

**ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.929

**ON RANKS OF MATRICES OVER NONCOMMUTATIVE DOMAINS<sup>1)</sup>**

© 2023 г. S. A. Abramov<sup>1,\*</sup>, M. Petkovšek<sup>2,\*\*</sup>, A. A. Ryabenko<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Moscow, Vavilova str., 40, Federal Research Center “Computer Science and Control”  
of the Russian Academy of Science, Russia

<sup>2</sup> University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, Jadranska 19, SI-1000, Ljubljana, Slovenia

\*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

\*\*e-mail: Marko.Petkovsek@fmf.uni-lj.si

\*\*\*e-mail: anna.ryabenko@gmail.com

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.  
Переработанный вариант 30.09.2022 г.  
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматриваются матрицы над некоторой областью целостности  $R$ , т.е. над кольцом, не обязательно коммутативным, без делителей нуля. Обсуждаются понятия рангов по строкам и столбцам. (Коэффициенты линейных зависимостей принадлежат  $R$ ; левые коэффициенты используются для строк, правые коэффициенты для столбцов.) Доказывается, что наличие ненулевых левых и правых общих кратных для произвольных ненулевых элементов  $R$  (условие Ore) является необходимым и достаточным условием равенства рангов по строкам и столбцам произвольной матрицы над  $R$ . Предлагается алгоритм вычисления ранга заданной матрицы. Наша реализация этого алгоритма в Maple охватывает области дифференциальных и ( $q$ -)разностных операторов как обычных, так и с частными производными и разностями. Библ. 8.

**Ключевые слова:** некоммутативная область, матрицы над областями, ранги по строкам и столбцам, компьютерная алгебра.

**DOI:** 10.31857/S0044466923050022, **EDN:** DXCTUA

**О рангах матриц над некоммутативными областями.** Ниже под областью всюду понимается кольцо, не обязательно коммутативное, не содержащее нетривиальных делителей нуля; везде далее  $R$  обозначает некоторую область.

**Определение 1.** Пусть  $A$  – матрица над  $R$ . Строки  $u_1, u_2, \dots, u_r$  матрицы  $A$  линейно зависимы над  $R$ , если существуют такие не равные одновременно нулю  $f_1, f_2, \dots, f_r \in R$ , что  $f_1 u_1 + f_2 u_2 + \dots + f_r u_r = 0$ , в противном случае эти строки линейно независимы над  $R$ . Столбцы  $v_1, v_2, \dots, v_s$  матрицы  $A$  линейно зависимы над  $R$ , если существуют такие не равные одновременно нулю  $g_1, g_2, \dots, g_s \in R$ , что  $v_1 g_1 + v_2 g_2 + \dots + v_s g_s = 0$ , в противном случае эти столбцы линейно независимы над  $R$ .

Наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) матрицы  $A$  называется *рангом по строкам* или *левым рангом* (рангом по столбцам или *правым рангом*) матрицы  $A$ .

Определение ранга матрицы над некоторым полем как наибольшего числа ее линейно независимых строк и доказательство того, что это число равно ее наибольшему числу линейно независимых столбцов – это одно из начал классической линейной алгебры. Мы даем пример некоммутативной области, когда эти два ранга не совпадают, и естественно возникает вопрос о характеристике тех областей, над которыми совпадение имеет место. Мы показываем, что интересующие нас области суть те, которые удовлетворяют условиям Ore, т.е. области, в которых для любых ненулевых элементов существуют ненулевые левое и правое общие кратные.

В литературе можно найти различные подходы к определению ранга матрицы над областью. Выбор определения иногда диктуется удобством доказательства некоторой теоремы, что может вести к несовпадению с результатами, полученными при использовании других неэквивалентных определений. И даже для эквивалентных определений доказательство этой эквивалентности

<sup>1)</sup> Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

сти может оказаться довольно сложным. Например, в [1] ранг матрицы над кольцом полиномов Оре (см. [2] или [3]) определен как наибольшее число линейно независимых строк. Авторы статьи [1] отмечают, что их определение отличается от данного в [4], разд. 0.6, где ранг матрицы  $A$  над  $R$  определен как ранг левого модуля  $M$ , порожденного строками  $A$  над  $R$ . Теорема А.2 в [1] устанавливает, что для матриц над кольцом полиномов Оре одной переменной эти два числа совпадают, но доказательство этой теоремы выглядит очень непросто.

