ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 1, с. 85–92

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

КОНТРПРИМЕРЫ К ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ УСЕЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ УСЕЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. С. А. Абрамов[1,*], А. А. Рябенко[1,], Д. Е. Хмельнов[1,***]**

[1] *119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия*

**e-mail: sergeyabramov@mail.ru*

***e-mail: anna.ryabenko@gmail.com*

****e-mail: dennis_khmelnov@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2022 г.
Переработанный вариант 01.06.2022 г.
Принята к публикации 17.09.2022 г.

Ранее авторами были предложены алгоритмы, которые позволяют находить экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде таких степенных рядов, для которых известны только начальные члены. В решение входит конечное число степенных рядов и для них вычисляется максимально возможное число членов. Теперь к этим алгоритмам добавляется опция подтверждения того, что без дополнительной информации об уравнении невозможно получить большее число членов этих рядов: строится контрпример к предположению о возможности получения однозначно определенных дополнительных членов. В предыдущих работах авторами предлагались такого рода подтверждения для случаев лорановых и регулярных решений. Библ. 23.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, усеченные степенные ряды, системы компьютерной алгебры.

DOI: 10.31857/S0044466923010027, **EDN:** LEVQUY

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с коэффициентами, имеющими вид таких степенных рядов, относительно которых известны только их первые члены, а “хвосты” этих рядов неизвестны. Таким образом, о рассматриваемых уравнениях имеется лишь неполная информация. В [1]–[6] предлагались алгоритмы поиска решений таких уравнений в виде лорановых рядов, а также поиска регулярных и экспоненциально-логарифмических решений. Было доказано, что эти алгоритмы позволяют найти максимально возможное число членов тех рядов, которые входят в решения. Алгоритмы реализованы авторами в виде пакета процедур – см. [7]–[10]. Для пользователя этих процедур может оказаться желательным получить какие-то наглядные доводы в пользу максимальности числа найденных членов рядов. Такого рода наглядные средства и предлагаются ниже: описан алгоритм, который для произвольного уравнения с усеченными коэффициентами предъявляет два продолженных варианта исходного уравнения, решения которых различаются между собой в последующих (не попавших в число найденных) членах рядов, входящих в решения.

Поясним простым примером суть рассматриваемой задачи. С помощью алгоритма из [4] устанавливается, что уравнение

$$\left(x^3 + \frac{x^5}{3} + O(x^6)\right)y'(x) + (1 + 3x + O(x^3))y(x) = 0 \qquad (1)$$

(здесь $O(x^k)$ обозначает какие-то неизвестные нам члены степенного ряда с показателями степени x, не меньшими, чем k) имеет решение

$$e^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{1}{3}}(C+O(x)),\tag{2}$$

где C – произвольная постоянная. Можем ли мы, исходя из (1), узнать большее число членов ряда, который в (2) представлен как $(C + O(x))$? Отрицательный ответ обосновывается предъявлением двух продолженных вариантов уравнения (1):

$$\left(x^3+\frac{x^5}{3}+4x^6+O(x^7)\right)y'(x)+(1+3x+x^3+O(x^4))y(x)=0\tag{3}$$

и

$$\left(x^3+\frac{x^5}{3}-4x^6+O(x^7)\right)y'(x)+(1+3x+O(x^4))y(x)=0.\tag{4}$$

Алгоритм из [4] находит решения этих двух уравнений:

$$e^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{1}{3}}(C+4Cx+O(x^2)),$$
$$e^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{1}{3}}(C-3Cx+O(x^2)).$$

Это показывает, что для входящего в (2) ряда $(C + O(x))$ мы не можем найти его коэффициент при x, не используя для этого никакой дополнительной информации, касающейся уравнения (1). Пара уравнений (3), (4) образуют в терминологии этой статьи *контрпример* к предположению, что последующие члены рядов, входящих в экспоненциально-логарифмические решения уравнения (1), могут быть найдены, исходя только из этого усеченного уравнения.

