чтобы второе слагаемое удовлетворяло соотношению с прежней левой частью, но с измененной правой частью. Новая правая часть – это рациональная функция, знаменатель которой имеет возможно меньшую степень.

1. Мы будем иметь дело с соотношением

$$F(x+1)+aF(x)=R(x). \tag{1}$$

Здесь $R(x)$ – известная рациональная функция. Относительно коэффициентов полагаем, что они принадлежат подходящему полю P (в этом месте и далее используем определения и обозначения [2]). Таким образом, $a\in P$, $a\neq 0$, $R(x)\in P\langle x\rangle$.

Займемся поиском функции $T(x)\in P\langle x\rangle$ такой, что $S(x)=R(x)-T(x+1)-aT(x)$ имеет в несократимой форме знаменатель возможно меньшей степени. Функцию $S(x)$ будем называть гранью функции $R(x)$. Про $T(x)$ будем говорить, что она реализует грань $S(x)$. Как мы увидим, грань и реализующая ее рациональная функция определяются, вообще говоря, неоднозначно.

Из $R(x)$ можно выделить целую часть $E(x)$. Соотношение $F(x+1)+aF(x)=E(x)$ допускает решение в виде многочлена. Далее, если $F(x)$ – правильная дробь (т. е. числитель $F(x)$ имеет более низкую степень, чем знаменатель), то $F(x+1)+aF(x)$ – тоже правильная дробь. Эти обстоятельства позволяют считать $R(x)$, $S(x)$ и $T(x)$ правильными дробями.

2. Наиболее прост случай, когда рассматриваемые рациональные функции допускают разложение

$$\frac{q_m(x)}{p(x+m)^\alpha}+\frac{q_{m-1}(x)}{p(x+m-1)^\alpha}+\ldots+\frac{q_0(x)}{p(x)^\alpha}, \tag{2}$$

где $p(x)$ – неприводимый в $P[x]$, $\deg q_i(x)<\deg p(x)$, $i=0,1,\ldots,m$, α – натуральное, m – неотрицательное целое.

Совершенно очевидно

Предложение 1. *Пусть $F(x)$ разлагается в сумму* (2), *тогда $F(x+1)+aF(x)$ разлагается в сумму такого же вида:*

$$\frac{\overset{*}{q}_{m+1}(x)}{p(x+m+1)^\alpha}+\frac{q_m{}^*(x)}{p(x+m)^\alpha}+\ldots+\frac{q_0{}^*(x)}{p(x)^\alpha},$$

при этом $q^*{}_{m+1}(x)=q_m(x+1)$, $q_0{}^*(x)=aq_0(x)$. Далее, если соотношение (1) *имеет рациональное решение и $R(x)$ имеет вид* (2), *то имеющееся рациональное решение будет функцией такого же вида.*

Из предложения 1 можно вывести следствие, содержание которого составляет

Предложение 2. *Пусть $R(x)$ разлагается в сумму* (2). *Пусть соотношение* (1) *не имеет рационального решения. Пусть $S(x)$ – грань $R(x)$, и пусть $T(x)$ реализует $S(x)$. Тогда $S(x)$ и $T(x)$ являются рациональными функциями вида* (2).

Теперь можно предложить способ решения поставленной задачи для разбираемого простейшего случая.

Предложение 3. *Пусть $R(x)$ разлагается в сумму* (2). *Тогда или соотношение* (1) *имеет рациональное решение, или для любого целого i грань рациональной функции $R(x)$ может быть построена в виде*

$$\frac{v(x)}{p(x+i)^\alpha},\qquad v(x)\in P[x],\qquad \deg v(x)<\deg p(x).$$

Доказательство. Предположим вначале, что соотношение (1) имеет рациональное решение $F(x)$. Тогда, по предложению 1,

$$F(x)=T_1(x)+F_1(x),$$

где

$$T_1(x)=\frac{q_m(x-1)}{p(x+m-1)^\alpha},$$

$$F_1(x+1)+aF_1(x)=R(x)=R_1(x)-\frac{q_m(x)}{p(x+m)^\alpha}-a\frac{q_m(x-1)}{p(x+m-1)^\alpha}.$$

Получается, что или $R_1(x)=0$, или $\operatorname{Dis} R_1(x)<\operatorname{Dis} R(x)$. Если верно первое, то $F(x)=T_1(x)$ удовлетворяет (1), иначе можем продолжить процесс и построить $T_2(x)$, $R_2(x)$, ..., $T_k(x)$, $R_k(x)$, где $R_k(x)=0$. Тогда решением соотношения (2), очевидно, будет

(3) $$T_1(x)+\ldots+T_k(x).$$

Если соотношение (1) не имеет рационального решения, то, выполняя описанный процесс, в конце концов приходим к тому, что $R_k(x)=\dfrac{u(x)}{p(x+j)^\alpha}$, j — некоторое целое. Тогда, по предложению 2, $R_k(x)$ является гранью $R(x)$ и сумма (3) реализует $R_k(x)$.

