УДК 517.929

MATRICES OF SCALAR DIFFERENTIAL OPERATORS: DIVISIBILITY AND SPACES OF SOLUTIONS [1)]

© 2020 г. **S. A. Abramov[*2)], M. A. Barkatou[**], M. Petkovšek[***3)],**

[*] *Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Science, Vavilova str., 40, Moscow, 119333, Russia;*

[**] *University of Limoges, CNRS , XLIM UMR 7252 , MATHIS, 123, Av. A. Thomas, 87060 Limoges cedex, France;*

[***] *University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, Jadranska 19, SI-1000, Ljubljana, Slovenia*

e-mail: sergeyabramov@mail.ru, moulay.barkatou@unilim.fr, Marko.Petkovsek@fmf.uni-lj.si

Поступила в редакцию 20.07.2019 г.

Переработанный вариант 31.08.2019 г.

Матрицы скалярных дифференциальных операторов: делимость и пространства решений. В [1, с. 82] было показано, что если R является кольцом правых главных идеалов, то и кольцо квадратных матриц фиксированного размера с элементами из R является кольцом этого типа (то же самое верно для левых идеалов). Этого достаточно для доказательства существования (правых и левых) наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного любой пары (A, B) матриц этого типа, даже если они не имеют полного ранга.

Позднее в [2, разд. 9.3] были предложены алгоритмы для нахождения наибольшего общего правого делителя (gcrd) и наименьшего общего левого кратного (lclm) матриц с элементами в виде полиномов Оре, это было сделано тем же путем, как и для обычных полиномиальных матриц ([3]).

Однако связь делимости операторных матриц — т.е. матриц скалярных операторов — и пространств решений этих матриц не были исследованы в упомянутых публикациях. В нашей статье мы устанавливаем эту связь. Для большей определенности мы ограничиваемся операторными матрицами полного ранга над дифференциальным полем K характеристики 0, поле констант которого алгебраически замкнуто. Пусть Λ — универсальное расширение Пикара-Вессио Λ дифференциального поля (K, ∂) ([4]). С каждой операторной матрицей $A \in \mathbf{M}_m(K[\partial])$ мы связываем ее пространство решений V_A — множество таких вектор-стобцов $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \Lambda^m$, для которых $A(y) = 0$. Пространство решений операторной матрицы полного ранга конечномерно ([5]).

В контексте делимости мы рассматриваем несколько понятий. Пусть A, B, D, M — операторные $m \times m$-матрицы полного ранга. Тогда

> D — *правый делитель* A (пишем $D \,|_r\, A$), если существует такая операторная $m \times m$-матрица Q полного ранга, что $A = QD$;
>
> D — *общий правый делитель* A и B, если $D \,|_r\, A$ и $D \,|_r\, B$;
>
> *наибольший общий правый делитель* A и B (обозначение: $\mathrm{gcrd}\,(A, B)$), — общий правый делитель D матриц A, B такой, что любой другой общий правый делитель этих матриц является правым делителем матрицы D;

[1)] Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

[2)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-01-001174).

[3)] Supported in part by the Ministry of Education, Science and Sport of Slovenia research programme P1-0294.

M — *левое кратное* матрицы A, если $A \,|_r\, M$;

M — *общее левое кратное* матриц A и B, если $A \,|_r\, M$, $B \,|_r\, M$;

наименьшее общее левое кратное матриц A, B (обозначение: $\operatorname{lclm}(A, B)$) — левое кратное M матриц A, B такое, что любое другое общее левое кратное этих матриц является левым кратным матрицы M.

Мы доказываем, что для любого конечного множества $F \subset \Lambda^m$ существует матрица, пространство решений которой порождено F (элементы этой матрицы в общем случае принадлежат не K, а Λ) Существование такой матрицы и некоторые свойства делимости позволяют доказать, например, что для любых операторных $m\times m$-матриц A, B выполнено

$$V_A \cap V_B = V_{\operatorname{gcrd}(A,B)}, \quad V_A + V_B = V_{\operatorname{lclm}(A,B)}. \tag{1}$$

Насколько нам известно, второе из этих равенств было ранее доказано лишь для скалярного случая $A, B \in K[\partial]$, и даже там этот результат нетривиален (в [6] в комментарии к лемме 1 отмечено, что доказательство может основываться на [7, лемма A.6]).

Отметим еще раз, что хотя определение и способы получения gcrd и lclm операторных матриц известны (см., например, [2], [1]), связь этих понятий с пространствами решений, видимо, не исследовалась ранее сколь-либо детально.

Некоторые из утверждений нашей статьи могли бы быть доказаны короче с использованием методов дифференциальной алгебры, в частности, с использованием некоторых утверждений из [8] — знаменитой, но трудной для чтения книги. Но наши доказательства достаточно элементарны, и интересующие нас алгоритмы извлекаются из них с минимальными дополнительными усилиями.

Добавим, что если вместо Λ^m рассматривать решения в K_1^m, где K_1 — такое поле, что $K \subset K_1 \subset \Lambda$, то равенства (1) оказываются, вообще говоря, неверными: пространство решений матрицы $L = \operatorname{lclm}(A, B)$ может быть шире, чем сумма пространств решений матриц A и B, коль скоро имеются в виду решения в K_1^m.

Выше говорилось о правом делении: A является правым множителем в произведении QA. Обсуждавшиеся алгоритмы могут использоваться для левого деления, если прибегнуть к сопряженным матрицам. Существенно, что $(M_1M_2)^* = M_2^*M_1^*$ и $M^{**} = M$. Как следствие, $B = AQ \Longleftrightarrow B^* = Q^*A^*$.

Благодарность. Авторы признательны М.Зингеру за ряд полезных советов.

Список литературы

[1] McConnell J. C., Robson J. C. *Noncommutative Noetherian rings.* Vol. 30 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001.

[2] Beckermann B., Cheng H., Labahn G.. Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials. *J. Symbolic Comput.* **41**, no. 5 (2006) 513–543.

[3] Beckermann B., Labahn G. Fraction-free computation of matrix rational interpolants and matrix GCDs. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **77**, no. 1 (2000) 114–144.

[4] van der Put M., Singer M. F. *Galois Theory of Linear Differential Equations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328**, Springer, Berlin, 2003.

[5] Abramov S., Barkatou M. On the dimension of solution spaces of full rank linear differential systems. In: *Computer Algebra in Scientific Computing*, 15th International Workshop, CASC 2013, Berlin, Germany, September 2013, Proceedings, LNCS **8136**, pp. 1–9, 2013, Springer, Heidelberg (2013).

[6] van Hoeij M. Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations. *J. Pure Appl. Algebra* **139**, no. 1–3 (1999) 109–131.

[7] Hendriks P. A., Singer M. F. Solving difference equations in finite terms. *J. Symbolic Comput.* **27**, no. 3 (1999) 239–259.

[8] Kolchin E. R. Differential algebra and algebraic groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York–London, 1973.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, делимость квадратных матриц дифференциальных операторов, пространство решений, наибольший общий правый делитель, наименьшее общее левое кратное. Библ. 10.