Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды[1]

С.А. Абрамов, А.А. Рябенко, Д.Е. Хмельнов

(119333, Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН)

e-mail: sergeyabramov@mail.ru

anna.ryabenko@gmail.com,

dennis_khmelnov@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с коэффициентами в виде усеченных формальных степенных рядов. Обсуждается вопрос о том, что можно узнать из заданного таким образом уравнения о его решениях, принадлежащих полю формальных рядов Лорана. При этом нас интересует информация об этих решениях, являющаяся инвариантной относительно возможных продолжений тех усеченных рядов, которыми представлены коэффициенты уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, степенные ряды, лорановы ряды, усеченные ряды, системы компьютерной алгебры.

1. Введение

Ряды играют важнейшую роль в теории и применении дифференциальных уравнений. В частности, коэффициенты линейного обыкновенного дифференциального уравнения часто представляются рядами и при этом задача может состоять в том, чтобы найти решения этого уравнения, являющиеся рядами какого-то вида.

Ниже в роли коэффициентов уравнения будут выступать формальные степенные ряды, а в роли коэффициентов самих этих рядов — элементы заданного дифференциального поля K характеристики 0. Интересующие нас решения будут принадлежать полю формальных лорановых рядов над K. Такие решения мы будем называть *лорановыми*. Вопросами сходимости рядов мы интересоваться не будем.

Алгоритмический аспект задач такого рода предполагает рассмотрение вопроса представления бесконечных рядов, в частности, — рядов, играющих роль коэффициентов уравнения. В [1], [2], [3] рассматривалось алгоритмическое представление: ряд $\sum a_n x^n$ задавался алгоритмом, определяющим a_n по заданному n. Было обнаружено, что некоторые задачи, связанные с решениями заданных таким способом уравнений, оказываются алгоритмически неразрешимыми, и, в то же время, другая часть успешно разрешается. В частности, разрешимой оказывается задача нахождения лорановых решений. (В упомянутых работах обсуждались не только отдельные скалярные уравнения, но и системы уравнений.) В [3], [5] рассматривались задачи построения решений в предположении, что ряды, играющие роль коэффициентов заданного уравнения или системы, представлены в "приближенном", а именно — в *усеченном* виде. Например, в [5] выяснено, какое усечение коэффициентов системы будет достаточным для вычисления заданного количества начальных членов рядов, входящих в экспоненциально-логарифмические решения системы. В [3] эта задача рассмотрена для построения усеченных лорановых решений. В настоящей статье нас интересуют сведения о лорановых решениях, инвариантные относительно возможных продолжений усеченных рядов, представляющих коэффициенты уравнения. Предлагаемый нами алгоритм вычисляет максимально возможное число членов лорановых решений, правильность которых гарантирована в этом смысле.

Подробности постановки задачи см. в разд. 2. Предлагаемый алгоритм представлен в разд. 6. Его реализация в среде Maple ([6]) описана в разд. 9.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00032).

2. Постановка задачи

Сначала введем несколько понятий и зафиксируем некоторые обозначения. Пусть K — поле характеристики 0. Следующие обозначения являются стандартными:

$K[x]$ — кольцо полиномов с коэффициентами из K;

$K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из K;

$K((x))$ — поле частных кольца $K[[x]]$.

Определение 1. Элементы поля $K((x))$ — формальные *лорановы ряды*. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i \in K((x))$ его *валюация* $\operatorname{val} a(x)$ определяется как $\min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\operatorname{val} 0 = \infty$. Пусть $l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, *$l$-усечение* $a^{\langle l \rangle}(x)$ получается отбрасыванием всех членов $a(x)$ степени большей, чем l; если $l = -\infty$, то $a^{\langle l \rangle}(x) = 0$.

Далее K — дифференциальное поле характеристики 0 с дифференцированием D. Мы будем рассматривать операторы и дифференциальные уравнения, записанные с использованием обозначения $\theta = xD$. В исходном операторе

$$L = \sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^i \in K[x][\theta] \tag{1}$$

коэффициенты имеют вид

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x^j, \tag{2}$$

где t_i — неотрицательное целое, большее или равное $\deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r$ (если $t_i > d_i = \deg a_i(x)$, то $a_{ij} = 0$ для $j = d_i + 1, d_i + 2, \ldots, t_i$). Предполагается при этом, что свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \ldots, a_r(x)$ отличен от нуля.

Определение 2. Пусть L имеет вид (1), полином $a_r(x)$ (*старший коэффициент* дифференциального оператора L) предполагается ненулевым. *Продолжением* оператора L будем называть любой оператор $\tilde{L} = \sum_{i=0}^{r} b_i(x)\theta^i \in K[[x]][\theta]$, для которого

$$b_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1}) \tag{3}$$

(т.е. $\operatorname{val}(b_i(x) - a_i(x)) > t_i$), $i = 0, 1, \ldots, r$.

Если L — некоторый дифференциальный оператор, то под *решениями оператора* L мы понимаем решения уравнения $L(y) = 0$.

