

3. Ю. П. Лунькин, Ф. Д. Попов. Влияние колебательно-диссоциационной релаксации на сверхзвуковое обтекание затупленных тел. Ж. техн. физ., 1966, 36, № 4, 664—671.
4. О. М. Белоцерковский и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Теоретическое и экспериментальное исследования. М., ВЦ АН СССР, 1967.
5. А. Н. Любимов, В. В. Русанов. Течения газа около тупых тел. Т. I. М., «Наука», 1970.

УДК 681.442.2

О СУММИРОВАНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

С. А. АБРАМОВ

(Москва)

Излагается алгоритм решения следующей задачи: пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ — рациональная функция указанных переменных с рациональными (действительными, комплексными) коэффициентами; выяснить, существует ли рациональная функция $G(v, w, x_2, \dots, x_n)$ с коэффициентами из того же поля такая, что $\sum_{x_1=v}^w F(x_1, \dots, x_n) = G(v, w, x_2, \dots, x_n)$ для всех целочисленных значений $v \leq w$. Если G существует — то построить ее. Обсуждается реализация алгоритма на языке ЛИСИИ.

Рассматривается задача суммирования рациональных функций, представляющая интерес при решении многих комбинаторных задач. Дается постановка и алгоритм решения этой задачи. Обсуждается результат его реализации на алгоритмическом языке ЛИСИИ [1] для машины БЭСМ-6.

В статье используются элементарные сведения из алгебры и теории конечных разностей. Эти сведения содержатся, например, в [2] и [3].

§ 1

Пусть P — некоторое поле. Будем придерживаться следующих обозначений: $P[x_1, \dots, x_n]$ — кольцо многочленов, $P\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — поле рациональных функций переменных x_1, \dots, x_n с коэффициентами из P . Если $f(x), g(x) \in P[x]$, то НОД $(f(x), g(x))$ означает наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$ в $P[x]$, а $\deg f(x)$ — степень многочлена $f(x)$.

Нас будут интересовать лишь поля характеристики 0. В такие поля естественным образом вкладывается кольцо целых чисел. Образы этого вложения с естественным упорядочением мы будем называть целыми числами. Если P — такое поле, то можно поставить следующую задачу: пусть $F(x) \in P\langle x \rangle$; выяснить, существует ли рациональная функция $H(w, v) \in P\langle v, w \rangle$ такая, что

$$(1) \quad \sum_{x=v}^w F(x) = H(v, w)$$

для всех целочисленных значений $v \leq w$.

Задача (1) эквивалентна следующей: выяснить, существует ли рациональная функция $G(x) \in P\langle x \rangle$, удовлетворяющая простейшему конечноразностному уравнению

$$(2) \quad G(x+1) - G(x) = F(x).$$

Известно, что уравнение (2) имеет решение в случае, когда $F(x)$ — многочлен. Мы отвлекаемся от этого случая и полагаем ниже, что степень знаменателя $F(x)$ (счи-

таем $F(x)$ несократимой) не ниже 1. Отметим, что если $F(x)$ — многочлен, то задача сразу сводится к решению уравнения (6) при $g_1(x) = 1$.

Мы дадим алгоритм, применимый к произвольной рациональной функции $F(x)$ и распознающий возможность построения $G(x)$, удовлетворяющей (2) и осуществляющей это построение в тех случаях, когда оно возможно, в предположении, что поле P подпадает под

О п р е д е л е н и е 1. Поле P характеристики 0 называется подходящим, если существует алгоритм, позволяющий по многочлену $p(x) \in P[x]$ найти все целочисленные корни уравнения $p(x) = 0$.

Поля рациональных, действительных и комплексных чисел являются подходящими. Кроме того легко убедиться, что справедливо

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть P — подходящее поле. Тогда $P\langle x \rangle$ — также подходящее поле.

Пусть $F(x)$ — некоторая рациональная функция и $s(x)$ — знаменатель несократимой формы $F(x)$. Постановка задачи (1) заставляет считать необходимым условием существования $H(v, w)$ отсутствие целочисленных корней уравнения $s(x)_v = 0$. Так как коэффициенты лежат в подходящем поле, это условие легко проверяется. Наш алгоритм позволяет решать несколько более общую задачу: исследовать, существует ли $H(v, w)$, удовлетворяющая (1) при всех целочисленных значениях v и w таких, что $w \geq v > x_0$, где x_0 — наибольший целочисленный корень уравнения $s(x) = 0$; если $H(v, w)$ существует — то построить ее.

