Об опорном суммировании

С. А. Абрамов[*]
Вычислительный центр РАН
Москва, 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
`sabramov@ccas.ru`

М. Петковшек[†]
Отделение математики
ф-та математики и физики
университета г. Любляна,
Ядранска 19, SI-1000 Любляна, Словения
`marko.petkovsek@fmf.uni-lj.si`

Аннотация

Рассматривается суммирование последовательных значений $\varphi(v), \varphi(v+1), \ldots, \varphi(w)$ мероморфной функции $\varphi(z)$, где $v, w \in \mathbb{Z}$. Предполагается, что $\varphi(z)$ удовлетворяет линейному разностному уравнению $L(y) = 0$ с полиномиальными коэффициентами, и что для L существует суммирующий оператор (если такой оператор существует, то он может быть найден алгоритмом аккуратного суммирования или, в случае $\operatorname{ord} L = 1$, алгоритмом Госпера). Вводится понятие *опорного суммирования*, охватывающего и тот случай, когда $\varphi(z)$ имеет полюсы в множестве $\mathbb{Z}$.

[*]Частичная поддержка РФФИ, грант 07-01-00482-а.
[†]Частичная поддержка MZT RS, грант J2-8549.

1 Введение

Эта заметка ставит целью изложение в простой форме результатов статьи [3], касающихся так называемого опорного суммирования. Речь идет о возможности корректного использования дискретной формулы Ньютона-Лейбница для определенного суммирования после успешного построения суммирующего оператора с помощью алгоритма аккуратного суммирования ([2]) или алгоритма Госпера ([5]). В детальных доказательствах, проведенных в [3], привлекается значительное число довольно абстрактных понятий. Потребовалось сформулировать и доказать также целый ряд вспомогательных утверждений. Это сделало статью [3] сложной для чтения. Вместе тем можно допустить, что основные результаты статьи [3] представляют для компьютерной алгебры определенный практический интерес, и краткое изложение этих результатов без их сложных доказательств в этом смысле может быть полезным.

Ниже основные результаты статьи [3] даются в простых формулировках и иллюстрируются примерами. Доказательства могут быть найдены в [3].

2 Суммирующие операторы

Пусть E — оператор сдвига: $E(f(k)) = f(k+1)$ для последовательности $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, и $E(\varphi(z)) = \varphi(z+1)$ для аналитической функции, $z \in \mathbb{C}$. Пусть

$$L = a_d(k)E^d + \cdots + a_1(k)E + a_0(k) \in \mathbb{C}(k)[E].$$

Мы говорим, что оператор $R \in \mathbb{C}(k)[E]$ есть *суммирующий* оператор для L, если

$$(E-1) \circ R = 1 + M \circ L \tag{1}$$

при некотором $M \in \mathbb{C}(k)[E]$. Не нанося ущерба общности, мы можем предполагать, что $\operatorname{ord} R = \operatorname{ord} L - 1 = d - 1$:

$$R = r_{d-1}(k)E^{d-1} + \cdots + r_1(k)E + r_0(k) \in \mathbb{C}(k)[E].$$

3 Дискретная формула Ньютона-Лейбница

Если суммирующий оператор существует, то он может быть найден алгоритмом аккуратного суммирования ([1]) или, когда $d = 1$, алгоритмом Госпера ([5]). На первый взгляд в том случае, когда $R \in \mathbb{C}(k)[E]$ существует, уравнение (1) дает возможность использовать дискретную формулу Ньютона-Лейбница (ДФНЛ)

$$\sum_{k=v}^{w-1} f(k) = g(w) - g(v)$$

для всех целых $v < w$ и для любой последовательности f такой, что $L(f) = 0$, беря при этом $g = R(f)$. Казалось бы, мы можем применить обе части равенства $(E-1) \circ R = 1 + M \circ L$ к f:

$$(E-1)(R(f)) = f + M(L(f)),$$

и, положив $g = R(f)$, а также приняв во внимание, что $L(f) = 0$, вывести, что $(E-1)g = f$, или

$$g(k+1) - g(k) = f(k),$$

откуда

$$\begin{aligned} \sum_{k=v}^{w-1} f(k) &= \sum_{k=v}^{w-1} (g(k+1) - g(k)) \\ &= g(w) - g(w-1) + g(w-1) - g(w-2) + \cdots + g(v+1) - g(v) \\ &= g(w) - g(v) \end{aligned}$$

(телескопический эффект).

Но было показано, что если R имеет коэффициенты, являющиеся рациональными функциями, у которых есть полюсы в $\mathbb{Z}$, то эта формула может давать неправильный результат (пример приводится ниже). Многие компьютерные реализации алгоритмов суммирования страдают этим недостатком.