В разд. 6 демонстрируется построение этого контрпримера, т.е. уравнений (3), (4), с помощью нашего алгоритма, реализованного в среде Maple.

Предварительный вариант этой работы был представлен в виде доклада [11].

2. УСЕЧЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Для кольца полиномов от x над K будет использоваться обычное обозначение $K[x]$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов – через $K((x))$. Очевидно, $K[x] \subset K[[x]] \subset K((x))$. Для принадлежащего $K((x))$ ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ его *валюация* $\operatorname{val} a(x)$ определена равенством $\operatorname{val} a(x) = \min\{i \,|\, a_i \neq 0\}$, при этом $\operatorname{val} 0 = \infty$.

Мы рассматриваем уравнения вида

$$a_r(x)y^{(r)}(x)+a_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x)+\cdots+a_0(x)y(x)=0,\tag{5}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция от x. Относительно $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_r(x)$ (*коэффициентов уравнения*) предполагается, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, r$ коэффициент $a_i(x)$ – это *усеченный ряд*

$$a_i(x)=\sum_{j=0}^{t_i}a_{ij}x^j+O(x^{t_i+1}),\tag{6}$$

где $a_{ij} \in K$; t_i – целое, такое что $t_i \geqslant -1$ (если $t_i = -1$, сумма в (6) полагается равной 0). Здесь и далее символ $O(x^t)$, встречающийся в формальных выражениях, обозначает некоторый ряд, валюация которого не меньше, чем t. Мы называем t_i *степенью усечения* ряда $a_i(x)$, представленного в виде (6). Заметим, что любой коэффициент в (5) может иметь вид $O(x^m)$, $m \geqslant 0$.

Продолжением уравнения (5) будем называть любое уравнение

$$\tilde{a}_r(x)y^{(r)}(x)+\tilde{a}_{r-1}(x)y^{(r-1)}(x)+\cdots+\tilde{a}_0(x)y(x)=0,$$

для которого $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1})$, т.е. $\operatorname{val}(\tilde{a}_i(x) - a_i(x)) > t_i$, $i = 0,1,\ldots,r$.

3. УСЕЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Формальными *экспоненциально-логарифмическими* решениями уравнения

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{rj} x^j\right) y^{(r)}(x) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{r-1,j} x^j\right) y^{(r-1)}(x) + \cdots + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_{0j} x^j\right) y(x) = 0, \tag{7}$$

имеющего полностью заданные коэффициенты-ряды, называются решения вида

$$e^{Q(x^{-1/q})} x^{\lambda} w(x^{1/q}), \tag{8}$$

где Q — полином с коэффициентами из K, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda \in K$,

$$w(x) = \sum_{s=0}^{m} w_s(x) \ln^s x,$$

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $w_s(x) \in K((x))$, $s = 0,\ldots,m$, и $w_m(x) \neq 0$. При этом $x^{\lambda} w(x^{1/q})$ называется *регулярной частью*, $Q(x^{-1/q})$ — *показателем экспоненциальной части*, q — *индексом ветвления* решения (8).

Если $q = 1$ и $Q \in K$, то решение (8) называется *формальным регулярным*, в противном случае — *нерегулярным*. При $q = 1$, $Q \in K$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ и $w(x) \in K((x))$ формальное регулярное решение (8) называется *лорановым*. В обсуждениях решений уравнений слово "формальный" мы опускаем, но подразумеваем.

Пусть в уравнении (7) старший коэффициент $\tilde{a}_r(x)$ отличен от нуля. Известно (см., например, [12, гл. V], [13]–[16]), что существует r линейно независимых над K решений вида (8) для уравнения (7). В [13]–[17] предложены алгоритмы нахождения для r линейно независимых решений вида (8) их индекса ветвления q и показателя экспоненциальной части $Q(x^{-1/q})$. Пусть в (7) валюация по крайней мере одного из коэффициентов равна 0. Тогда для построения индекса ветвления q и показателя экспоненциальной части $Q(x^{-1/q})$ для всех решений достаточно знать значения $r \operatorname{val} \tilde{a}_r(x)$ начальных коэффициентов всех $\tilde{a}_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,r$ (см., например, [18]). Для построения регулярной части решения с любой заданной степенью усечения входящих в $w(x)$ рядов можно применять алгоритмы, предложенные в [12, гл. IV], [19], [20, гл. II, VIII]. Для этого построения также достаточно знать некоторое конечное число начальных коэффициентов всех $\tilde{a}_i(x)$ (см. [21, Prop. 1]).