Будет предложен алгоритм, входом которого являются оператор $L \in K[x][\theta]$ и неотрицательные целые $t_0, t_1, \ldots, t_r$, имеющие здесь тот же смысл, что и в (2). В результате применения алгоритма становятся, в частности, известными конечные множества целых чисел $W = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$, обладающие свойствами (под решениями понимаются решения, принадлежащие $K((x))$):

- для каждого $v_i \in W$ существует решение $y(x)$ оператора L, для которого $\operatorname{val} y(x) = v_i$;
- если $y(x)$ является таким решением оператора L, что $\operatorname{val} y(x) = v_i$, $1 \leq i \leq k$, то тогда для любого продолжения $\tilde{L}$ оператора L найдется его решение $\tilde{y}(x)$, для которого выполняется
$$\tilde{y}(x) = y^{\langle m_i \rangle}(x) + O(x^{m_i+1}); \tag{4}$$

- если $\tilde{y}(x)$ — решение некоторого продолжения $\tilde{L}$ оператора L и $\operatorname{val}\tilde{y}(x) = v_i$, $1 \le i \le k$, то найдется решение $y(x)$ оператора L, для которого

$$\tilde{y}(x) - y(x) = O(x^{m_i+1}) \tag{5}$$

и, как следствие, выполняется (4);

- значения m_i, $i = 1, \dots, k$ являются наибольшими из возможных значений, указанным образом связанных с L и W.

При этом в множества W, M включаются все значения, обладающие этими свойствами.

Если нам известно пространство лорановых решений оператора L (этот оператор имеет полиномиальные коэффициенты; алгоритм построения его лорановых решений является несложной модификацией алгоритма из [4, Sect.6]) и известны также множества W, M, то мы имеем, тем самым, полный список валюаций решений и формулы вида (4), инвариантные относительно продолжений оператора L.

Замечание 1. При рассмотрении лорановых решений $\tilde{y}(x)$ продолжения $\tilde{L}$ оператора L для проверки выполнения (5) существенно, что $\operatorname{val}\tilde{y}(x) = v_i$, т.е. что и у оператора L имеются лорановы решения с такой валюацией v_i. При этом у $\tilde{L}$ могут быть лорановы решения с валюациями, которые не входят в W.

Замечание 2. Последнее напрямую связано с вопросами представления бесконечных рядов, затронутыми во введении: дифференциальное уравнение задано в виде

$$\left(a_r(x) + O(x^{t_r+1})\right)\theta^r y(x) + \dots + \left(a_1(x) + O(x^{t_1+1})\right)\theta y(x) + \left(a_0(x) + O(x^{t_0+1})\right)y(x) = 0, \tag{6}$$

$t_i \ge \deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$. Мы сопоставляем ему оператор (1), а также набор чисел $t_0, t_1, \dots, t_r$, и решаем задачу нахождения $W = \{v_1, \dots, v_k\}$, $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ и формул (4).

Продолжение оператора (1) мы будем в этом случае называть также *продолжением уравнения* (6).

Форма представления результатов работы алгоритма устанавливается в разд. 9.

3. Последовательности коэффициентов лорановых решений

Пусть σ обозначает оператор сдвига: $\sigma c_n = c_{n+1}$ для любой последовательности (c_n). Преобразование

$$x \to \sigma^{-1}, \;\; \theta \to n \tag{7}$$

переводит исходное дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{r} a_i(x)\theta^i y(x) = 0 \tag{8}$$

где $a_i(x) \in K[[x]]$, в *индуцированное* рекуррентное уравнение (соотношение) $u_0(n)c_n + u_{-1}(n)\sigma^{-1}c_n + \dots = 0$. Перепишем это уравнение в виде

$$u_0(n)c_n + u_{-1}(n)c_{n-1} + \dots = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет лораново решение $y(x) = c_v x^v + c_{v+1}x^{v+1} + \dots$ если и только если двусторонняя последовательность

$$\dots, 0,\ 0,\ c_v,\ c_{v+1},\ \dots \tag{10}$$

удовлетворяет уравнению (9), т.е.

$$
\begin{aligned}
&u_0(v)c_v = 0,\\
&u_0(v+1)c_{v+1} + u_{-1}(v+1)c_v = 0,\\
&u_0(v+2)c_{v+2} + u_{-1}(v+2)c_{v+1} + u_{-2}(v+2)c_v = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

(доказательство см. в [4]).

Здесь $(c_n)_{-\infty<n<\infty}$ — последовательность такая, что $c_n = 0$ для всех отрицательных целых n при достаточно большом $|n|$; каждый из полиномов $u_0(n), u_{-1}(n), \dots \in K[n]$ имеет степень, меньшую или равную r; $u_0(n)$ — *ведущий* коэффициент соотношения (9).

Напомним, что по нашему предположению свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ не равен нулю. Отсюда следует, что

$$
u_0(n) = \sum_{i=0}^{r} a_{i,0}\, n^i
$$

— ненулевой полином. Он не зависит от продолжений исходного оператора L.

Мы видим, что если коэффициенты уравнения (8) — бесконечные ряды, то сумма (9) содержит бесконечное число слагаемых. Но так как существует такое $v \in \mathbb{Z}$, что $c_n = 0$ для всех $n < v$, то при каждом конкретном $n \geq v$ сумма (9) конечна. Ведущий коэффициент $u_0(n)$ может быть рассмотрен как некоторый вариант *определяющего полинома* исходного уравнения. Конечное множество целых корней этого полинома содержит все возможные валюации v лорановых решений уравнения (8).