Пример 1 Рассмотрим последовательность

$$f(k)=\frac{\binom{2k-3}{k}}{4^k},$$

которая удовлетворяет уравнению первого порядка $2(k+1)(k-2)f(k+1)-(2k-1)(k-1)f(k)=0$. Алгоритм Госпера дает $R(k)=\frac{2k(k+1)}{k-2}$, при этом последовательность $f(k)$ определена для всех $k\in\mathbb{Z}$. Но применение ДФНЛ приводит к равенству

$$\sum_{k=0}^{w-1} f(k) \;=R(w)f(w)-R(0)f(0)\;=\;\frac{2w(w+1)\binom{2w-3}{w}}{(w-2)4^w},$$

которое оказывается неправильным, коль скоро мы предполагаем, что значение $\binom{2k-3}{k}$ равно 1 при $k=0$ и равно -1 при $k=1$ (как принято в комбинаторике). Правая часть дает верное значение суммы из левой части только при $w=1$.

4 Опорное суммирование

Предположим, что L применяется к аналитическим функциям и

$$L=a_d(z)E^d+\cdots+a_1(z)E+a_0(z)\in\mathbb{C}(z)[E]. \tag{2}$$

Будем рассматривать суммирующий оператор (если он существует) в виде

$$R=r_{d-1}(z)E^{d-1}+\cdots+r_1(z)E+r_0(z)\in\mathbb{C}(z)[E].$$

Пусть $\varphi(z)$ — мероморфное решение уравнения $L(y)=0$.

Оказывается, что если $\varphi(z)$ не имеет полюсов в $\mathbb{Z}$, то и $R(\varphi)(z)$ не имеет полюсов в $\mathbb{Z}$, и мы можем использовать ДНЛФ для суммирования значений $\varphi(k)$ при $k=v,v+1,\dots,w$. То неприятное явление, которое обнаружено в примере 1, не может возникнуть в том случае, когда элементы суммируемой последовательности являются значениями $\varphi(k)$, $k\in\mathbb{Z}$, аналитической функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ тому же самому разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами, что и исходная последовательность в целых точках.

Сказанное следует из более сильного утверждения. Оказывается, что даже если $\varphi(z)$ имеет полюсы в $\mathbb{Z}$, то, тем не менее, суммирование может быть в некотором смысле выполнено корректным образом. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ функция $\varphi(z)$ может быть разложена в ряд Лорана

$$\varphi(z) = c_{k,\rho_k}(z-k)^{\rho_k} + c_{k,\rho_k+1}(z-k)^{\rho_k+1} + \dots$$

с $\rho_k \in \mathbb{Z}$ и $c_{k,\rho_k} \neq 0$. Если $L(\varphi) = 0$, то в множестве всех ρ_k, $k \in \mathbb{Z}$ существует минимальный элемент ρ. Это ρ мы назовем *глубиной* $\varphi(z)$ и обозначим через $\mathrm{depth}(\varphi)$. С $\varphi(z)$ свяжем последовательность $f(k)$ такую, что $f(k) = c_{k,\rho_k}$, если $\rho_k = \rho$, и $f(k) = 0$ в противном случае. Последовательность $f(k)$ мы назовем *опорой* функции $\varphi(z)$ и обозначим ее через $\mathrm{bott}(\varphi)$.

Иллюстрацией служит следующий простой пример. Хорошо известно, что $\Gamma(z)$ имеет конечные значения для $z = 1, 2, \dots$ и имеет простые полюсы для $z = 0, -1, -2, \dots$. Мы имеем

$$\mathrm{depth}(\Gamma) = -1,$$

и

$$\mathrm{bott}(\Gamma)(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k > 0, \\ \frac{(-1)^{k+1}}{(-k-1)!}, & \text{если } k \leq 0. \end{cases}$$

Если же мы рассмотрим $\Gamma(z)$ только в полуплоскости $\mathrm{Re} z > 0$, то глубина функции будет равна 0, а ее опорой будет последовательность

$$f(k) = (k-1)!, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Предложение 1 *Пусть* $L(\varphi) = 0$. *Тогда* $L(\mathrm{bott}(\varphi)) = 0$.

Предложение 2 *Пусть* $L(\varphi) = 0$ *и* R *— суммирующий оператор для* L. *Тогда* $\mathrm{depth}(\varphi) = \mathrm{depth}(R(\varphi))$.