Пусть $Q(x^{-1/q}) \in K[x^{-1/q}]$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\lambda \in K$ и

$$w_s^{\langle k_s \rangle}(x) = \sum_{j=j_s}^{k_s} w_{s,j} x^j + O(x^{k_s+1}),$$

$j_s, k_s \in \mathbb{Z}$, $k_s \geq j_s$, $s = 0,\ldots,m$, и $w_{m,j_m} \neq 0$. Для уравнения (5) с усеченными коэффициентами мы называем *решением с усеченной регулярной частью* выражение

$$e^{Q(x^{-1/q})} x^{\lambda} \sum_{s=0}^{m} w_s^{\langle k_s \rangle}(x^{1/q}) \ln^s x, \tag{9}$$

коль скоро любое уравнение, являющееся продолжением (5), имеет решение $e^{Q(x^{-1/q})} x^{\lambda} \tilde{w}(x^{1/q})$, являющееся *продолжением решения* (9), т.е. $\tilde{w}(x)$ имеет вид

$$\tilde{w}(x) = \sum_{s=0}^{m} \tilde{w}_s(x) \ln^s x$$

и выполняется $\tilde{w}_s(x) - w_s^{\langle k_s \rangle}(x) = O(x^{k_s+1})$, т.е. $\operatorname{val}(\tilde{w}_s(x) - w_s^{\langle k_s \rangle}(x)) > k_s$, $s = 0,1,\ldots,m$. Мы говорим, что усеченное решение *инвариантно* относительно любого продолжения уравнения (5).

4. РЕШЕНИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ УСЕЧЕНИЯ

В [1]–[4], [7] показано, что для уравнения вида (5) возможно построение всех инвариантных усеченных решений с *максимальной степенью усечения* входящих в решение рядов. Максимальность степени усечения в $s_{\max}$ означает, что не существует инвариантного решения s, являющегося продолжением $s_{\max}$, такого, что степень усечения хотя бы одного ряда в s больше, чем степень усечения соответствующего ряда в $s_{\max}$. В этом случае мы говорим об исчерпывающем использовании информации о заданном уравнении при построении усеченных решений. В названных статьях представлены алгоритмы решения этой задачи и их реализация в Maple.

В [22], [23] мы рассматривали вопрос автоматического подтверждения такого исчерпывающего использования информации о заданном уравнении при построении лорановых и регулярных усеченных решений. Подтверждением служит контрпример, состоящий из двух различных продолжений заданного уравнения, которые приводят к появлению различных дополнительных членов в решениях.

Алгоритмы построения как самих усеченных решений, так и контрпримеров указанного типа основаны на поиске решений с *литералами*, т.е. с символьными обозначениями незаданных коэффициентов входящих в уравнение рядов (см. [7]). Литералы обозначают коэффициенты при членах ряда, степени которых больше степени усечения ряда. Поиск решений с помощью литералов означает представление последующих (неинвариантных для всех возможных продолжений) членов ряда выражениями, содержащими литералы, т.е. незаданные коэффициенты. Это позволяет прояснить влияние незаданных коэффициентов на последующие члены рядов в решении.

Ниже мы расширяем полученные в [22], [23] результаты на случай экспоненциально-логарифмических решений с усеченной регулярной частью. Решается задача предъявления двух различных продолжений исходного уравнения, дающих контрпример к предположению о возможности добавления инвариантных членов к входящим в построенные усеченные решения заданного усеченного уравнения.

