Уточненные универсальные знаменатели*

С.А. Абрамов, С.П. Поляков
Вычислительный центр РАН
Москва 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
`sabramov@ccas.ru`, `sp.p@mail.ru`

Аннотация

Предлагается алгоритм уточнения (понижения степени) универсальных знаменателей, используемых, в частности, при построении рациональных решений линейных дифференциальных и разностных систем с полиномиальными коэффициентами. Описывается вариант алгоритма Цейлбергера, использующий построение универсального знаменателя вместо применения алгоритма Госпера.

1 Введение

Для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$b_i(x)y_i'(x) + a_{i1}(x)y_1(x) + \cdots + a_{in}(x)y_n(x) = c_i(x),\ i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_i, c_i суть полиномы над некоторым полем $\mathbf{K}$ характеристики 0, $y_i' = \frac{dy_i}{dx}, i = 1, \ldots, n$, мы расширим понятие *универсального знаменателя* ([1, 2, 3]) следующим образом: универсальным знаменателем по отношению к левой части системы (1) будем называть вектор $(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbf{K}[x])^n$, если в любом векторе $(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbf{K}(x))^n$, подстановка которого в систему обращает ее левые части в полиномы, каждая компонента y_i может быть представлена в виде $\frac{z_i}{u_i}$, $z_i \in \mathbf{K}[x]$.

Аналогично определим универсальный знаменатель по отношению к левой части системы разностных уравнений первого порядка

$$b_i y_i(x+1) + a_{i1}y_1(x) + \cdots + a_{in}y_n(x) = c_i,\ i = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

*Работа частично поддержана грантом РФФИ N 04-01-00757

где $a_{ij}, b_i, c_i \in \mathbf{K}[x]$, $i, j = 1, \dots, n$.

Универсальный знаменатель по отношению к левой части (1) определен неоднозначно: вместе с $(u_1, \dots, u_n)$ указанным свойством обладает любой вектор $(U_1, \dots, U_n) \in (\mathbf{K}[x])^n$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям $u_i | U_i$, $i = 1, \dots, n$. Аналогичное утверждение справедливо и для (2).

После вычисления универсального знаменателя $(u_1, \dots, u_n)$ по отношению к левой части одной из систем (1), (2) задача нахождения рационального решения $(y_1, \dots, y_n)$ системы сводится подстановкой

$$y_i = \frac{z_i}{u_i},\ i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

к задаче нахождения полиномиального решения $(z_1, \dots, z_n)$ полученной системы. Способы вычисления универсальных знаменателей известны как для дифференциального, так и для разностного случая ([1, 2, 3, 4, 5]).

В статье обсуждаются способы понижения степеней компонент универсального знаменателя, что позволяет уменьшить степени коэффициентов в системе, полученной в результате подстановки (3), и, в ряде случаев, вычислительные затраты на ее решение. Кроме того, в дифференциальном случае предлагаемый способ может приводить к нахождению соотношений вида $w_i | z_i'$, где w_i — известный полином. Такие соотношения не приводят к непосредственному понижению степеней компонент универсального знаменателя, но их также можно использовать для уменьшения вычислительных затрат при решении системы, полученной в результате подстановки (3).

Все результаты, полученные для разностного случая, могут быть без труда перенесены на q-разностный случай (о поиске рациональных решений q-разностных систем см. [5, 6]).

Для разностных и q-разностных скалярных уравнений, имеющих произвольный порядок, такого рода подход к уточнению универсального знаменателя предлагался в [7]. Подход, описанный в [8], применим не только к разностным скалярным уравнениям, но и к системам, однако, во-первых, является значительно более сложным, чем предлагаемый в этой статье, и, во-вторых, не допускает непосредственного перенесения на дифференциальный случай.

Предлагаемый в разделе 2.2 метод балансировки может применяться не только при уточнении универсального знаменателя, но и при нахождении любого решения дифференциальной или разностной системы в окрестности точки, являющейся для его компонент изолированным полюсом.

В последнем разделе показывается, что в алгоритме Цейлбергера [9] можно использовать построение универсального знаменателя вместо применения алгоритма Госпера [10]. Это позволяет несколько упростить структуру алгоритма Цейлбергера, сделать его настройку на дифференциальный и q-разностный случаи более легкой, а также исключить трудности в ситуации, когда рекуррентное соотношение, получаемое алгоритмом Цейлбергера, является однородным (см. [11]).