Теорема 1 (Об опорном суммировании.) *Пусть* $L(\varphi(z)) = 0$ *и* R *— суммирующий оператор для* L. *Пусть* $\psi(z) = R(\varphi(z))$. *Тогда при любых* $v < w$ *справедлива формула* опорного суммирования

$$\sum_{k=v}^{w-1} \mathrm{bott}(\varphi)(k) = \mathrm{bott}(\psi)(w) - \mathrm{bott}(\psi)(v).$$

В частности, если φ не имеет полюсов в $\mathbb{Z}$ (т.е. $\operatorname{depth}(\varphi) \geq 0$), то функция $\psi(z)$ не имеет полюсов в $\mathbb{Z}$, и дискретная формула Ньютона-Лейбница

$$\sum_{k=v}^{w-1} \varphi(k) = \psi(w) - \psi(v)$$

справедлива для всех $v < w$.

Пример 1 (продолжение). Предположим, что значение $\binom{2k-3}{k}$ определено как

$$\lim_{z \to k} \frac{\Gamma(2z-2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z-2)}, \tag{3}$$

что является естественным обобщением формулы

$$\binom{2k-3}{k} = \frac{(2k-3)!}{k!(k-3)!}$$

на все $k \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(2z-2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z-2)4^z}$$

и

$$\psi(z) = \frac{2z(z+1)}{z-2}\,\varphi(z).$$

Предел (3) существует для всех $k \in \mathbb{Z}$, и $\operatorname{depth}(\varphi) = 0$. Теперь ДФНЛ дает правильный результат

$$\sum_{k=0}^{w-1} \frac{\Gamma(2k-2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-2)4^k} = \frac{2w(w+1)\Gamma(2w-2)}{(w-2)\Gamma(w+1)\Gamma(w-2)4^w},$$

$w = 1, 2, \ldots$.

Вначале мы предполагали, что значением $\binom{2k-3}{k}$ является 1, когда $k = 0$ и -1, когда $k = 1$ (как принято в комбинаторике). Но

$$\lim_{z \to 0} \frac{\Gamma(2z-2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z-2)} = \frac{1}{2} \neq 1$$

и

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Gamma(2z-2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z-2)} = -\frac{1}{2} \neq -1.$$

В этом примере проступает конфликт между комбинаторным и аналитическим определениями символа $\binom{p}{q}$.

Пример 2 Функция $\varphi(z) = z\Gamma(z+1)$ удовлетворяет уравнению $L(y) = 0$, где $L = zE-(z+1)^2$. Мы имеем $R = \frac{1}{z}$, $\operatorname{ord} R = 0$, $\psi(z) = R(\varphi)(z) = \Gamma(z+1)$. Очевидно $\varphi(z)$ принимает конечные значения для $z = 0, 1, \ldots$ и имеет простые полюсы при $z = -1, -2, \ldots$. Получаем $\operatorname{depth}(\varphi) = \operatorname{depth}(\psi) = -1$ и

$$\operatorname{bott}(\varphi)(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}k}{(-k-1)!}, & \text{если } k < 0, \\ 0, & \text{если } k \geq 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{bott}(\psi)(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}}{(-k-1)!}, & \text{если } k < 0, \\ 0, & \text{если } k \geq 0. \end{cases}$$

Опорное суммирование дает

$$\sum_{k=v}^{w-1} \frac{(-1)^k k}{(-k-1)!} = \frac{(-1)^w}{(-w-1)!} - \frac{(-1)^v}{(-v-1)!}$$

для любых $v < w \leq 0$; последнее равенство эквивалентно равенству

$$\sum_{k=v}^{w-1} \frac{(-1)^k k}{(k-1)!} = \frac{(-1)^{w+1}}{(w-2)!} - \frac{(-1)^{v+1}}{(v-2)!}$$

для любых $1 \leq v < w$.

Если мы рассмотрим $\varphi(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, то $\operatorname{depth}(\varphi) = \operatorname{depth}(\psi) = 0$, и мы будем иметь

$$\sum_{k=v}^{w-1} k\Gamma(k+1) = \Gamma(w+1) - \Gamma(v+1)$$

для всех $0 \leq v < w$, или, то же самое,

$$\sum_{k=v}^{w-1} k \cdot k! = w! - v!.$$

Уравнение вида $L(y) = 0$, где L имеет вид (2), всегда имеет ненулевое решение, мероморфное в $\mathbb{C}$. Это следует из следующего результата М. Баркату и Ж.-П. Рамиса:

Теорема 2 *([4]) Пусть L имеет вид (2), где $a_0(z)$ — ненулевой полином. Пусть константа $c \in \mathbb{R}$ такова, что вещественная часть любого из корней полинома $a_0(z)$ не превосходит c. Тогда уравнение $L(y) = 0$ имеет решение, голоморфное (т.е. аналитическое и не имеющее особенностей) в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$.*