5. ПОСТРОЕНИЕ КОНТРПРИМЕРА

Содержащее литералы продолжение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{gathered}\left(\sum_{j=0}^{t_r} a_{rj}x^j + \sum_{j=t_r+1}^{\infty} U_{rj}x^j\right)y^{(r)}(x)+\left(\sum_{j=0}^{t_{r-1}} a_{r-1,j}x^j + \sum_{j=t_{r-1}+1}^{\infty} U_{r-1,j}x^j\right)y^{(r-1)}(x)+\cdots\\ \cdots+\left(\sum_{j=0}^{t_0} a_{0j}x^j + \sum_{j=t_0+1}^{\infty} U_{0j}x^j\right)y(x)=0,\end{gathered}\tag{10}$$

где U_{ij} – обозначение литерала. Алгоритм из [15], в более общем виде представленный в [17], позволит построить экспоненциальные части $e^{Q(x^{-1/q})}$ всех решений вида (8) для уравнения (10). Нас будут интересовать только те из них, для которых индекс ветвления q и коэффициенты полинома Q не зависят от литералов. Для каждой из таких пар q, Q выполняем в (10) подстановку

$$x = t^q, \quad y(x) = e^{Q(1/t)}z(t),$$

где t – новая независимая переменная, $z(t)$ – новая неизвестная функция. В результате подстановки и умножения уравнения на $e^{-Q(1/t)}$ получаем новое уравнение, коэффициенты которого являются лорановыми рядами от t. Коэффициенты этих рядов являются полиномами от литералов над K. Для нового уравнения строим регулярные решения $t^{\lambda}w(t)$, используя вариант алгоритма из [3, разд. 4.2]. Этот вариант для каждого ряда, входящего в регулярное решение, вычисляет максимальное число членов, инвариантных относительно всех продолжений уравнения, и, дополнительно, еще один член, коэффициент которого зависит от литералов. Этот коэффициент является полиномом над K конечного числа литералов.

Таким образом, для экспоненциально-логарифмического решения с усеченной регулярной частью (9) мы получим конечное множество полиномов от литералов, которое можно использовать для построения контрпримера.

В [23] при рассмотрении усеченных лорановых и регулярных решений нами была доказана следующая

Лемма 1 (см. [23, лемма 1]). *При любом целом* $m > 0$ *и* $p_i(x_1,\ldots,x_l) \in K[x_1,\ldots,x_k] \backslash K$, $i = 1,\ldots,m$, *существуют такие* $\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\ldots,\beta_l \in K$, *что*

$$p_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_l) \neq p_i(\beta_1,\ldots,\beta_l), \quad i = 1,\ldots,m. \tag{11}$$

Из приведенного в [23] доказательства следует, что

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\ldots,\beta_l \tag{12}$$

могут быть взяты целочисленными (в любое поле K характеристики 0 естественным образом вкладывается кольцо целых чисел). Можно перебирать все целочисленные наборы (12) до первого, удовлетворяющего (11). Это позволит фактически найти нужный набор. Здесь возможно также привлечение эвристик и случайного выбора.

На основе этого можно описать алгоритм построения контрпримера к предположению о возможности получения однозначно определенных дополнительных членов рядов, присутствующих в решениях.

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{E}$ — *уравнение вида* (5), s — *его усеченное решение, найденное с помощью алгоритма из* [4]. *Тогда для* $\mathscr{E}$ *существуют два различных продолжения* $\mathscr{E}_1$ *и* $\mathscr{E}_2$, *имеющих усеченные решения* s_1 *и соответственно* s_2, *которые являются такими продолжениями* s, *что любой усеченный ряд, входящий в* s, *имеет продолжение как в* s_1, *так и в* s_2, *и уже самые первые дополнительные члены в* s_1, s_2 *не совпадают.*

