ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2016, № 2, с. 75–86

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6

ПРОЦЕДУРЫ ПОИСКА ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ В РОЛИ КОЭФФИЦИЕНТОВ *

© 2016 г. С.А. Абрамов, А.А. Рябенко, Д.Е. Хмельнов
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, anna.ryabenko@gmail.com, dennis_khmelnov@mail.ru
Поступила в редакцию 31.08.2015

Обсуждаются задачи построения лорановых, регулярных и формальных (экспоненциально-логарифмических) решений линейных обыкновенных дифференциальных систем полного ранга. Предполагается, что коэффициентами систем являются формальные степенные ряды, заданные алгоритмически, и что система может иметь произвольный порядок. Ранее было установлено, что первые две из этих задач алгоритмически разрешимы, третья — нет, и был предложен ограниченный вариант третьей задачи, для которого требуемый алгоритм существует. В настоящей статье дается беглый обзор алгоритмов для названных разрешимых задач и предлагается реализация этих алгоритмов в виде Maple-процедур, для которых интерфейс и представление данных выбраны единообразно.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений возникают во многих областях математики. Бесконечные степенные ряды используются для представления как решений, так и самих систем. Вопрос представления бесконечных рядов существен для компьютерной алгебры. В настоящей статье, как и ранее в [1, 2, 3, 4, 5], мы используем алгоритмическое представление: для каждого ряда задается алгоритм, позволяющий находить по целому i коэффициент при x^i. Допускаются любые детерминированные алгоритмы. Разумеется, при таком представлении рядов неизбежно возникновение алгоритмически неразрешимых задач, так как, например, оказывается невозможным проверять алгоритмически равенство ряда нулю (следствие классических результатов А. Тьюринга [6]).

Однако, если заранее предполагать, что заданная система m уравнений с таким же числом неизвестных имеет полный ранг, что, надо заметить, в общем случае не устанавливается алгоритмически, то можно предложить алгоритмы нахождения разных видов решений. Сразу оговоримся, что мы имеем в виду локальные решения, то есть решения системы в некоторой точке, скажем, в точке 0. Эти решения имеют вид рядов по x или содержат такие ряды как компоненты. Все ряды являются формальными, их сходимость не рассматривается. Так, например, ранее были предложены алгоритмы построения всех лорановых и регулярных решений [2, 7]. С формальными экспоненциально-логарифмическими решениями дело обстоит сложнее (в дальнейшем формальные экспоненциально-логарифмические решения мы будем называть просто формальными, это название соответствует установившейся традиции). Такие решения замечательны тем, что нормальная система первого порядка $y' = Ay$, где A — матрица размера $m \times m$ с бесконечными формальными лорановыми

*Частичная поддержка РФФИ, грант 13-01-00182-а.

рядами в качестве элементов и y — вектор из m неизвестных функций, имеет m-мерное пространство формальных решений [8]. Но для произвольной системы любого порядка может случиться, что у нее нет формальных (и вообще никаких) решений, и невозможно проверить алгоритмически, так это или нет.

Задача определения размерности пространства формальных решений остается неразрешимой и если заранее известно, что эта размерность не равна нулю, т.е. что ненулевые формальные решения системы существуют [3, 4]. Вместе с этим было показано, что если известно, что система имеет по крайней мере N линейно независимых формальных решений, то такого рода N решений могут быть построены алгоритмически [5]. Ниже, после некоторых предварительных сведений (раздел 2), дается краткий обзор алгоритмов для названных разрешимых задач (раздел 3) и предлагается соответствующая реализация в виде Maple-пакета (раздел 4).

Предлагаемый пакет, насколько известно авторам, это первая полная реализация построения решений для систем, имеющих коэффициенты в виде не усеченных, а бесконечных рядов. Имеются публикации, в которых предлагались алгоритмы, позволяющие при некоторых ограничениях работать с такими системами. При выполнении некоторых наложенных на систему условий алгоритм из [9] позволяет находить ее регулярные решения. Но при этом дополнительно предполагается, что для любого ряда, изначально заданного или же возникшего в результате вычислений, мы можем определить, равен ли он нулю. Сам вопрос представления бесконечных рядов не рассматривается. Реализация же предлагавшихся алгоритмов основывается на предположении, что коэффициенты системы суть полиномы и рациональные функции, а не бесконечные ряды.