Далее на протяжении всей статьи под P понимается некоторое подходящее поле.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $f(x) \in P[x]$ и $\deg f(x) > 0$. Разбросом многочлена $f(x)$ (обозначение $\text{dis } f(x)$) будем называть наибольшее из всех целых чисел α , для которых

$$(3) \quad \deg \text{НОД}(f(x), f(x + \alpha)) \geq 1.$$

(Ограниченность множества таких чисел следует из единственности разложения на неприводимые множители в $P[x]$.)

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $f(x) \in P[x]$ и $\deg f(x) > 0$. Тогда $\text{dis } f(x)$ может быть вычислен.

Покажем, как могут быть вычислены все целые числа, удовлетворяющие (3). Составим многочлен $f_1(x) = f(x + h) \in P\langle h \rangle[x]$. Воспользуемся тем, что при каждом конкретном целом h можно найти $\text{НОД}(f(x), f(x + h))$ в $P[x]$ по алгоритму Евклида.

Разделим $f_1(x)$ на $f(x)$ в $P\langle h \rangle[x]$ с остатком:

$$(4) \quad f_1(x) = a(x)f(x) + b(x), \quad \deg b(x) < \deg f(x).$$

Так как P — подходящее поле, то мы можем найти все целочисленные значения h_0, \dots, h_i , при подстановке которых в (4) старший коэффициент $b(x)$ обращается в 0.

Проверкой отбираем из h_0, \dots, h_i те, для которых $f(x)$ и $f(x + h)$ имеют нетривиальный НОД. Для всех $h \neq h_0, \dots, h_i$ первое деление с остатком задается формулой, получающейся подстановкой в (4) значения h . Можем найти все значения h , при которых $b(x)$ нулевой в $P[x]$.

Таким же образом будем продолжать процесс, пока остаток не станет нулевым в $P\langle h \rangle[x]$. После этого останется выбрать наибольший элемент из некоторого конечного набора чисел.

П р и м е ч а н и е. Величина $\text{dis } f(x)$ может быть вычислена и как значение наибольшего целочисленного корня результата многочленов $f(x)$ и $f(x + h)$, рассматриваемых как элементы кольца $P[h][x]$.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $F_1(x), F_2(x) \in P\langle x \rangle$, причем $F_1(x + 1) - F_1(x) = F_2(x)$ и $F_1(x), F_2(x)$ имеют несократимые формы, соответственно, $f_{11}(x)/f_{12}(x)$ и $f_{21}(x)/f_{22}(x)$ ($f_{ij}(x) \in P[x]$). Тогда $\text{dis } f_{12}(x) = \text{dis } f_{22}(x) - 1$.

Разложим $F_1(x)$ в сумму простейших дробей:

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{q_i(x)}{p_i(x)^{j(i)}} + g(x)$$

(здесь $p_i(x)$, $i = 1, \dots, \lambda$, — неприводимые в $P[x]$, $q_i(x)$, $g(x) \in P[x]$ и $\deg q_i(x) < \deg p_i(x)^{j(i)}$). Пусть

$$(5) \quad \text{dis } f_{12}(x) = \alpha, p_1(x + \alpha) = p_2(x).$$

Учитывая, что разложение в сумму простейших дробей единственно и что замена $x \rightarrow x + 1$ переводит неприводимый многочлен в неприводимый, получаем разложение $F_2(x)$:

$$F_2(x) = g(x + 1) - g(x) + \frac{q_1(x + 1)}{p_1(x + 1)^{j(1)}} + \frac{q_2(x + 1)}{p_1(x + \alpha + 1)^{j(2)}} - \frac{q_1(x)}{p_1(x)^{j(1)}} - \frac{q_2(x)}{p_1(x + \alpha)^{j(2)}} + \sum_{i=3}^{\lambda} \left(\frac{q_i(x + 1)}{p_i(x + 1)^{j(i)}} - \frac{q_i(x)}{p_i(x)^{j(i)}} \right).$$

Условие (5) показывает, что под знаком суммы в правой части последнего равенства не найдется простейших дробей, имеющих в знаменателях некоторые степени $p_1(x + \alpha + 1)$ и $p_1(x)$, откуда и следует утверждение (здесь несущественно, что P — подходящее).