4. Дополнительные соотношения для вычисленных коэффициентов ряда

Если для некоторого целого n выполнено $u_0(n) \neq 0$, то (9) позволит найти c_n по $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots$. Если же $u_0(n) = 0$, то в такой момент мы объявляем (возможно, что временно) c_n *неопределенным* коэффициентом, входящим в выстраиваемое решение. При этом выясняется, что предшествующие значения $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots$ должны удовлетворять соотношению

$$
u_{-1}(n)c_{n-1} + u_{-2}(n)c_{n-2} + \cdots = 0. \tag{11}
$$

Такого рода соотношения имеют конечное число слагаемых в левой части и позволят, возможно, избавиться от некоторых введенных ранее неопределенных коэффициентов. Только после того, как при пошаговом увеличении значение n начнет превосходить наибольший целый корень уравнения $u_0(n) = 0$, появится гарантия, что как новые неопределенные коэффициенты, так и соотношения вида (11), уже возникать не будут.

5. Основа алгоритма

Если полином $u_0(n)$ не имеет целых корней, то ни одно из продолжений уравнения $L(y) = 0$ не имеет решений в $K((x))$. Алгоритм сообщает об этом и прекращает работу.

Если имеются целые корни $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$, то как при рассмотрении оператора L, так и его продолжений, только для α_s гарантировано существование лоранова решения с такой валюацией. С $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ надо разбираться. Для каждого из этих корней существуют три возможности:

(a) лорановы решения существуют при всех продолжениях;

(b) лорановы решения существуют при некоторых, но не при всех продолжениях;

(c) лорановы решения не существуют ни при каких продолжениях.

Прежде всего, надо определить, какая из трех возможностей имеет место. В подобных ситуациях мы привлекаем символьные *незаданные коэффициенты*: добавляем к каждому входящему в оператор L полиному $a_i(x)$ вида (2) некоторое число старших по степени слагаемых $a_{i,t_i+1}x^{t_i+1}+a_{i,t_i+2}x^{t_i+2}+\ldots$, где $a_{i,t_i+1}, a_{i,t_i+2}, \ldots$ — символы ("буквенные обозначения"). Проделав вычисления, мы можем увидеть, зависят ли значения тех выражений, исходя из которых мы делаем заключение, например, о возможностях (a), (b), (c), от значений $a_{i,t_i+1}, a_{i,t_i+2}, \ldots$

Итак, добавляя символьные коэффициенты, можно установить для рассматриваемого α_i, какая из названных трех возможностей имеет место. Если это (a), то находим m. Если же это (b) или (c), то исключаем α_i из рассмотрения.

В результате оказывается определенным множество валюаций $W = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Для каждой из этих валюаций v_i будет определено свое число m_i. Т.е. мы имеем множество $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ целых чисел, для них выполнены соответствующие соотношения вида (4).

Если мы рассматриваем решения, имеющие валюацию α_l, $l < s$, то, используя индуцированное рекуррентное соотношение (9), надо продвинуться в построении решения по крайней мере до x^{α_s}, даже если уже до этого момента в коэффициенты выстраиваемого ряда попали символьные незаданные коэффициенты продолжения. Использование индуцированного рекуррентного уравнения при n, равном какому-то из целых корней его старшего коэффициента, дает линейное соотношение (11) для уже полученных коэффициентов ряда, — символьных или принадлежащих K — см. разд. 4. Если дошли до наибольшего корня и при этом выяснили, что эти соотношения как-то ограничивают выбор продолжения (препятствует произвольному выбору), то исключаем из рассмотрения решения с валюацией α_l. Если же соотношения не ограничивают выбор продолжения (например, все входящие в систему соотношения всего лишь выражают имеющиеся неопределенные коэффициенты через добавляемые незаданные коэффициенты), то выбираем из построенного отрезка его начальные члены в соответствии с формулой (4) при $v_i = \alpha_l$.

После этого можно построить базис пространства усеченных лорановых решений валюации большей или равной v_1 в виде конечного множества отрезков рядов, которое представляется объединением k подмножеств; i-е подмножество, $1 \le i \le k$, состоит из усеченных решений, имеющих валюацию v_i, причем усеченные ряды, входящие в какое-то фиксированное подмножество, являются линейно-независимыми над полем констант.

6. Шаги алгоритма

1. Входные данные: дифференциальный оператор (1) с полиномиальными коэффициентами, целые неотрицательные числа $t_0, t_1, \ldots, t_r$.

2. Положить $W = M = \varnothing$.

3. Построить коэффициент $u_0(n) = \sum_{i=0}^{r} a_{i,0}\, n^i$ индуцированного рекуррентного уравнения (9). Вычислить множество $\alpha_1 < \cdots < \alpha_s$ целых корней $u_0(n)$. Если это множество пусто, то лорановых решений нет.

4. Определить d как разность максимального и минимального корней полинома $u_0(n)$. Вычислить коэффициенты $u_{-k}(n) = \sum_{i=0}^{r} a_{i,k}\ (n-k)^i$, $k = 1 \ldots d$, индуцированного рекуррентного уравнения (9). Заметим, что при $k > t_i$ найденное $u_{-k}(n)$ будет содержать символьные незаданные коэффициенты $a_{i,k}$.

5. Для каждого α_i вычислить начальные коэффициенты c_n лоранова решения с возможной валюацией α_i, полагая $c_n = 0$ для всех $n < \alpha_i$ и последовательно увеличивая n, начиная с $n = \alpha_i$.

5.1. Выполнить вычисления до n, равного α_s, и определить какой из случаев (a), (b), (c) из разд. 5 имеет место для данного α_i.