Доказательство. Каждый входящий в усеченное решение вида (9) ряд строится алгоритмом из [4] до первого содержащего литералы члена, который уже не включается в итоговое усеченное решение. Перед моментом отбрасывания членов с литералами ряд в усеченном решении может быть записан в виде

$$c_{i0} + c_{i1}x + \ldots + c_{ik_i}x^{k_i} + p_i(u_1,\ldots,u_l)x^{k_i+1} + O(x^{k_i+2}),$$

где

$u_1,\ldots,u_l$ — некоторые из литералов, встречающихся в (10),

$c_{i0}, c_{i1},\ldots,c_{ik_i}$ — не зависящие от литералов константы,

$p_i(u_1,\ldots,u_l)$ — не являющийся константой полином над K от литералов $u_1,\ldots,u_l$, $i = 1,\ldots,m$.

К полиномам $p_i(u_1,\ldots,u_l)$, $i = 1,\ldots,m$, можно применить лемму 1. Таким образом, существуют и могут быть найдены два различных набора (целых) значений $\alpha_1,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\ldots,\beta_l \in K$ для литералов $u_1,\ldots,u_l$, с помощью которых строятся продолжения $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, имеющие усеченные решения s_1 и s_2 с различающимися дополнительными членами $p_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_l)x^{k_i+1}$ и $p_i(\beta_1,\ldots,\beta_l)x^{k_i+1}$ соответственно, не содержащими литералов. Отсюда следует утверждение теоремы.

6. РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ

Построение контрпримера реализовано в системе компьютерной алгебры Maple 2021 как расширение возможностей процедуры *FormalSolution* из пакета *TruncatedSeries*. Этот пакет содержит наши реализации в Maple алгоритмов, представленных в [1]–[9], [22], [23]. Файлы Maple-библиотеки, содержащей пакет, и файлы Maple-сессий с примерами использования процедур пакета можно найти на странице [10].

Первый параметр процедуры *FormalSolution* — дифференциальное уравнение (5). Производная $y(x)$ порядка i записывается стандартным для Maple образом: $\mathrm{diff}(y(x), x\$i)$. Усеченные коэффициенты вида (6) записываются как $a_i(x) + \mathrm{O}(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ — полином степени, не большей чем t_i, над полем алгебраических чисел.

Имя неизвестной функции задается во втором параметре процедуры.

Для работы с процедурами пакета необходимо загрузить архив TruncatedSeries2021.zip, расположенный на странице [10]. Этот архив содержит два файла: maple.ind и maple.lib. Необходимо поместить эти файлы в некотором каталоге, например "/usr/userlib", и в Maple-сессии выполнить присваивание

$>libname := \text{" /usr/userlib"}, libname:$

Следующая команда в сессии делает возможным обращение к процедурам пакета *TruncatedSeries* в короткой форме:

$>with(TruncatedSeries):$

Интерфейс системы Maple 2021 позволяет вводить уравнения в математической форме. Присвоим переменной *eq* выражение, обозначающее уравнение (1):

$$>eq := \left(1+3x+\mathrm{O}(x^3)\right)y(x)+\left(x^3+\frac{1}{3}x^5+\mathrm{O}(x^6)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=0:$$

В результате следующего вызова процедуры *FormalSolution* будет получено усеченное решение с максимальной степенью усечения:

$>FormalSolution(eq, y(x), 'counterexample' = 'Eqs')$

$$\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{1}{3}}\left(\_c_1+\mathrm{O}(x)\right)\right]$$

и переменной *Eqs* будет присвоена пара уравнений, представляющая собой контрпример:

$>Eqs[1]$

$$\left(1+3x+x^3+\mathrm{O}(x^4)\right)y(x)+\left(x^3+\frac{x^5}{3}+4x^6+\mathrm{O}(x^7)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=0$$

$>Eqs[2]$

$$\left(1+3x+\mathrm{O}(x^4)\right)y(x)+\left(x^3+\frac{x^5}{3}-4x^6+\mathrm{O}(x^7)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)=0$$

Для уравнений контрпримера построим усеченные решения:

$>FormalSolution(Eqs[1], y(x))$

$$\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{1}{3}}\left(\_c_1+4\_c_1x+\mathrm{O}(x^2)\right)\right]$$

$>FormalSolution(Eqs[2], y(x))$

$$\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{1}{3}}\left(\_c_1-3\_c_1x+\mathrm{O}(x^2)\right)\right]$$

Видно, что коэффициенты при x в рядах, входящих в эти решения, совпадают, только если оба эти решения нулевые.