Если для некоторого элемента $F(x) \in P\langle x \rangle$ существует $G(x)$ такой, что $G(x + 1) - G(x) = F(x)$, то знаменатель несократимой дроби, эквивалентной $G(x)$, может быть легко вычислен. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ имеют несократимые формы $f_1(x) / f_2(x)$ и $g_1(x) / g_2(x)$ соответственно и $\text{dis } f_2(x) = \alpha$.

Тогда

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{f_1(x + i)}{f_2(x + i)} = \frac{g_1(x + \alpha)g_2(x) - g_1(x)g_2(x + \alpha)}{g_2(x + \alpha)g_2(x)}.$$

Учитывая, что $g_1(x) / g_2(x)$ несократима и что $\text{НОД}(g_2(x + \alpha), g_2(x)) = 1$ (см. предложение 3), заключаем, что если мы вычислим несократимую дробь

$$\frac{s(x)}{t(x)} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{f_1(x + i)}{f_2(x + i)},$$

то с точностью до обратимых множителей $t(x) = g_2(x + \alpha)g_2(x)$. Можем написать далее: $t(x + \alpha) = g_2(x + 2\alpha)g_2(x + \alpha)$, $t(x) / t(x + \alpha) = g_2(x) / g_2(x + 2\alpha)$. Дробь, стоящая в правой части последнего равенства, несократима, а дробь, стоящая в левой части, нам известна. Можем найти $g_2(x)$.

Вследствие этого задача сводится к следующей: по данным многочленам $p(x)$, $g_2(x) \in P[x]$ распознать возможность построения многочлена $g_1(x) \in P[x]$ такого, что

$$(6) \quad p(x) = g_1(x + 1)g_2(x) - g_2(x + 1)g_1(x),$$

и если построение возможно, то выполнить его.

Полагая, что $g_1(x)$ существует и что

$$(7) \quad \begin{aligned} g_1(x) &= a_n x^n + \dots + a_0, \\ g_2(x) &= b_m x^m + \dots + b_0, \end{aligned}$$

легко вычислить коэффициент при $(m + n - 1)$ -й степени многочлена, стоящего в правой части (6) (коэффициент при степени $m + n$ заведомо равен нулю). Этот ко-

эффицент равен $(n - m)a_n b_m$. Таким образом, имеет место одно из двух равенств: $n = m$ или $n = \deg p(x) - m + 1$.

После того как стала известной степень $g_1(x)$, для решения уравнения (6) можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, что приведет нас к исследованию существования решения и, возможно, к решению системы линейных уравнений порядка $\deg g_1(x)$, которая в случае совместности имеет ранг $\deg g_1(x) - 1$ (последнее следует из того, что решение уравнения (6) в нашем случае может быть найдено с точностью до произвольного слагаемого из поля коэффициентов). Не обязательно выписывать эту систему, можно воспользоваться рекурсивной процедурой поиска решения уравнения (6) в виде многочлена степени не выше n . Пусть $m \neq n$. Полагая $g_1 = a_n x^n + g_1'$, $\deg g_1' = n - 1$, получим $g_1'(x + 1)g_2(x) - g_1'(x)g_2(x + 1) + a_n(x + 1)^n g_2(x) - a_n x^n g_2(x + 1) = p(x)$. Степень многочлена $g_2(x)g_1'(x + 1) - g_2(x + 1)g_1'(x)$ не выше $m + n - 2$. Степень многочлена $a_n x^n g_2(x + 1) + a_n(x + 1)^n g_2(x)$ не выше $m + n - 1$, причем коэффициент при $(m + n - 1)$ -й степени есть $(n - m)a_n b_m$, откуда a_n находится, если $\deg p(x) \leq m + n - 1$; в противном случае решения не существует.

Пусть теперь $m = n$. Тогда в обозначениях (7) коэффициент при старшей $(n + m - 2)$ -й степени в правой части (6) равен $b_{m-1}a_n - b_m a_{n-1}$, причем $b_m \neq 0$. Если степень $p(x)$ выше $n + m - 2$, то решения нет.