2 Уточнение универсального знаменателя

2.1 Предварительное упрощение системы

Пусть полиномы $g_1, \ldots, g_n$ таковы, что подстановкой

$$y_i = \frac{\widetilde{y}_i}{g_i},\ i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

система (1) приводится к системе с полиномиальными коэффициентами в левой части (т.е. $g_i | a_{ji}$ для $j \neq i$ и найдутся $\widetilde{b}_i$, $\widetilde{a}_{ii} \in \mathbf{K}[x]$, для которых $b_i y_i' + a_{ii} y_i = \widetilde{b}_i (g_i y_i)' + \widetilde{a}_{ii} g_i y_i$). Если какие-то из полиномов $g_1, \ldots, g_n$ отличны от константы, то подстановка (4) удаляет общие множители соответствующих коэффициентов.

Предложение 1 *Среди полиномов, удовлетворяющих условиям подстановки (4), наибольшую степень имеют*

$$g_i^* = \gcd(a_{1i}, \ldots, a_{i-1,i}, a_{ii} - b_i', a_{i+1,i}, \ldots, a_{ni}, b_i), \tag{5}$$

$i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Из $b_i y_i' + a_{ii} y_i = \widetilde{b}_i (g_i y_i)' + \widetilde{a}_{ii} g_i y_i$ следует $b_i = \widetilde{b}_i g_i$, $a_{ii} = \widetilde{b}_i g_i' + \widetilde{a}_{ii} g_i$, $a_{ii} - b_i' = (\widetilde{b}_i' + \widetilde{a}_{ii}) g_i$, откуда $g_i | b_i$, $g_i | (a_{ii} - b_i')$. Нетрудно убедиться, что вместе с $g_i | a_{ji}$, $j \neq i$, два последних соотношения дают достаточное условие того, что подстановка $y_i = \frac{\widetilde{y}_i}{g_i}$ приводит (1) к системе с полиномиальными коэффициентами. ∎

Пример 1. Для системы

$$\begin{cases} x^3 y_1' + 4x^2 y_1 - (x-1) y_2 = 0, \\ x(x-1)^2 y_2' + x^3 y_1 + (x-1)(x-2) y_2 = 0 \end{cases}$$

$g_1^* = x^2$, $g_2^* = x - 1$. Выполнив подстановку (5), получим систему

$$\begin{cases} x\widetilde{y}_1' + 2\widetilde{y}_1 - \widetilde{y}_2 = 0, \\ x(x-1)\widetilde{y}_2' + x\widetilde{y}_1 - 2\widetilde{y}_2 = 0. \end{cases}$$

Универсальный знаменатель по отношению к левой части этой системы (полученный с помощью алгоритма из [4]) равен (x^2, x^2), универсальный знаменатель по отношению к левой части исходной системы — $(x^4(x-1), x^4(x-1))$.

В приведенном примере подстановка (4) существенно упрощает решение системы. Кроме того, такая подстановка может упростить поиск универсального знаменателя. Затраты на вычисление $g_1^*, \ldots, g_n^*$ незначительны по сравнению с затратами на поиск универсального знаменателя.

Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что такие подстановки уже выполнены при построении (1), т.е. что $g_i^* = 1, i = 1, \ldots, n$.

В [2] предложена аналогичная упрощающая подстановка для систем разностных уравнений, для которой

$$g_i^* = \gcd(a_{1i}(x), \ldots, a_{ni}(x), b_i(x-1)),\ i = 1, \ldots, n.$$

2.2 Балансировка априорных верхних оценок границ порядков полюсов компонент решения системы

Пусть система (1) такова, что компоненты $y_1, \ldots, y_n$ некоторого решения этой системы имеют в точке x_0 полюсы порядков, не превосходящих $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ соответственно. Выполнив подстановку

$$y_i = \frac{\widetilde{y}_i}{(x - x_0)^{\alpha_i}},\ i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

получим систему, соответствующее решение $(\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n)$ которой не имеет полюсов в этой точке. Пусть коэффициенты при $\widetilde{y}_i', \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ в i-м уравнении полученной системы имеют в x_0 полюсы порядков $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно.