5.2. Если имеет место случай (b) или (c) перейти к следующему корню, либо завершить вычисления в цикле, если уже достигнут последний корень.

5.3. Если имеет место случай (a), то добавить α_i к W и продолжить вычисления для последующих n, при необходимости вычисляя и дополнительные $u_{-k}(n)$, $k > d$. Если максимальный целый корень пройден, то для каждого следующего n будет определено выражение для c_n. Остановить вычисление, когда в выражении для c_n появляются символьные незаданные коэффициенты. Положить $m_i = n - 1$.

5.4. Добавить m_i к M, собрать из вычисленных коэффициентов $c_{\alpha_i} \dots c_{m_i}$ лораново решение уравнения $L(y) = 0$ с валюацией α_i, имеющее вид (4), включающее произвольные постоянные. После этого перейти к следующему корню, либо завершить вычисления, если уже достигнут последний корень.

6. Результат: найденные лорановы решения, вместе с множествами W и M.

Пример 1. Проследим шаги предложенного алгоритма на примере оператора

$$L = -\theta^2 - 2\,\theta, \;\; t_0 = t_1 = t_2 = 0. \tag{12}$$

На шаге 3 получаем определяющий полином $u_0(n) = -n^2 - 2n$ и множество его целых корней: $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$. На шаге 4 строим $u_{-1}(n)$, $u_{-2}(n)$, которые содержат символьные незаданные коэффициенты, присутствующие в продолжении оператора L.

На шаге 5 для для возможной валюации $\alpha_1 = -2$ последовательно вычисляем c_{-2}, c_{-1}, c_0:

- $n = -2$: $u_0(-2)\,c_{-2} = 0 \cdot c_{-2} = 0$, коэффициент c_{-2} остается неопределенным.
- $n = -1$: $u_0(-1)\,c_{-1} + u_{-1}(-1)\,c_{-2} = c_{-1} + u_{-1}(-2)\,c_{-2} = 0$. Имеем $c_{-1} = -u_{-1}(-1)\,c_{-2}$.
- $n = 0$: $u_0(0)\,c_0 + u_{-1}(0)\,c_{-1} + u_{-2}(0)\,c_{-2} = 0\,c_0 + u_{-1}(0)\,c_{-1} + u_{-2}(0)\,c_{-2} = -u_{-1}(0)\,u_{-1}(-1)\,c_{-2} + u_{-2}(0)\,c_{-2} = (-u_{-1}(0)\,u_{-1}(-1) + u_{-2}(0))\,c_{-2} = 0$. Коэффициент c_0 остается неопределенным при этом выясняется, что $c_{-2} = 0$, если $-u_{-1}(0)\,u_{-1}(-1) + u_{-2}(0) \neq 0$. Так как $u_{-1}(n)$ и $u_{-2}(n)$ зависят от незаданных коэффициентов, то здесь имеем случай (b), т.е. лорановы решения с валюацией $\alpha_1 = -2$ существуют только если $-u_{-1}(0)\,u_{-1}(-1) + u_{-2}(0) = 0$. Эта валюация отсеивается.

Шаг 5 для $\alpha_2 = 0$:

- $n = 0$: $u_0(0)\,c_0 = 0 \cdot c_0 = 0$, коэффициент c_0 остается неопределенным.
- $n = 1$: $u_0(1)\,c_1 + u_{-1}(1)\,c_0 = -3\,c_1 + u_{-1}(1)\,c_0 = 0$. Имеем $c_1 = \frac{u_{-1}(1)\,c_0}{3}$. При этом $u_{-1}(1)$, а значит и c_1, зависит от незаданных коэффициентов. Поскольку $n = 0$, соответствующий максимально возможной валюации, уже пройден, то дальнейшие вычисления не требуются.

Следовательно, для уравнения $L(y) = 0$ имеем $W = \{0\}$, $m_1 = 0$. При любом продолжении коэффициентов есть лораново решение:

$$y(x) = C + O(x), \tag{13}$$

где C — произвольная постоянная. При $C = 0$ это решение равно нулю, так как у лоранова решения оператора (12) валюация не может быть положительной. Решение (13) можно записать в виде $C(1 + O(x))$.

Пример 2. Добавим к коэффициентам оператора (12) несколько слагаемых:

$$\tilde{L} = (-1 + x + x^2)\,\theta^2 - 2\,\theta + (x + 6x^2), \quad t_0 = 3,\ t_1 = t_2 = 2. \tag{14}$$

Шаг 3 для $\tilde{L}$ дает те же результаты, что и для (12). На шаге 4 получаем

$$u_{-1}(n) = (n-1)^2 + 1,\ u_{-2}(n) = (n-2)^2 + 6.$$

Шаг 5 для для возможной валюации $\alpha_1 = -2$ выполняется аналогично (12). Но для $n = 0$ имеем $-u_{-1}(0)\,u_{-1}(-1) + u_{-2}(0) = -((0-1)^2+1)((-1-1)^2+1) + ((0-2)^2+6) = 0$, что означает, что соотношение (11) является тождеством $0 = 0$ и, значит, коэффициент c_{-2} остается неопределенным. Соответственно, для валюации $v_1 = -2$ лорановы решения существуют при любом продолжении $\tilde{L}$. Здесь имеем случай (a). Получаем $c_{-1} = -u_{-1}(-1)\,c_{-2} = -((-1-1)^2+1)\,c_{-2} = -5\,c_{-2}$. Дальнейшие вычисления не требуются, так как корень $n = 0$, соответствующий максимально возможной валюации, пройден, а выражения для всех последующих коэффициентов решения будут содержать незаданные коэффициенты. Соответственно, для уравнения $\tilde{L}(y) = 0$ при любом продолжении коэффициентов есть лораново решение с валюацией $v_1 = -2$:

$$\frac{C_1}{x^2} - \frac{5C_1}{x} + C_2 + O(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Шаг 5 для $\alpha_2 = 0$:

- $n = 0$: $u_0(0)\,c_0 = 0 \cdot c_0 = 0$, коэффициент c_0 остается неопределенным.
- $n = 1$: $u_0(1)\,c_1 + u_{-1}(1)\,c_0 = -3\,c_1 + 1\,c_0 = 0$. Имеем $c_1 = \frac{1}{3}c_0$.
- $n = 2$: $u_0(2)\,c_2 + u_{-1}(2)\,c_1 + u_{-2}(2)\,c_0 = -8\,c_2 + 2\,c_1 + 6\,c_0 = 0$. Имеем $c_2 = \frac{5}{6}c_0$.
- $n = 3$: Вычисляем $u_{-3}(n) = a(n-3)^2 + b(n-3)$, где a и b — символьные незаданные коэффициенты. Тогда $u_0(3)\,c_3 + u_{-1}(3)\,c_2 + u_{-2}(3)\,c_1 + u_{-3}(3)\,c_0 = -15\,c_3 + 5\,c_2 + 7\,c_1 + 0\,c_0 = 0$. Имеем $c_3 = \frac{13}{30}c_0$. Отметим, что в данном случае c_3 удалось вычислить, несмотря на то, что $u_{-3}(n)$ содержит незаданные коэффициенты, поскольку $u_{-3}(3) = 0$ при любых значениях этих незаданных коэффициентов.

Дальнейшие вычисления не требуются, так как корень $n = 0$, соответствующий максимально возможной валюации, пройден, а выражения для всех последующих коэффициентов решения будут содержать незаданные коэффициенты. Соответственно, для уравнения $\tilde{L}(y) = 0$ при любом продолжении коэффициентов есть лораново решение с валюацией $v_2 = 0$:

$$C + \frac{1}{3}\,Cx + \frac{5}{6}\,Cx^2 + \frac{13}{30}\,Cx^3 + O(x^4). \tag{15}$$

Итак, для уравнения $\tilde{L}(y) = 0$ мы нашли $W = \{-2, 0\}$, $m_1 = 0$, $m_2 = 3$.

Пример 3. Если же добавить новые слагаемые к коэффициентам исходного оператора (12) иначе:

$$\tilde{\tilde{L}} = (-1 + x + x^2)\,\theta^2 + (-2 + x^2)\,\theta, \quad t_0 = 3,\ t_1 = t_2 = 2, \tag{16}$$

то аналогичные вычисления показывают, что $W = \{0\}$, $m_1 = 3$ для уравнения $\tilde{\tilde{L}}(y) = 0$. При любом продолжении коэффициентов имеется лораново решение: $C + O(x^4)$. Здесь имеем случай (c), который привел к отсеиванию возможной валюации -2.

Резюмируем рассмотрение примеров 1, 2 и 3. Мы имеем уравнения $L(y) = 0$, $\tilde{L}(y) = 0$, $\tilde{\tilde{L}}(y) = 0$, причем последние два уравнения являются в смысле определения 2 продолжениями первого уравнения. Как показано в примере 1, не существует кроме 0 никакого целого значения, для которого любое продолжение уравнения $L(y) = 0$ имело бы лораново решение с валюацией, равной этому значению. И, хотя уравнение $\tilde{L}(y) = 0$ обладает лорановым решением с валюацией -2, но при этом уравнение $\tilde{\tilde{L}}(y) = 0$ не имеет решений с такой валюацией. Это подтверждает правильность полученного в примере 1 ответа.

Предложение 1. *Пусть значения $v_1, \dots, v_k$, $m_1, \dots, m_k$ найдены предложенным алгоритмом для уравнения $L(y) = 0$, где L имеет вид (1) и $t_i \geq \deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$. Пусть m — такое положительное целое, что $m > m_i$ для некоторого $1 \leq i \leq k$. Тогда для уравнения $L(y) = 0$ существует такое продолжение $\tilde{L}(y) = 0$, что для некоторого его решения $\tilde{y}(x) \in K((x))$, $\operatorname{val} \tilde{y}(x) = v_i$, равенство $\tilde{y}(x) = y^{\langle m \rangle}(x) + O(x^m + 1)$ не выполняется ни для какого решения $y(x) \in K((x))$, $\operatorname{val} y(x) = v_i$, уравнения $L(y) = 0$.*

Доказательство. Предложенный алгоритм находит каждое из значений m_i, используя, в частности, то, что добавленные в $a_j(x)$ члены с символьными коэффициентами появляются в выражениях для коэффициентов решений. И для разных продолжений оператора L мы можем получать разные коэффициенты компонент решений $\tilde{y}_i$ при x^j, когда $j > m_i$. □

Замечание 3. Аналогично замечанию 1 в предложении 1 существенно, что и $\operatorname{val} \tilde{y}(x) = v_i$, и $\operatorname{val} y(x) = v_i$, т.е. что и у L имеются лорановы решения с такой валюацией v_i. При этом у $\tilde{L}$ могут быть лорановы решения с валюациями, которые не входят в $v_1, \dots, v_k$. Это иллюстрируют примеры 1 и 2.