Продолжая процесс далее, получаем $R_{k+1}(x)$, $R_{k+2}(x)$, ..., которые имеют вид

$$\frac{u_1(x)}{p(x+j-1)^\alpha},\quad \frac{u_2(x)}{p(x+j-2)^\alpha},\ \ldots.$$

Если в соотношение $F_k(x+1)+aF_k(x)=R_k(x)$ подставить $F_k(x)=T_{k+1}(x)+$ $+F_{k+1}(x)$, где

$$T_{k+1}(x)=\frac{(1/a)\,u(x)}{p(x+j)^\alpha},$$

то получим

$$F_{k+1}(x+1)+aF_{k+1}(x)=R_{k+1}(x)=\frac{(1/a)\,u(x+1)}{p(x+j+1)^\alpha}.$$

Таким образом, мы описали процедуру, выполнение которой приводит к построению рационального решения соотношения (1) с правой частью вида (2) в случае, когда рациональное решение существует. Если рационального решения не существует, то предложенная процедура позволяет по любому целому i построить грань рациональной функции $R(x)$ в виде $\dfrac{v(x)}{p(x+i)^\alpha}$, а также построить рациональную функцию, реализующую эту грань.

3. Перейдем к общему случаю для $R(x)$. Прежде всего, условимся называть простейшие дроби

$$\frac{b(x)}{q(x)^\alpha}\ \text{и}\ \frac{c(x)}{q(x+i)^\alpha}\quad (q(x)\ \text{неприводим в}\ P[x])$$

соседствующими. В соответствии с этим будем говорить о соседствующих элементах разложения данной рациональной функции в сумму простейших.

Предложение 4. *В разложение в сумму простейших грани рациональной функции $R(x)$ не входят соседствующие элементы. Каждый элемент разложения грани является гранью суммы соседствующих элементов разложения $R(x)$. Если разложение грани рациональной функции $R(x)$ содержит два элемента, знаменатели которых представляют собой $p(x)^\alpha$ и $p(x+k)^\beta$, то $k=0$.*

Доказательство. Утверждение прямо следует из предложений 2, 3.

Предложение 5. *Пусть* $T^*(x)\in P\langle x\rangle$. *Пусть* $R^*(x)=R(x)-T^*(x+1)-aT^*(x)$. *Пусть* $S(x)$ *является гранью* $R^*(x)$, *тогда* $S(x)$ *является гранью* $R(x)$.

Доказательство. Имеем для некоторого $T(x)\in P\langle x\rangle$

$$S(x)=R^*(x)-T(x+1)-aT(x)=R(x)-[T(x+1)+T^*(x+1)]-a[T(x)+T^*(x)],$$

причем степень знаменателя $S(x)$ наименьшая из возможных. С другой стороны, для каждой $S_1(x)\in P\langle x\rangle$ такой, что

$$S_1(x)=R(x)-T_1(x+1)-aT_1(x)$$

для некоторого $T_1(x)\in P\langle x\rangle$, имеем

$$S_1(x)=R^*(x)+T^*(x+1)+aT^*(x)-T(x+1)-aT(x)=$$

$$=R^*(x)-[T(x+1)-T^*(x+1)]-a[T(x)-T^*(x)].$$

Таким образом, степень знаменателя $S_1(x)$ не может быть меньше степени знаменателя $S(x)$.

Следствием предложения 5 является

Предложение 6. *Пусть* $\operatorname{Dis} R(x)=0$. *Тогда* $R(x)$ *является гранью* $R(x)$.

Предложение 7. *Пусть* $T(x)\in P\langle x\rangle$ *и* $S(x)=R(x)-T(x+1)-aT(x)$. *Пусть* $\operatorname{Dis} S(x)=0$. *Тогда* $S(x)$ *— грань* $R(x)$.

Доказательство. Утверждение является следствием предложений 5, 6.

Предложение 8. *Пусть* $\operatorname{Dis} R(x)>0$. *Тогда можно построить* $U(x)\in P\langle x\rangle$ *такую, что либо* $R(x)-U(x+1)-aU(x)=0$, *либо* $\operatorname{Dis}[R(x)-U(x+1)-aU(x)]<\operatorname{Dis} R(x)$.