Предложение 2 *Пусть $\max_{j=0,\ldots,n} \beta_j$ достигается для единственного $j = j_0$, и пусть $\delta = \beta_{j_0} - \max_{j \neq j_0} \beta_j$. Тогда соответствующая компонента решения $\widetilde{y}_{j_0}$ при $j_0 > 0$ либо производная $\widetilde{y}_i'$ при $j_0 = 0$ имеет в x_0 нуль порядка δ.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Умножим обе части i-го уравнения на $(x-x_0)^{\beta_{j_0}-\delta}$. В сумме, стоящей в левой части полученного уравнения, полюс в x_0 имеет единственное слагаемое, поэтому сумма не может совпадать с полиномом в правой части. ∎

Предложение 2.2 позволяет уточнить порядок полюсов компонент решения системы (1), если в системе, полученной из нее подстановкой (6), найдется уравнение, удовлетворяющее условиям предложения, для которого $j_0 > 0$. В этом случае порядок полюса y_{j_0} в точке x_0 не превосходит $\alpha_{j_0} - \delta$, и, выполнив подстановку (6) с новыми $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, мы опять можем с помощью предложения получить уточненную оценку порядка полюса одной из компонент решения. Эти действия имеет смысл повторять до тех пор пока оценки не перестанут меняться. Описанную процедуру будем называть балансировкой априорных верхних оценок границ порядков полюсов в точке x_0.

Пример 2. Предварительное оценивание показывает, что порядки полюсов компонент решений системы

$$\begin{cases} x^3 y_1'(x) + 60 y_3(x) = 0, \\ y_2'(x) - y_1(x) = 0, \\ y_3'(x) - y_2(x) = 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не превосходят пяти. Положив $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$ и выполнив подстановку (6), получим в первом уравнении $\beta_0 = 3$, $\beta_3 = 5$, следовательно, y_3 имеет полюс не выше третьего порядка. Положим $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 3$ и снова выполним подстановку (6). В третьем уравнении полученной системы $\beta_0 = 4$, $\beta_2 = 5$, откуда порядок полюса y_2 не превосходит 4. Подстановка (6) с $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 3$ новых уточнений не дает.

Аналогичную процедуру можно предложить для разностного случая. Пусть система (2) такова, что компоненты $y_1, \ldots, y_n$ некоторого решения этой системы имеют в точках $x_0 + k$ ($k \in M$, M — конечное подмножество $\mathbf{Z}$) полюсы порядков, не превосходящих $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}$ соответственно, и не имеют полюсов в точках $x_0 + \widetilde{k}$, $\widetilde{k} \in \mathbf{Z} \backslash M$. Выполнив подстановку

$$y_i = \frac{\widetilde{y}_i}{\prod_{k \in M} (x - x_0 - k)^{\alpha_{ki}}}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

получим систему, соответствующее решение $(\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n)$ которой не имеет полюсов в точках $x_0 + k$, $k \in \mathbf{Z}$. Пусть коэффициенты при $\widetilde{y}_i', \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ в i-м уравнении полученной системы имеют в x_0 полюсы порядка $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ соответственно.

Предложение 3 *Пусть* $\max_{j=0,\dots,n}\beta_j$ *достигается для единственного* $j=j_0$*, и пусть* $\delta=\beta_{j_0}-\max_{j\neq j_0}\beta_j$*. Тогда соответствующая компонента решения* $\widetilde{y}_{j_0}(x)$ *при* $j_0>0$ *либо* $\widetilde{y}_i(x+1)$ *при* $j_0=0$ *имеет в* x_0 *нуль порядка* δ*.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 2.2. ■

Пример 3. Пусть компоненты решения системы

$$\begin{cases} x(x+3)(2x+3)y_1(x+1)-(x-1)(x+2)(2x-1)y_2(x)=0,\\ y_2(x+1)-y_1(x)=0 \end{cases}$$

имеют полюсы не выше первого порядка в точках -2, -1, 0, 1, $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ и не имеют других полюсов. Выберем $x_0=0$ и выполним подстановку

$$y_i=\frac{\widetilde{y}_i}{(x-1)x(x+1)(x+2)},\ i=1,2.$$

Из первого уравнения получим $x|\widetilde{y}_2(x)$, $(x+2)|\widetilde{y}_1(x+1)$, из второго — $(x-1)|\widetilde{y}_1(x)$, $(x+3)|\widetilde{y}_2(x+1)$. Затем выполним подстановку

$$y_i=\frac{\widetilde{y}_i}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})},\ i=1,2.$$

и получим из второго уравнения $(x+\frac{3}{2})|\widetilde{y}_2(x+1)$, $(x-\frac{1}{2})|\widetilde{y}_1(x)$. Следовательно, y_1 имеет полюсы не выше первого порядка в точках -2, 0 и $-\frac{1}{2}$, y_2 — в точках -1, 1 и $\frac{1}{2}$.