Рассмотрим другое уравнение, второго порядка:

$$>eq := \mathrm{O}(x^{10})y(x)+\left(1+3x+\mathrm{O}(x^3)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+\left(x^3+\frac{x^5}{3}+\mathrm{O}(x^6)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)=0:$$

С помощью процедуры *FormalSolution* получаем экспоненциально-логарифмические решения, в которых регулярные части вычислены до максимально возможной степени:

$>FormalSolution(eq, y(x))$

$$\left[\_c_1+\mathrm{O}(x^{11})+\mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}}x^{\frac{10}{3}}\left(\_c_2+\mathrm{O}(x)\right)\right] \tag{13}$$

Первые два слагаемых в (13), т.е. $\_c_1 + \mathrm{O}(x^{11})$, означают, что все продолжения уравнения *eq* имеют лорановы решения с валюацией, равной 0, здесь их начальный отрезок до степени 10 равен $\_c_1$, где $\_c_1$ – произвольная постоянная.

Третье слагаемое означает, что все продолжения уравнения *eq* имеют нерегулярные решения с показателем экспоненциальной части $1/(2x^2) + 3/x$, показателем $\lambda = 10/3$, начальным отрезком ряда $\_c_2$, где $\_c_2$ – произвольная постоянная.

Если при вызове процедуры *FormalSolution* указан необязательный параметр '*output*' = '*literal*', то регулярные части решения вычисляются до максимальной степени и сверх этого еще добавляются слагаемые с коэффициентами, зависящими от литералов:

$>FormalSolution(eq, y(x), 'output' = 'literal')$

$$\_c_1 - \frac{U_{[0,10]}\_c_1 x^{11}}{11} + \mathrm{O}(x^{12}) + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}} x^{\frac{10}{3}} \left(\_c_2 + \left(-U_{[1,3]}\_c_2 + U_{[2,6]}\_c_2 - 2\_c_2\right) x + \mathrm{O}(x^2)\right)$$

В нашей реализации литерал, коэффициент при $x^k\theta^i$, обозначается через $U_{[i,k]}$. Существует два таких целочисленных набора значений литералов, что выражения

$$-\frac{U_{[0,10]}\_c_1}{11} \quad \text{и} \quad -U_{[1,3]}\_c_2 + U_{[2,6]}\_c_2 - 2\_c_2$$

принимают различные значения. Этим двум наборам соответствуют два продолжения уравнения *eq*, которые составляют контрпример. Действительно, решения этих двух уравнений будут различными продолжениями решения (13) и продолжены будут все регулярные части решения. Очевидно, контрпримеров существует бесконечное число. В результате работы процедуры *FormalSolution* с необязательным параметром '*counterexample*' = '*Eqs*', переменной *Eqs* будет присвоена пара уравнений, представляющая собой искомый контрпример.

$>FormalSolution(eq, y(x), 'counterexample' = 'Eqs')$:

Для первого уравнения этого контрпримера

$>Eqs[1]$

$$\left(x^{10} + \mathrm{O}(x^{11})\right)y(x) + \left(1 + 3x + 4x^3 + \mathrm{O}(x^4)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + \left(x^3 + \frac{x^5}{3} + \mathrm{O}(x^7)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) = 0$$

с помощью *FormalSolution* получаем усеченное решение

$>FormalSolution(Eqs[1], y(x))$

$$\left[\_c_1 - \frac{\_c_1 x^{11}}{11} + \mathrm{O}(x^{12}) + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}} x^{\frac{10}{3}} \left(\_c_2 - 6\_c_2 x + \mathrm{O}(x^2)\right)\right] \tag{14}$$