Замечание 4. Мы предполагаем, что в операторе L вида (1) свободный член хотя бы одного полиномиального коэффициента отличен от нуля. Это предположение гарантирует, что полином $u_0(n)$ в (9) будет ненулевым. Дополнительно отметим, что если наименьшая валюация ненулевых коэффициентов уравнения положительна и равна β, и если при этом $t_i \geq \beta$ для каждого коэффициента $a_i(x)$, включая нулевые коэффициенты, то можно поделить обе части уравнения на x^β и заменить каждое t_i на $t_i - \beta$, а затем применить наш алгоритм.

7. Связь с задачей усечения

Легко доказывается, что уравнение вида $L(y) = 0$, $L \in K((x))[\theta]$, имеет решение в $K((x))$ если и только если определяющий полином оператора L имеет целые корни (при наличии таких корней существует, например, лораново решение с валюацией, равной наибольшему из них). Этот факт обсуждается, в частности, в [3], где, помимо этого, рассмотрена так называемая задача усечения: какое количество начальных членов коэффициентов оператора L влияет на заданное число первых членов лоранова решения уравнения $L(y) = 0$?

Предложение 2. [3, Prop. 1(ii)] *Пусть $L \in K[[x]][\theta]$ — оператор с бесконечными степенными рядами в роли коэффициентов, пусть его определяющий полином обладает целыми корнями и e^*, e_* — наибольший и наименьший из них. Пусть $s_l = \max\{e^* - e_*, l - 1\}$ для $l = 1, 2, \dots$ Тогда уравнение $L(y) = 0$ обладает решением $f(x) \in K((x))$ если и только если усеченное уравнение $L^{\langle s_l \rangle}(y) = 0$ обладает таким решением $g(x) \in K((x))$, что $f(x) - g(x) = O(x^{v+l})$, где $v = \operatorname{val} f(x)$.*

Замечание 5. В [3] и в настоящей статье понятие усечения ряда определено по-разному. В приведенной выше формулировке предложения 2 это понятие интерпретируется в соответствии с определением 1.

Предложение 2 позволяет сформулировать еще один подход к решению рассматриваемой в настоящей статье задачи. Пусть L — оператор вида (1) с коэффициентами (2). Положим $t = \min_{i=0}^{r} t_i$ и найдем наибольшее целое l, для которого $s_l \leq t$. Тогда набор валюаций лорановых решений уравнения $L^{\langle s_l \rangle}(y) = 0$ и первые члены этих решений в количестве l дают требуемое (при этом подходе $m_i = v_i + l - 1$).

Такой подход не требует добавления символьных коэффициентов. Но, например, когда $s_1 > t$ (значения t_i оказываются слишком малыми) мы не можем выбрать l, — подход оказывается неприменимым. Однако алгоритм, представленный в разд. 6, справляется с этой ситуацией. Вернемся к примеру 1, где $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ и, следовательно, $t = 0$. Вместе с этим, $s_l = \max\{2, l-1\} \geq 2$. Подход, основанный на предложении 2, не дает решения задачи, а представленный в разд. 6 алгоритм позволил в примере 1 получить решение.

Несложно также показать, что алгоритм из разд. 6 может находить больше членов лорановых решений, чем основанный на предложении 2. Для (14) основанный на предложении 2 алгоритм вместо (15) получит на один член меньше: $C + \frac{1}{3}\,Cx + \frac{5}{6}\,Cx^2 + O(x^3)$.

8. Операции дифференцирования: θ и D

Если исходное дифференциальное уравнение записано с привлечением D вместо θ, то заменой $D = x^{-1}\theta$ это уравнение можно преобразовать в эквивалентное уравнение, записанное с помощью θ, — здесь будет полезно равенство для композиции операторов θ и x^{-1}: $\theta x^{-1} = x^{-1}(\theta - 1)$. Понятно, что если исходное уравнение задано в виде

$$\begin{aligned}(w_r(x) + O(x^{\tau_r+1}))\,D^r y(x) \;+ \ldots +\; (w_1(x) + O(x^{\tau_1+1}))\,Dy(x) \,+ \\ +\; (w_0(x) + O(x^{\tau_0+1}))\,y(x) \;=\; 0,\end{aligned} \tag{17}$$

то в результате описанного преобразования мы придем к уравнению (6), но $t_0, t_1, \ldots, t_r$ могут отличаться от $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_r$. Коэффициенты

$$a_i(x) + O(x^{t_i+1}), \;\; i = 0, 1, \ldots, r \tag{18}$$

для нового уравнения могут быть найдены с привлечением символьных незаданных коэффициентов, которые не должны влиять на (18).

Переход от D к θ можно выполнить и не прибегая к символьным незаданным коэффициентам: на оператор (17) смотрим как на оператор с полиномиальными коэффициентами $w_0(x), \ldots, w_r(x)$, но степень каждого $w_i(x)$ считаем равной t_i, полагая при необходимости коэффициенты при некоторых из старших степеней равными нулю, — вспомним, что $w_0(x), \ldots, w_r(x)$ являются усеченными рядами и каждое t_i задает соответствующее усечение. Не исключается, что при выполнении перехода от D к θ коэффициент при некотором θ^i возникнет как сумма полиномов разных степеней (при этом степени понимаются в указанном смысле). В таком случае степени этих полиномов-усечений должны быть выровнены по младшей из них. Это полностью согласуется с основанном на привлечении символьных незаданных коэффициентов подходом.