Если рассматривать также правые части системы, то балансировку верхних оценок можно проводить и для нулевых или отрицательных границ полюсов компонент решения системы, что позволяет установить наличие у некоторых компонент нулей.

Пример 4. Предварительное оценивание показывает, что порядки полюсов компонент решений системы

$$\begin{cases} x^4y_1'-x^3y_1+y_2=-x^2,\\ y_2'-2x^2y_1=0,\\ xy_3'-y_1+y_2-y_3=x^2 \end{cases}$$

в точке $x_0=0$ не превосходят единицы. После подстановки (6) первое уравнение системы примет вид

$$x^3\widetilde{y}_1'-2x^2\widetilde{y}_1+\frac{1}{x}\widetilde{y}_2=-x^2.$$

Правая часть и коэффициенты при $\widetilde{y}_1$, $\widetilde{y}_1'$ имеют в x_0 нули второго порядка, следовательно, компонента $\widetilde{y}_2$ должна иметь в x_0 нуль не менее чем третьего порядка.

2.3 Универсальные знаменатели

Предложенной в разделе 2.2 процедурой балансировки можно пользоваться не только для границ порядков полюсов, но и для любых границ кратности неприводимых множителей, входящих в имеющийся универсальный знаменатель.

Пример 5. Универсальный знаменатель по отношению к левой части системы

$$\begin{cases} (x^2+1)^2 y_1' + 3x(x^2+1)y_1 - y_2 = 0, \\ y_2' - y_1 = 0, \end{cases}$$

вычисленный с помощью алгоритма из [4], равен $((x^2+1)^2, (x^2+1)^2)$. Выполним подстановку (3). Первое уравнение полученной системы примет вид

$$z_1' - \frac{x}{x^2+1} z_1 - \frac{1}{(x^2+1)^2} z_2 = 0,$$

откуда $(x^2+1)|z_2$. Подстановка (3) с полученным универсальным знаменателем $((x^2+1)^2, x^2+1)$ новых уточнений не дает.

Пусть после получения уточненных верхних оценок степеней вхождения v в компоненты универсального знаменателя были получены дополнительные соотношения вида $(x-x_0)^\delta | z_i'$. Такие соотношения можно использовать непосредственно в ходе решения системы, записав z_i в виде интерполяционного полинома Эрмита и приравняв коэффициенты при $x - x_0, \ldots, (x-x_0)^\delta$ нулю. Это позволяет уменьшить число неизвестных коэффициентов z_i.

Пример 6. Система

$$\begin{cases} (x+1)y_1' + 2y_1 = c, \\ (x+1)y_2' - 2y_1 = -c \end{cases}$$

после подстановки $z_1 = \frac{y_1}{(x+1)^2}$, $z_2 = \frac{y_2}{(x+1)^2}$ принимает вид

$$\begin{cases} \frac{z_1'}{x+1} = c, \\ \frac{z_2'}{x+1} - \frac{2z_1}{(x+1)^2} - \frac{2z_2}{(x+1)^2} = -c, \end{cases}$$

что позволяет при ее решении пользоваться соотношением $(x+1)|z_1'$. Получив оценку $\deg_x z_1 \leq 2$, можем записать $z_1(x) = h_2(x+1)^2 + h_0$, откуда $h_2 = c/2$.

Если получено несколько дополнительных соотношений $v_j^{\delta_j}|z_i'$, $j = 1, \ldots, k$, и некоторые из неприводимых полиномов v_j имеют степень выше первой, удобнее воспользоваться следующим методом: найдем верхнюю границу d степени z_i, положим $z_i = h_d x^d + \cdots + h_0$ и поделим $dh_d x^{d-1} + \cdots + h_1$ с остатком на

$$w_i = \prod_{j=1}^{k} v_j^{\delta_j}.$$

Остаток r должен быть равен нулю, что также позволяет сократить число неизвестных коэффициентов h_j.