Наши алгоритмы были опубликованы ранее в [2, 7, 5], в этих же статьях сообщалось о предварительных вариантах процедур и первых экспериментах с ними. К настоящему времени процедуры усовершенствованы, интерфейс и представление данных выбраны для них единообразно. Эти процедуры находятся в свободном доступе на веб-станице http://www.ccas.ru/ca/doku.php/eg.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Системы и операторы

Пусть K — алгебраически замкнутое числовое поле. Для кольца полиномов и поля рациональных функций от x над K мы в дальнейшем используем обычные обозначения $K[x]$ и $K(x)$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов — через $K((x))$. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ из $K((x))$ его *валюация* $\mathrm{val}_x\, a(x)$ определена равенством $\mathrm{val}_x\, a(x) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\mathrm{val}_x\, 0 = \infty$. Валюация вектора или матрицы с компонентами-рядами считается равной минимуму валюаций компонент.

Если R — некоторое кольцо (в частности, поле), то $\mathrm{Mat}_m(R)$ обозначает кольцо квадратных матриц порядка m с элементами из R. Через I_m обозначается единичная матрица порядка m. Обозначение M^T используется для матрицы, транспонированной к M, обозначение $M_{i,*}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, — для $(1 \times m)$-матрицы, которая совпадает с i-й строкой $(m \times m)$-матрицы M.

В настоящей статье мы будем иметь дело с локальными задачами, то есть с поиском решений систем в некоторой точке. Не нанося ущерба общности, эта точка может считаться точкой 0. Дифференциальные системы будет удобно записывать с помощью операции $\theta = x\frac{d}{dx}$ вместо обычной операции дифференцирования $\frac{d}{dx}$ (переход от одной формы записи к другой выполняется легко). Мы рассматриваем системы вида

$$A_r(x)\theta^r y + A_{r-1}(x)\theta^{r-1} y + \cdots + A_0(x) y = 0, \quad (1)$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных функций от x. Относительно

$$A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x) \quad (2)$$

предполагается, что $A_i(x) \in \mathrm{Mat}_m(K[[x]])$, $i = 0, 1, \ldots, r$, при этом $A_r(x)$ (*ведущая* матрица системы) является ненулевой.

Элементы матриц $A_i(x)$ будем называть *коэффициентами системы*. В этом качестве будут выступать формальные степенные ряды, заданные алгоритмически: для любого элемента $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ какой-либо матрицы из (2) известен некоторый алгоритм Ξ_a, вычисляющий для $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ значение $\Xi_a(i) = a_i$. Такие ряды мы будем называть *конструктивными* формальными степенными рядами.

Система (1) может быть записана как $L(y) = 0$, где оператор L имеет вид

$$A_r(x)\theta^r + A_{r-1}(x)\theta^{r-1} + \cdots + A_0(x), \qquad (3)$$

число r является *порядком* оператора L (пишем $r = \operatorname{ord} L$). Оператор (3) может быть представлен единой операторной матрицей, принадлежащей $\operatorname{Mat}_m(K[[x]][\theta])$:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

$L_{ij} \in K[[x]]\,[\theta]$, $i,j = 1,\dots,m$, при этом $\max_{i,j} \operatorname{ord} L_{ij} = r$.

Таким образом, система может быть задана в операторной форме с одним из двух представлений операторов. В дальнейшем мы будем выбирать форму представления исходя из соображений удобства.

Будем говорить, что строки с номерами $i_1,\dots,i_s$, $s \leqslant m$, оператора (4) *линейно независимы* над $K[[x]][\theta]$, если из того, что их линейная комбинация с левыми множителями $f_1,\dots,f_s \in K[[x]][\theta]$ равна нулю, т.е. из того, что $f_1 L_{i_1,*} + \cdots + f_s L_{i_s,*} = 0$, следует, что $f_1 = \cdots = f_s = 0$.

Матрица A_r является ведущей матрицей системы $L(y) = 0$ и оператора L независимо от формы представления системы и оператора.

Если все строки оператора (4) линейно независимы над $K[[x]]\,[\theta]$, то мы называем уравнения соответствующей системы независимыми над $K[[x]]\,[\theta]$. В этом случае оператор $L \in \operatorname{Mat}_m(K[[x]]\,[\theta])$ имеет *полный ранг*, как и система $L(y) = 0$. Мы будем также называть их оператором и системой *полного ранга*. Именно такие операторы и системы будут рассматриваться в этой статье.