Пример 4. При переходе от D к θ в операторе

$$L = (-x + x^2 + x^3)\,D^2 + (-3 + x)\,D, \;\; \tau_0 = 2, \tau_1 = 1, \tau_2 = 3 \tag{19}$$

результирующий коэффициент при θ представляется суммой $1 - x - x^2$ с $t_1 = 2$ и $-3 + x$ с $t_1 = 1$. При суммировании необходимо перейти к меньшему из усечений. В нашем случае сумма равна -2 с $t_1 = 1$.

Применение алгоритма к получившемуся оператору

$$(-1 + x + x^2)\,\theta^2 + (-2)\,\theta, \quad t_0 = 3, t_1 = 1, t_2 = 2$$

показывает, что при любом продолжении коэффициентов оператора L имеется лораново решение:

$$C + O(x^4),$$

$W = \{0\}$, $m_1 = 3$.

При переходе от уравнения, заданного в виде (17), к эквивалентному уравнению, заданному в виде (6), возможна ситуация, когда для некоторого i $(0 \le i \le r)$ окажется, что $t_i < 0$, даже если все $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_r$ — неотрицательные целые. Это будет означать, что заданное уравнение с усеченными коэффициентами содержит недостаточно информации для получения определяющего полинома как полинома от n с коэффициентами из K. Так, уравнению

$$\left(x^2 + O(x^3)\right) D^2 y(x) + O(x) D y(x) + (1 + O(x))\, y(x) = 0,$$

эквивалентно

$$(1 + O(x))\theta^2 y(x) + O(1)\theta y(x) + (1 + O(x)) y(x) = 0 \tag{20}$$

и определяющий полином есть

$$u_0(n) = n^2 + a_{1,0} n + 1, \tag{21}$$

где коэффициент при $\theta y(x)$ уравнения (20) предполагается равным $a_{1,0} + O(x)$; при этом $a_{1,0}$, т.е. свободный член этого коэффициента, выступает как еще одна переменная полинома u_0. Здесь мы не можем применять алгоритм из разд. 6.

9. Программная реализация и примеры использования

Алгоритм реализован в среде Maple ([6]) в виде процедуры `LaurentSolution`. Первым аргументом процедуры является дифференциальное уравнение вида (6). Применение θ^k к неизвестной функции $y(x)$ записывается как `theta(y(x),x,k)`. Также возможно использование обычного дифференцирования (оператора D — см. разд. 8); в этом случае применение оператора D^k к неизвестной функции $y(x)$ задается в стандартном для Maple виде `diff(y(x),x$k)`. Усеченные коэффициенты уравнения задаются в виде $a_i(x) + O(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ — полином степени не выше t_i над полем рациональных чисел. В качестве второго аргумента процедуры задается неизвестная функция.

Результат работы процедуры — список усеченных лорановых решений, соответствующих валюациям $v_i \in W$. Каждый элемент списка представляется в виде

$$c_{v_i} x^{v_i} + c_{v_i+1} x^{v_i+1} + \cdots + c_{m_i} x^{m_i} + O(x^{m_i+1}), \tag{22}$$

где $v_i \in W$ — валюация, для которой гарантировано существование лоранова решения при любом продолжении заданного уравнения; m_i имеет прежний смысл, c_i — сами вычисленные коэффициенты лоранова решения, которые могут являться линейными комбинациями произвольных постоянных вида $\_c_j$.

Далее следуют восемь примеров, которые мы объединяем в один, содержащий пп. 1–8.

Пример 5.

1. Каждое из уравнений

$$\sin x\, \theta y(x) - x \cos x\, y(x) = 0, \tag{23}$$

$$(e^x - 1)\theta y(x) - xe^x\, y(x) = 0 \tag{24}$$

можно представить в виде

$$(x + O(x^2))\theta y(x) + (-x + O(x^2))y(x) = 0. \tag{25}$$

Применим реализованную процедуру к (25).

```
> eq1 := (x+O(x^2))*(theta(y(x),x,1))+(-x+O(x^2))*y(x);
```

$$eq1 := \left(x + O(x^2)\right)\theta(y(x), x, 1) + \left(-x + O(x^2)\right) y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq1, y(x));
```

$$\left[x\_c_1 + O(x^2)\right]$$

Полученный ответ означает, что здесь $W = \{1\}$, $m_1 = 1$.

2. Добавим к коэффициентам уравнения (25) некоторые члены, соответствующие коэффициентам (23). Получим усечение решения до степени x^2, которое соответствует разложению в степенной ряд функции $\sin(x)$, являющейся решением (23):

```
> eq2 := (x+O(x^3))*(theta(y(x),x,1))+(-x+x^3/2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq2 := \left(x + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + \left(-x + \frac{x^3}{2} + O(x^4)\right) y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq2, y(x));
```

$$\left[x\_c_1 + O(x^3)\right]$$

Полученный ответ также означает, что здесь $W = \{1\}$, $m_1 = 2$.

3. Теперь добавим к коэффициентам уравнения (25) некоторые члены, соответствующие коэффициентам (24). Получим усечение решения до степени x^2, которое соответствует разложению в степенной ряд функции $\exp(x) - 1$, являющейся решением (24).