Пример 7. Пусть производная полинома z_i удовлетворяет соотношениям $(x-1)|z_i'$, $(x+1)|z_i'$, $(x^2+1)|z_i'$, $(x^4+1)|z_i'$, и пусть $\deg z_i \leq 12$. Поделив $12h_{12}x^{11} + \ldots + h_1$ на $x^8 - 1$ и приравняв остаток нулю, получим $h_8 = h_7 = h_6 = h_5 = 0$, $h_4 = -3h_{12}$, $h_3 = -\frac{11}{3}c_{11}$, $h_2 = -5h_{10}$, $h_1 = -9h_9$.

Использование уравнения $r = 0$ может существенно сократить время решения системы, если ее правая часть содержит параметры, так как $r = 0$ легко решается и параметров не содержит. Возможно, однако, и увеличение времени решения системы при прибавлении к ней таких уравнений.

В разностном случае все получаемые в процессе балансировки границ кратности неприводимых множителей соотношения могут быть использованы для уточнения универсального знаменателя.

Пример 8. Универсальный знаменатель по отношению к левой части системы

$$\begin{cases} (x+2)(x+5)y_1(x+1) - 4xy_1(x) - (x^2-2x+2)(x^2+1)y_2(x) = 0, \\ (x^2+2x+2)y_2(x+1) - (x^2-2x+2)y_2(x) = 0, \end{cases}$$

найденный с помощью алгоритма из [2], равен $(x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x^2+1)(x^2-2x+2), x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x^2+1)(x^2-2x+2))$. Выполнив подстановку (3), получим из первого уравнения $(x^2+2x+2)|z_1(x+1)$, $(x^2-2x+2)|z_1(x)$, $x|z_2(x)$, из второго — $(x+5)|z_2(x+1)$. Последующие уточнения приводят к универсальному знаменателю $(x(x+1), (x^2+1)(x^2-2x+2))$.

3 Алгоритм Цейлбергера, основанный на поиске универсальных знаменателей

3.1 Разностный случай

Пусть гипергеометрический терм $T(n,k)$ задается своими сертификатами — рациональными функциями

$$\mathcal{C}_n(T) = \frac{E_n T(n,k)}{T(n,k)},\ \ \mathcal{C}_k(T) = \frac{E_k T(n,k)}{T(n,k)},$$

$E_n f(n) = f(n+1)$, $E_k f(k) = f(k+1)$.

Пусть фиксировано целое $d \geq 0$, и мы пытаемся найти для $T(n,k)$ свободный от k оператор $L \in \mathbf{K}[n, E_n]$ порядка d такой, что $LT(n,k) = E_k G(n,k) - G(n,k)$ для какого-то гипергеометрического терма $G(n,k)$. Применение любого оператора из $\mathbf{K}(n,k)[E_n, E_k]$ к $T(n,k)$ дает гипергеометрический терм вида $R(n,k)T(n,k)$ (не исключается, что $R(n,k) = 0$). В частности, применение свободного от k оператора $L = a_d(n)E_n^d + \cdots + a_0(n)$ с неопределенными коэффициентами $a_0(n), \ldots, a_d(n)$ приводит к рациональной функции

$$R(n,k,a_0,\ldots,a_d) = \frac{p(n,k,a_0,\ldots,a_d)}{q(n,k)}, \tag{8}$$

где

$$p(n,k,a_0,\ldots,a_d) = p_0(n,k)a_0 + \cdots + p_d(n,k)a_d, \tag{9}$$

и полиномы $q(n,k), p_0(n,k), \ldots, p_d(n,k) \in \mathbf{K}[n,k]$ вычисляются исходя из $\mathcal{C}_n(T)$ и d. Наша цель — найти $a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{K}(n)$, $a_d \neq 0$, такие, что выполняется равенство

$$LT(n,k) = (E_k - 1)G(n,k), \tag{10}$$

где $G(n,k) = F(n,k)T(n,k)$, $F(n,k) \in \mathbf{K}(n,k)$. Следствием (10) является уравнение для рациональной функции $F(n,k)$:

$$\mathcal{C}_k(T)F(n,k+1) - F(n,k) = \frac{p(n,k,a_0,\ldots,a_d)}{q(n,k)}; \tag{11}$$

полагая

$$\mathcal{C}_k(T) = S(n,k) = \frac{s(n,k)}{t(n,k)},\ \ s(n,k) \perp t(n,k),$$

и вводя новую неизвестную функцию

$$\widetilde{F}(n,k) = \frac{F(n,k)}{t(n,k-1)},$$

получаем

$$q(n,k)s(n,k)\widetilde{F}(n,k+1) - q(n,k)t(n,k-1)\widetilde{F}(n,k) = p(n,k,a_0,\ldots,a_d). \quad (12)$$