Для второго уравнения

$>Eqs[2]$

$$\left(-4x^{10} + \mathrm{O}(x^{11})\right)y(x) + \left(1 + 3x + 5x^3 + \mathrm{O}(x^4)\right)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) +$$
$$+\left(x^3 + \frac{x^5}{3} - 2x^6 + \mathrm{O}(x^7)\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) = 0$$

получаем

$>FormalSolution(Eqs[2], y(x))$

$$\left[\_c_1 + \frac{4\_c_1 x^{11}}{11} + \mathrm{O}(x^{12}) + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{x}} x^{\frac{10}{3}} \left(\_c_2 - 9\_c_2 x + \mathrm{O}(x^2)\right)\right] \tag{15}$$

Видно, что (14) и (15) являются продолжениями (13) и входящие в них усеченные ряды различны.

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S., Khmelnov D., Ryabenko A.* Laurent solutions of linear ordinary differential equations with coefficients in the form of truncated power series // Computer algebra: 3rd International Conference Materials, Moscow, June 17–21, 2019, International Conference Materials. P. 75–82.
2. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.
3. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 4–17.
4. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Усеченные ряды и формальные экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1664–1675.
5. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Усеченные ряды // Труды XII приокской научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики”, Коломна: ГСГУ, 2020. С. 8–19.
6. *Abramov S., Khmelnov D., Ryabenko A.* Truncated and infinite power series in the role of coefficients of linear ordinary differential equations // Lecture Notes in Computer Science. 2020. V. 12291. P. 63–76.
7. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов // Труды ИСП РАН. 2019. Т. 31. № 5. С. 233–248.
8. *Abramov S., Khmelnov D., Ryabenko A.* The TruncatedSeries package for solving linear ordinary differential equations having truncated series coefficients // In: Maple in Mathematics Education and Research, Springer Nature Switzerland. 2021. P. 19–33.
9. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска усеченных решений линейных дифференциальных уравнений с бесконечными и усеченными степенными рядами в роли коэффициентов // Программирование. 2021. № 2. С. 56–65.
10. TruncatedSeries website: http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries
11. *Abramov S., Khmelnov D., Ryabenko A.* On truncated series involved in exponential-logarithmic solutions of truncated LODEs // In: Boulier, F., England, M., Sadykov, T.M., Vorozhtsov, E.V. (eds) Computer Algebra in Scientific Computing, CASC 2022, Lecture Notes in Computer Science. V. 13366. Springer, Cham. P. 18–28.
12. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
13. *Malgrange B.* Sur la réduction formelle des équations différentielles a singularités irrégulières. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1979.
14. *Tournier E.* Solutions formelles d’équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR. Étude théorique et réalisation. Thèse d’Etat, Université de Grenoble, 1987.
15. *Barkatou M.* Rational Newton algorithm for computing formal solutions of linear differential equations // Lecture Notes in Computer Science. 1989. V. 358. P. 183–195.
16. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. Вып. 3(357). С. 31–80.
17. *Баркату М., Ришар-Жюнг Ф.* Формальные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений // Программирование. 1997. № 2. С. 24–42.
18. *Lutz D.A., Schäfke R.* On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations // Linear Algebra And Its Applications. 1985. V. 72. P. 1–46.
19. *Frobenius G.* Integration der linearen Differentialgleichungen mit veränder Koefficienten // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1873. V. 76. P. 214–235.
20. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1894.
21. *Abramov S., Barkatou M.A., Pfluegel E.* Higher-order linear differential systems with truncated coefficients // In Proc. of CASC’2011. 2011. P. 10–24.
22. *Khmelnov D., Ryabenko A., Abramov S.* Automatic confirmation of exhaustive use of information on a given equation // Computer algebra: 4th International Conference Materials, Moscow: MAKS Press, 2021. P. 69–72.
23. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Исчерпывающее использование информации о дифференциальном уравнении с усеченными коэффициентами // Программирование. 2022. № 2. С. 63–72.