```
> eq3 := (x+x^2/2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+(-x-x^2-x^3/2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq3 := \left(x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + \left(-x - x^2 - \frac{x^3}{2} + O(x^4)\right) y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq3, y(x));
```

$$\left[x\_c_1 + \frac{x^2\_c_1}{2} + O(x^3)\right]$$

Полученный ответ также означает, что $W = \{1\}$, $m_1 = 2$.

4. Для каждого из уравнений из пп. 1–3 существует только одно значение валюации, для которого лорановы решения существуют при любом продолжении уравнения. Рассмотрим применение процедуры к уравнению, заданного оператором (14):

```
> eq4 := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+(-2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
        (x+6*x^2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq4 := \left(-1 + x + x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 2) + \left(-2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1)+$$

$$(x + 6x^2 + O(x^4))y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq4, y(x));
```

$$\left[\frac{\_c_1}{x^2} - \frac{5\_c_1}{x} + \_c_2 + O(x),\ \_c_1 + \frac{x\_c_1}{3} + \frac{5\,x^2\_c_1}{6} + \frac{13\,x^3\_c_1}{30} + O(x^4)\right]$$

Полученный ответ означает, что здесь $W = \{-2, 0\}$, $m_1 = 0$, $m_2 = 3$.

5. Имеет ли смысл рассматривать, например, случай попарно различных $t_0, t_1, \ldots, t_r$, входящих в (6), или же достаточно ограничиться случаем равенства этих чисел? Иными словами, может ли замена в (6) каждого t_i на $t = \min_{i=0}^{r} t_i$ привести к снижению точности результата работы алгоритма? Следующий пример показывает, что такое снижение возможно. Тем самым, связанные с отказом от априорного предположения о равенстве всех t_i затраты времени могут быть не напрасными.

Для следующего уравнения получаем пять членов решения:

```
> eq5 := (1+O(x))*(theta(y(x),x,1))+(x^4+O(x^5))*y(x);
```

$$eq5 := (1 + O(x))\,\theta(y(x), x, 1) + \left(x^4 + O(x^5)\right) y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq5, y(x));
```

$$\left[\_c_1 - \frac{\_c_1\,x^4}{4} + O(x^5)\right]$$

Если взять $t = 0$, то получим только один член решения:

```
> eq6 := (1+O(x))*(theta(y(x),x,1))+O(x)*y(x);
```

$$eq6 := (1 + O(x))\,\theta(y(x), x, 1) + O(x)\,y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq6, y(x));
```

$$[\_c_1 + O(x)]$$

6. Пример уравнения, которое не имеет лорановых решений ни при каких продолжениях:

```
> eq7 := (2+O(x))*(theta(y(x),x,1))+(1+O(x))*y(x);
```

$$eq7 := (2 + O(x))\,\theta(y(x), x, 1) + (1 + O(x))\ y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq7, y(x));
```

$$[\,]$$

Ответ — пустой список — означает отсутствие решений.

7. Если определяющий полином зависит от незаданных коэффициентов уравнения (см. разд. 8), то ответом будет $FAIL$:

```
> eq8 := (x^2+O(x^3))*diff(y(x),x,x)+O(x)*diff(y(x),x)+(1+O(x))*y(x);
```

$$eq8 := \left(x^2 + O(x^3)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + O(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + (1 + O(x))\ y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq8, y(x));
```

$$FAIL$$

В данном случае в результате перехода в уравнении к операции θ оказывается незаданным свободный член коэффициента при θ в первой степени.

8. Применим процедуру к оператору (19) с $D = \frac{d}{dx}$:

```
> eq9 := (-x+x^2+x^3+O(x^4))*(diff(y(x),x,x))+(-3+x+O(x^2))*(diff(y(x),x))+
         O(x^3)*y(x);
```

$$eq9 := \left(-x + x^2 + x^3 + O(x^4)\right) \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + \left(-3 + x + O(x^2)\right) \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + O(x^3)\,y(x)$$

```
> LaurentSolution(eq9, y(x));
```

$$\left[\_c_1 + O(x^4)\right]$$

Полученный ответ также означает, что $W = \{0\}$, $m_1 = 3$.

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за постоянные научные контакты — дискуссии и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramov S., Barkatou M. Computable infinite power series in the role of coeffcients of linear differential systems. Proc. of CASC'2014. Lecture Notes in Computer Science. 2014. Vol. 8660. P. 1–12.

2. Abramov S., Barkatou M., Khmelnov D. On full rank differential systems with power series coefficients. Journal of Symbolic Computation. 2015. Vol. 68. P. 120–137.

3. Abramov S., Barkatou M., Pflügel E. Higher-order linear differential systems with truncated coefficients. Proc. of CASC'2011. Lecture Notes in Computer Science. 2011. Vol. 6885. P. 10–24.

4. Abramov S. A., Bronstein M., Petkovšek M. On polynomial solutions of linear operator equations. Proc. of ISSAC'95. 1995. P. 290–296.

5. Lutz D.A., Schäfke R. On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations. Linear Algebra and Its Applications. 1985. Vol. 72. P. 1–46.

6. Maple online help, http://www.maplesoft.com/support/help/