Рассматривая $q(n,k)s(n,k)$ и $q(n,k)t(n,k-1)$ как полиномы от k с коэффициентами, принадлежащими $\mathbf{K}[n]$, найдем универсальный знаменатель $u(n,k) \in \mathbf{K}[n,k]$ по отношению к левой части (12). Делая в (12) замену $\widetilde{F}(n,k) = \frac{f(n,k)}{u(n,k)}$ и освобождая левую часть от знаменателей, приходим к равенству

$$g_1(n,k)f(n,k+1) - g_0(n,k)f(n,k) = h(n,k,a_0,\ldots,a_d), \quad (13)$$

где $h(n,k,a_0,\ldots,a_d) = h_0(n,k)a_0 + \cdots + h_d(n,k)a_d$, и $h_0(n,k),\ldots,h_d(n,k)$ суть известные полиномы из $\mathbf{K}[n,k]$. Вопрос о том, при каких $a_0,\ldots,a_d \in \mathbf{K}(n)$, $a_d \neq 0$, уравнение (13) имеет решение $f(n,k) \in \mathbf{K}(n)[k]$, разрешается так же, как в первоначальной версии алгоритма Цейлбергера [9].

Пример 9. Пусть

$$T(n,k) = \frac{(2n+k)(k+2)!(k+5)!}{k!}.$$

При $d = 1$

$$s(n,k)q(n,k) = (k+3)(k+6)(2n+k)(2n+k+1),$$

$$t(n,k-1)q(n,k) = k(2n+k-1)(2n+k).$$

После предварительной подстановки $\widetilde{F}(n,k) = \frac{f_0(n,k)}{(2n+k-1)(2n+k)}$ левая часть уравнения (12) примет вид

$$(k+3)(k+6)f_0(n,k+1) - kf_0(n,k),$$

универсальный знаменатель равен $k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)$. Найдя описанным в разделе 2.3 способом уточненный универсальный знаменатель $u = k(k+1)(k+2)$ и выполнив подстановку $f_0(n,k) = \frac{f(n,k)}{u}$, получим уравнение

$$(k+6)f(n,k+1) - f(n,k) = (k+1)(k+2)((2n+k)a_0 + (2n+k+2)a_1),$$

откуда $f(n,k) = -22k^2 - 6k - 4$, $a_1 = 22n - 47$, $a_0 = -22n + 25$.

Если соответствующие значения $a_0, \ldots, a_d$ удалось найти, и при этом оказалось, что выражение (9) при этих значениях равно 0, то это не является препятствием к получению равенства (10), — просто в этом равенстве мы будем иметь $G(n,k) = 0$ (некоторые реализации первоначальной версии алгоритма в этом случае работают некорректно, подробнее см. [11]).

Описанная процедура представляет собой один шаг алгоритма для заданного d. Если удовлетворяющих (13) $a_0, \ldots, a_d$ найти не удалось, алгоритм переходит к следующему шагу, увеличивая d на единицу.

3.2 Дифференциальный случай

Пусть фиксировано целое $d \geq 0$, и требуется найти для *гиперэкспоненциальной* функции $F(x,y)$ ($F(x,y)$ называется гиперэкспоненциальной, если $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}/F(x,y), \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}/F(x,y) \in \mathbf{K}(x,y)$) свободный от y оператор $L = a_d(x)D_x^d + \cdots + a_0(x)$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, для которого

$$LF(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} G(x,y), \tag{14}$$

где $G(x,y) = S(x,y)F(x,y)$, $S(x,y) \in \mathbf{K}(x,y)$. Аналогом уравнения (11) в дифференциальном случае будет уравнение

$$S'_y(x,y) + \frac{s(x,y)}{t(x,y)} S(x,y) = \frac{p(x,y,a_0,\ldots,a_d)}{q(x,y)}, \tag{15}$$

где $\frac{s(x,y)}{t(x,y)} = \frac{F'_y(x,y)}{F(x,y)}$, $s(x,y) \perp t(x,y)$. Умножив обе части (15) на $q(x,y)$ и произведя замену

$$S(x,y) = \widetilde{S}(x,y)t(x,y),$$

получим уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$q(x,y)t(x,y)\widetilde{S}'_y(x,y) + q(x,y)(s(x,y) + t'_y(x,y))\widetilde{S}(x,y) = p(x,y,a_0,\ldots,a_d). \tag{16}$$