В книге Я.Б. Лопатинского [5] подчеркивается важность концепции ранга для исследования интегральных многообразий систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными, и в этой книге дается доказательство равенства левого и правого рангов именно для дифференциальных операторов, при этом ранг понимается так же, как в определении 1.

В [1] дается доказательство равенства рангов для матриц над кольцом (некоммутативных) полиномов Оре, оснащенном автоморфизмом  $\sigma$  и отображением на себя  $\delta$ , являющимся дифференцированием по отношению к  $\sigma$  (см., например, [2] или [3]). Абстракция таких полиномов одной переменной не покрывает, например, дифференциальных операторов с частными производными. Рассмотренные в [1] кольца таких полиномов одной переменной над коммутативными полями коэффициентов являются евклидовыми и соответствуют очень специальному случаю.

В нашем доказательстве мы исходим из более общего предположения – считаем, что область  $R$  удовлетворяет условиям Оре. Эти условия выполняются для полиномов Оре многих переменных (в частности, для дифференциальных операторов с частными производными), что доказано в [6].

Не очевидно, что предложенная в [7] теория левых и правых определителей позволяет получить короткое доказательство левого и правого рангов матрицы  $A$  над  $R$  в смысле определения 1, хотя и позволяет установить, что строки  $A$  линейно зависимы если и только если линейно зависимы ее столбцы.

Представляется, что в доступной литературе отсутствует полное доказательство равенства рангов (в смысле определения 1) по строкам и столбцам для матриц над удовлетворяющей условиям Оре областью  $R$ .

В нашей статье доказано, что рассмотрение вместе с областью  $R$  ее тела (т.е. поля, возможно, некоммутативного) частных, скажем, тела  $F$  “дробей” вида  $p^{-1}q$ ,  $p, q \in R$ ,  $p \neq 0$ , дает совпадение левого и правого рангов над  $F$  с левым и правым рангами над  $R$ . Естественно, что вычисление ранга над полем, пусть и некоммутативным, удобнее, чем над областью. Мы показываем, что если имеется алгоритм вычисления ненулевого левого общего кратного произвольных ненулевых элементов области, то с помощью гауссовых исключений возможно вычисление ранга заданной матрицы. Вычисление над телом  $F$  мы проводим без дробей. В компьютерно-алгебраической среде Maple выполнена реализация этого подхода, она ориентирована на матрицы с элементами, являющимися линейными дифференциальными, разностными и  $q$ -разностными операторами с частными производными, сдвигами или  $q$ -сдвигами. Предлагается команда

OreAlgebraGaussianElimination,

доступная в

<http://www.ccas.ru/ca/orealgebraussianelimination>.

Даются иллюстративные примеры.

Предварительная версия статьи опубликована в докладах конференции ISSAC'22 [8], где вместо условий Оре рассмотрены другие условия: для любого положительного целого  $n$  как строки произвольной матрицы из  $R^{(n+1) \times n}$ , так и столбцы произвольной матрицы из  $R^{(n+1) \times n}$  линейно зависимы над  $R$ . В полной статье этот результат усилен: достаточно рассмотреть единственное значение  $n = 1$ .

Авторы признательны А.Э. Гутерману, А.И. Зобнину, Дж. Лабану, В. Левандовскому, А.А. Михалеву, А.В. Михалеву, Ф. Шизаку за полезные советы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beckermann B., Cheng H., Labahn G. Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials // J. Symbolic Comput. 2006. V. 41. P. 513–543.

2. Ore O. Theory of non-commutative polynomials // Ann. of Math. (2). 1933. V. 34. P. 480–508.
3. Bronstein M., Petkovšek M. An introduction to pseudo-linear algebra // Theoret. Comput. Sci. 1996. V. 157. P. 3–33.
4. Кон П.М. Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
5. Лопатинский Я.Б. Теория общих граничных задач. Киев: Наукова Думка, 1984.
6. Chyzak F., Salvy B. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities // J. Symbolic Comput. 1998. V. 26. P. 187–227.
7. Ore O. Linear equations in non-commutative fields // Ann. of Math. (2). 1931. V. 32. P. 463–477.
8. Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A., On linear dependence of rows and columns in matrices over non-commutative domains // Proceedings of the 2022 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM. 2022. P. 39–43.