5 Дополнительные примеры

Пример 3 Рациональная функция $\varphi(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ удовлетворяет уравнению $L(y) = 0$, где $L = (z+2)E - z$. Мы имеем $R = -z-1$ и $\psi(z) = R(\varphi)(z) = -\frac{1}{z}$. Легко видеть, что $\mathrm{depth}(\varphi) = \mathrm{depth}(\psi) = -1$ и

$$\mathrm{bott}(\varphi)(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ -1, & \text{если } k = -1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\mathrm{bott}(\psi)(k) = \begin{cases} -1, & \text{если } k = 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что для любых $v < w$

$$\sum_{k=v}^{w-1} \mathrm{bott}(\varphi)(k) = \mathrm{bott}(\psi)(w) - \mathrm{bott}(\psi)(v).$$

Если мы рассматриваем $\varphi(z)$ только в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$, то $\mathrm{depth}(\varphi) = \mathrm{depth}(\psi) = 0$, и мы имеем

$$\sum_{k=v}^{w-1} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{w} + \frac{1}{v}$$

при $1 \le v < w$.

Пример 4 Для оператора второго порядка

$$L = (z-3)(z-2)(z+1)E^2 - (z-3)(z^2-2z-1)E - (z-2)^2$$

существует суммирующий оператор первого порядка

$$R = zE + \frac{1}{z-3}.$$

Из теоремы 2 следует, что уравнение $L(y) = 0$ имеет решения, голоморфные в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 2$. Обозначим через $\varphi(z)$ произвольное решение такого вида. По теореме 1 ДФНЛ должна давать правильный результат при $3 \le v < w$ несмотря на то, что один из коэффициентов оператора R имеет полюс в $z = 3$.

Мы можем найти значения $\varphi(z)$ и $\psi(z) = R(\varphi)(z)$ при $z = 3$. Алгоритм из [2] дает

$$\varphi(z) = (4\varphi(5) - 2\varphi(4))(z-3) + O((z-3)^2), \quad z \to 3,$$

откуда $\varphi(3) = 0$, $\psi(3) = \varphi(4) + 4\varphi(5)$. Это значение $\psi(3)$ может использоваться в ДФНЛ при $3 = v < w$:

$$\sum_{k=3}^{w-1} \varphi(k) = w\varphi(w+1) + \frac{\varphi(w)}{w-3} - 4\varphi(5) - \varphi(4).$$

6 Заключительные замечания

Применение дискретной формулы Ньютона-Лейбница к результатам работы алгоритмов Госпера и аккуратного суммирования с целью вычисления определенной суммы элементов последовательности может привести к неправильному результату. Это обнаруживается во многих реализациях названных алгоритмов в системах компьютерной алгебры.

Выше было показано, в частности, что это нежелательное явление не может иметь места, коль скоро элементы суммируемой последовательности суть значения $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, некоторой аналитической функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей в комплексной плоскости тому же самому разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами, что и исходная последовательность в целых точках.

Для практики это означает, что если сформулированное замечание выполнено, то пользователь системы компьютерной алгебры может быть уверен, что получаемая сумма найдена правильно.

Еще один результат, который, возможно, больше относится к теории. Если функция $\varphi(z)$, упоминавшаяся выше, имеет полюсы в целых точках, то несмотря на это, мы можем найти некоторую сумму, которая, конечно, не есть сумма значений $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, но, однако, является суммой элементов последовательности, связанной некоторым естественным образом с $\varphi(z)$ (такая последовательность названа в заметке опорой функции $\varphi(z)$). Это суммирование может привести к интересному (и, возможно, неожиданному) тождеству. Если аналитическая функция $\varphi(z)$ определена для всех $z \in \mathbb{Z}$, то ее опора совпадает с последовательностью $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Литература

[1] S. A. Abramov, M. van Hoeij, Integration of solutions of linear functional equations *Integral transforms and Special Functions* **8** (1999), 3–12.

[2] S.A. Abramov, M. van Hoeij M, Set of poles of solutions of linear difference equations with polynomial coefficients. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* (2003) **43**, No. 1, 60–65.

[3] S. A. Abramov, M. Petkovšek, Analytic solutions of linear difference equations, formal series, and bottom summation. In: *Lecture Notes in Computer Science*, (2007) **4770**, Computer Algebra in Scientific Computing. 10th International Workshop, CASC'07, Bonn, Germany, September 2007, 1–10.

[4] M.A. Barkatou, Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe, PhD Thesis (1989) INPG, Grenoble France.

[5] R. W. Gosper, Jr., Decision procedure for indefinite hypergeometric summation, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **75** (1978), 40–42.