Доказательство. Пусть

$$R(x)=\frac{r_1(x)}{r_2(x)},\quad r_1(x),\ r_2(x)\in P[x],\qquad \text{НОД}(r_1(x),r_2(x))=1.$$

Пусть $\operatorname{Dis} R(x)=h$. Можем найти $t(x)=\text{НОД}(r_2(x),r_2(x+h))$. Применяя несколько раз алгоритм Евклида и производя деления многочленов, можно представить $r_2(x)$ в виде $v(x)w(x)$, и при этом многочлен $v(x)$ строится исходя из следующего. Пусть разложение $t(x)$ в произведение неприводимых имеет вид $t_1(x)^{\alpha_1}t_2(x)^{\alpha_2}\dots t_n(x)^{\alpha_n}$, пусть $r_2(x)=t_1(x)^{\beta_1}t_2(x)^{\beta_2}\dots t_n(x)^{\beta_n}r_2^*(x)$ и многочлен $r_2^*(x)$ свободен от $t_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$. Тогда $v(x)=t_1(x)^{\beta_1}\dots t_n(x)^{\beta_n}$.

Построение многочлена $v(x)$ не требует разложения $t(x)$ и $r_2(x)$ в произведение неприводимых. В самом деле, последовательно могут быть построены многочлены

$$v^{(0)}(x)=t(x),\qquad r^{(0)}(x)=r_2(x)/t(x),\qquad d^{(0)}(x)=\text{НОД}(r^{(0)}(x),v^{(0)}(x)),$$

$$v^{(i)}(x)=v^{(i-1)}(x)d^{(i-1)}(x),\qquad r^{(i)}(x)=r^{(i-1)}(x)/d^{(i-1)}(x),$$

$$d^{(i)}(x)=\text{НОД}(r^{(i)}(x),v^{(i)}(x)),\qquad i=1,2,\dots.$$

Как только обнаруживается, что $d^{(k)}(x)=1$, можно заключить, что $v(x)=v^{(k)}(x)$. Ясно, что $v(x)$ и $w(x)=r_2(x)/v(x)$ взаимно просты.

Теперь можно представить $R(x)$ в виде

$$\frac{b(x)}{v(x)}+\frac{c(x)}{w(x)},\qquad b(x),\ c(x)\in P[x],$$

это делается последовательным нахождением остатков. Далее,

$$U(x)=\frac{b(x-1)}{v(x-1)}\qquad R_1(x)=R(x)-\frac{b(x)}{v(x)}-a\frac{b(x-1)}{v(x-1)}=\frac{c(x)}{w(x)}-a\frac{b(x-1)}{v(x-1)}.$$

Из способа построения $v(x)$ ясно, что $U(x)$ удовлетворяет сформулированному условию.

Отметим, что для выполнения предложенной процедуры не требуется производить разложение многочленов на неприводимые множители и разложение дробей в сумму простейших.

Способ вычисления $\operatorname{Dis} R(x)$ обсуждался в [1, 2].

Из сказанного ясно, что многократное применение процедуры приводит к построению рационального решения соотношения (1), если рациональное решение существует, и приводит к построению грани рациональной функции $R(x)$, если (1) не имеет рационального решения.

4. В случае когда известно, что соотношение (1) имеет рациональное решение, методы, предложенные в [1, 2], обеспечивают более быстрое нахождение решения, чем метод, изложенный выше. Методы, предложенные в [1, 2], позволяют распознать, существует ли рациональное решение соотношения (1), но это распознавание происходит в процессе построения предполагаемого решения, и на обнаружение того, что рационального решения не существует, могут быть затрачены значительные усилия. Применяя метод, изложенный в настоящей работе, мы в конце концов можем убедиться, что рационального решения не существует, но вместе с этим мы упростим правую часть соотношения, что может оказаться полезным.

5. Особо рассмотрим случай $a=-1$. Соотношение (1) превращается в простейшее конечно-разностное уравнение

$$F(x+1)-F(x)=R(x).$$

Задача нахождения решения этого уравнения эквивалентна задаче нахождения суммы

$$\sum_{x=m}^{n} R(x). \tag{4}$$

Предложенный метод позволяет представить (4) в виде

$$A(m,n)+\sum_{x=m}^{\tilde{n}} S(x),$$

где $A(m,n)\in P\langle m,n\rangle$, $S(x)\in P\langle x\rangle$, причем $S(x)$ имеет знаменатель возможно меньшей степени. В этом смысле предложенный метод является аналогом известного метода Остроградского — Эрмита нахождения рациональной части интеграла рациональной функции.

Поступила в редакцию 8.02.1974

Цитированная литература

1. *С. А. Абрамов.* О суммировании рациональных функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, № 4, 1071—1075.
2. *С. А. Абрамов.* Решение линейных конечноразностных уравнений с постоянными коэффициентами в поле рациональных функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 4, 1067—1070.