Правило умножения многочленов и сделанное замечание о ранге системы уравнений для коэффициентов дают основание утверждать, что a_n может быть взято произвольным, в частности равным нулю.

Таким образом, мы в обоих случаях либо убеждаемся, что решения нет, либо переходим от уравнения (6) к уравнению

$$p'(x) = g_2(x)g_1'(x + 1) - g_2(x + 1)g_1'(x), \quad \deg g_1'(x) = \deg g_1(x) - 1.$$

Если ищется решение (6) в виде многочлена нулевой степени, то исследование тривиально.

Описание алгоритма на этом заканчивается.

Отметим, что наличие изоморфизма между $P\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и $P\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \langle x_n \rangle$ и утверждение предложения 1 дают возможность применять описанный алгоритм к рациональным функциям многих переменных с коэффициентами из подходящего поля в задаче решения уравнения

$$G(x_1, \dots, x_n + 1) - G(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n).$$

§ 2

Описанный алгоритм (для задачи с несколькими переменными) реализован автором статьи в виде программы на алгоритмическом языке ЛИСП. В качестве поля коэффициентов взято поле рациональных чисел.

Несколько результатов применения программы. 1. Вычислить

$$\sum_{i=1}^n i_3.$$

Ответ $(n^4 + 2n^3 + n^2) / 4$. Время счета 8 сек.

2. Вычислить

$$\sum_{i=1}^n \frac{6i + 3}{4i^4 + 8i^3 + 8i^2 + 4i + 3}.$$

Ответ $(n^2 + 2n) / (2n^2 + 4n + 3)$. Время счета 15 сек.

3. Вычислить

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 + n^2 - 3i + 3n - 2in + 2}.$$

Ответ $n / (n + 1)$. Время счета 20 сек.

4. Вычислить

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

Ответ: данное выражение не является рациональной функцией от n . Время счета 5 сек.

Автор выражает глубокую признательность С. С. Лаврову, В. А. Диткину, В. М. Курочкину и А. Г. Постяникову за ценные консультации.

Поступила в редакцию 4.02.1971

Цитированная литература

1. С. С. Лавров, Г. С. Силагадзе. Входной язык и интерпретатор системы программирования на базе языка ЛИСП для машины БЭСМ-6. М., ИТМ и ВТ АН СССР, 1969.
2. С. Ленг. Алгебра. М., «Мир», 1968.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967.

УДК 51:681.14

РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЭВМ М-220 ЯЗЫКА ТИПА АЛГОЛ 60

А. А. КРАСНОВ, Ю. И. КСЕНОФОНТОВ, В. Л. ЛЕЙТЕС

(Москва)

Сообщается о быстродействующей (1200 команд в мин) транслирующей системе для ЭВМ М-220, перерабатывающей АЛГОЛ-программы в коды машины.

1. Широкое использование языка АЛГОЛ 60 [1] привлекло новых пользователей вычислительной машины, что привело к расширению средств представления данных и операций по сравнению с имеющимися в языке АЛГОЛ 60. Статья является сообщением о транслирующей системе для ЭВМ М-220, предназначенной для обработки АЛГОЛ-программ в коды ЭВМ и выполненной в 1969 г. Входной язык кроме конструкций языка АЛГОЛ 60 включает операции над массивами, с комплексными числами и логическими значениями, представленными двоичными последовательностями битов длиной в машинное слово. Характеристики транслятора (именуемого далее словом ТРАП) обеспечивают системе хорошие эксплуатационные и сервисные свойства. Система автоматического программирования находит применение для решения технических вычислительных задач и задач логического характера, требующих плотной упаковки информации в ячейке и операций над частями слова.

2. Поскольку в основу входного языка положен широко применяемый язык АЛГОЛ 60, ниже рассматриваются только ограничения и дополнения к нему.

Во входном языке транслятора ТРАП приняты следующие ограничения на язык АЛГОЛ 60:

исключены рекурсивные процедуры,

исключены целые в качестве меток,

в качестве именуемых выражений допускается использование только меток и указателей переключателя,

переключательный список может состоять только из меток,