Вычислим универсальный знаменатель $u(x,y)$ по отношению к левой части (16), выполним подстановку $\widetilde{S}(x,y) = \frac{z(x,y)}{u(x,y)}$ и избавимся от знаменателей. Полученное уравнение

$$g_1(x,y)z'_y(x,y) - g_0(x,y)z(x,y) = h(x,y,a_0,\ldots,a_d) \tag{17}$$

решается относительно неизвестных $z \in \mathbf{K}[x,y]$, $a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{K}[x]$ (при этом можно использовать дополнительные соотношения $v_j^{\delta_j} | z'_y(x,y)$, если такие соотношения были получены).

3.3 Использование предыдущих шагов алгоритма

Помимо применения предложенных приемов для уточнения универсального знаменателя, эффективность алгоритма Цейлбергера (как предлагаемой основанной на универсальных знаменателях, так и первоначальной версии) может быть повышена за счет применения на очередном шаге алгоритма промежуточных результатов предыдущих шагов.

Эти результаты могут быть использованы, например, при приведении к несократимому виду $R_d(n,k) = R(n,k,a_0,\ldots,a_d)$ из (8). Лишние множители в $q(n,k)$ могут существенно увеличить время поиска универсального знаменателя по отношению к левой части (12) и решения (13). Исключение их посредством поиска наибольшего общего делителя также требует заметных расходов из-за наличия параметров $a_0,\ldots,a_d$ в числителе.

При $d=1$ можно использовать

$$p(n,k,a_0,a_1) = a_0\hat{q}(n,k) + a_1\hat{p}(n,k),\ q(n,k) = \hat{q}(n,k),$$

где

$$\frac{\hat{p}(n,k)}{\hat{q}(n,k)} = \mathcal{C}_n(T),\ \hat{p}(n,k)\perp\hat{q}(n,k).$$

Пусть для какого-то $d \geq 1$ нам известен знаменатель $q_d(n,k)$. В силу соотношений

$$R_{d+1}(n,k) = R_d(n,k) + a_{d+1}\prod_{i=0}^{d} E_n^i\mathcal{C}_n(T) =$$

$$= \frac{a_0p_0(n,k)+\cdots+a_dp_d(n,k)}{q_d(n,k)} + a_{d+1}\frac{p_d(n,k)}{q_d(n,k)}\frac{\hat{p}(n+d,k)}{\hat{q}(n+d,k)}$$

и $q_d(n,k)|q_{d+1}(n,k)$ имеем $q_{d+1}(n,k) = \widetilde{q}_d q_d(n,k)$, где

$$\widetilde{q}_d = \frac{\hat{q}(n+d,k)}{\gcd(\hat{q}(n+d,k),p_d(n,k))}.$$

Сходным образом приводится к несократимому виду $R_d(x,y)$ в дифференциальном случае.

В разностном случае при вычислении универсального знаменателя можно использовать промежуточные результаты предыдущих шагов (с меньшими значениями d). Для демонстрации этого нам потребуется понятие *дисперсионного множества* полиномов $f(k)$, $g(k)$ (обозначение:

$\mathrm{ds}(f(k), g(k)))$, т.е. множества всех неотрицательных целых h таких, что $f(k+h)$ и $g(k)$ не взаимно просты. Универсальный знаменатель по отношению к левой части уравнения (12) вычисляется с использованием

$$M_d = \mathrm{ds}(q(n,k)t(n,k-1), q(n,k-1)s(n,k-1)). \tag{18}$$

Прямое вычисление M_d можно заменить вычислением $M'_d = \mathrm{ds}(Q(n,k+1)t(n,k), Q(n,k)s(n,k))$, где

$$Q(n,k) = \prod_{i=0}^{d-1} \hat{q}(n+i,k),$$

с последующей проверкой элементов M'_d на принадлежность M_d. При таком подходе достаточно один раз за все время работы алгоритма Цейлбергера найти разложение $s(n,k)$, $t(n,k)$ и $\hat{q}(n,k)$ на неприводимые множители. Вычисленное для d дисперсионное множество может быть использовано на следующем шаге алгоритма (т.е. для $d+1$), так как

$$M'_{d+1} = M'_d \cup \mathrm{ds}(\hat{q}(n+d,k+1), \hat{q}(n,k)s(n,k)) \cup$$

$$\mathrm{ds}(t(n,k)\hat{q}(n,k+1), \hat{q}(n+d,k)).$$

Предложенный способ вычисления дисперсионного множества при $d \geq 2$ может оказаться существенно эффективнее прямого вычисления; при $d = 0$, $d = 1$ разница незначительна.

Пример 10. Для гипергеометрического терма

$$T(n,k) = \frac{\binom{n}{k+1}}{2n-3k}$$

имеем $M'_3 = \{0,1,2\}$. Используя полученные ранее разложения на неприводимые множители полиномов $s(n,k) = (n-k-1)(2n-3k)$, $t(n,k) = (k+2)(2n-3k-3)$, $\hat{q}(n,k) = (n-k)(2n-3k+2)$, нетрудно найти $\mathrm{ds}(\hat{q}(n+3,k+1), \hat{q}(n,k)) = \{1,2\}$, $\mathrm{ds}(\hat{q}(n+3,k+1), s(n,k)) = \{3\}$, $\mathrm{ds}(t(n,k)\hat{q}(n,k+1), \hat{q}(n+3,k)) = \emptyset$, откуда $M'_4 = \{0,1,2,3\}$. После предварительной подстановки $\widetilde{F}(n,k) = \frac{f_0(n,k)}{g^*}$,

$$g^* = \gcd(s(n,k-1)q_4(n,k-1), t(n,k-1)q_4(n,k)) =$$

$$= (n-k)(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3),$$

уравнение (12) примет вид

$$h_1 f_0(n,k+1) - h_0 f_0(n,k) = p(n,k,a_0,\ldots,a_4), \tag{19}$$

$h_1 = (2n-3k)(2n-3k+2)(2n-3k+4)(2n-3k+6)(2n-3k+8)(n-k+3)$, $h_0 = (2n-3k)(2n-3k+2)(2n-3k+4)(2n-3k+6)(2n-3k+8)(k+1)$. Найдем $r_i = \gcd(h_0, E_k^{-i-1} h_1)$ для всех $i \in M_4' \backslash \{0\}$ (общие множители для $i = 0$ были исключены предварительной подстановкой): $r_3 = 1$, $r_2 = 1$, $r_1 = (2n-3k+6)(2n-3k+8)$. Значит, $\mathrm{ds}(h_0, E_k^{-1} h_1) = \{1\}$, и универсальный знаменатель по отношению к левой части (19) равен $(2n-3k+3)(2n-3k+5)(2n-3k+6)(2n-3k+8)$.

В дифференциальном случае вычисление универсального знаменателя облегчается тем, что на любом шаге все входящие в него неприводимые полиномы делят $s(x,y)\hat{q}(x,y)$.

Авторы благодарны Д.Е.Хмельнову за замечания по предварительному варианту статьи.

Литература

[1] Абрамов С.А. Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. ЖВМ и МФ, 1989, том 29, N 11, 1611–1620.

[2] Abramov S.A., Barkatou M.A. Rational solutions of first order linear difference systems. Proc. of ISSAC'98, 1998, 124–131 1998.

[3] Barkatou M.A. On rational solutions of systems of linear differential equations. J. Symbolic Comput., 1999, vol. 28, 547–567.

[4] Abramov S.A. EG-Eliminations. J. Difference Equ. Appl., 1999, vol. 5, 393–433.

[5] Abramov S.A., Bronstein M. On solutions of linear functional systems. Proc. of ISSAC'2001, 2001, 1–6.

[6] Abramov S.A. A direct algorithm to compute rational solutions of first-order linear q-difference systems. Discrete Mathematics, 2002, 246, 3–12.

[7] Хмельнов Д.Е. Улучшенные алгоритмы решения разностных и q-разностных уравнений. Программирование, 2000, N 2, 70–78.

[8] van Hoeij M. Rational solutions of linear difference equations. Proc. of ISSAC'98, 120–123.

[9] Zeilberger D. The method of creative telescoping. J. Symbolic Comput., 1991, vol. 11, 195–204.

[10] Gosper R.W. Decision procedures of indefinite hypergeometric summation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1978, vol. 75, 40–42.

[11] Polyakov S.P. On homogeneous Zeilberger recurrences. (To appear in Adv. Appl. Math..)