2.2. *Локальные решения систем*

Решение дифференциальной системы, компоненты которой являются формальными ларановыми рядами, называется *лорановым.*

Регулярное решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda w(x), \qquad (5)$$

где $\lambda \in K$, $w(x) \in K((x))^m[\ln x]$. Каждое такое решение записывается как

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} g_s(x) \frac{\ln^s x}{s!}, \qquad (6)$$

где $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $g_s(x) \in K((x))^m$, $s = 0,1,\dots,k$. Мы в этом случае говорим, что $y(x)$ *допускает множитель* x^λ или что x^λ — *допустимый множитель* решения $y(x)$. Набор

$$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_\rho} \qquad (7)$$

называется *полным* набором допустимых множителей регулярных решений системы S, если

– среди показателей степени элементов набора (7) нет различающихся на целое число,

– каждый элемент x^{λ_i} набора (7) является допустимым множителем для некоторого ненулевого регулярного решения системы S,

– для каждого ненулевого регулярного решения системы S среди (7) найдется допустимый для этого решения множитель.

Все регулярные решения заданной системы, допускающие один и тот же множитель, образуют линейное пространство над K.

Формальное решение может быть представлено в параметрическом виде:

$$x = \tau^q, \;\; y(x) = e^{Q(1/\tau)}\tau^\lambda w(\tau). \qquad (8)$$

Выражение $e^{Q(x^{-1/q})}$, где Q — полином над K, называется *экспоненциальной частью* формального решения, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ — *показателем ветвления* решения. Часть $\tau^\lambda w(\tau)$ называется *регулярной*: $\lambda \in K$, $w(\tau) \in K[[\tau]]^m[\ln \tau]$. Экспоненциальную часть можно записать и через параметризующую переменную τ, как в (8).

В том случае, когда $q = 1$ и $Q \in K$, решение является регулярным (см. выше), в остальных случаях — *нерегулярным.*

2.3. *Системы с полиномиальными коэффициентами, индуцированные рекуррентные системы, EG-алгоритмы*

Частный случай степенного ряда — полином. Обратимся к системам вида (1), имеющим полиномиальные коэффициенты. Пусть разложение лоранова решения системы по степеням x

имеет коэффициенты $z(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $z(n) = (z_1(n), \ldots, z_m(n))^T$. Тогда оказывается, что последовательность $(z(n))$ удовлетворяет *индуцированной рекуррентной* системе

$$B_0(n)z(n)+B_{-1}(n)z(n-1)+\cdots+B_t(n)z(n+t) = 0, \tag{9}$$

где t — неположительное целое, $B_t(n), \ldots, B_0(n) \in \mathrm{Mat}_m(K[n])$. Эта система строится преобразованием

$$x \to E^{-1}, \ \ \theta \to n, \tag{10}$$

применяемым к исходной дифференциальной системе ([10]), здесь E обозначает оператор сдвига: $Ez(n) = z(n+1)$, $E^{-1}z(n) = z(n-1)$.

Можно рассмотреть рекуррентный оператор $R \in \mathrm{Mat}_m(K[n][E^{-1}])$, соответствующий системе (9). Оператор $\bar{R}$ будем называть l-*охватывающим* оператором для оператора R, если его ведущая матрица (т.е. матрица-коэффициент оператора R при его наибольшей степени по E, или, то же самое, — при его наименьшей степени по E^{-1}) невырождена и $\bar{R} = FR$ для некоторого $F \in \mathrm{Mat}_m(K[n])[E]$. Соответственно система $\bar{R}(z) = 0$ называется l-охватывающей системой для системы $R(z) = 0$, если $\bar{R}$ является l-охватывающим оператором для R. Префикс "l" указывает на невырожденность ведущей (leading) матрицы. Возможно, что l-охватывающая система имеет в сравнении с исходной системой вида (9) лишние решения.

Алгоритм EG_σ [11, 12, 13] преобразует систему $R(z) = 0$ в l-охватывающую систему $\bar{R}(z) = 0$. Когда мы рассматриваем решения, имеющие вид последовательностей, иными словами — *секвенциальные* решения системы (9), алгоритм EG_σ позволяет отбросить все лишние решения. Для этого дополнительно строится конечное множество *линейных ограничений.* Система $R(z) = 0$ преобразуется в l-охватывающую систему $\bar{R}(z) = 0$ выполнением последовательности однотипных шагов, на каждом из которых одна из операций является небезопасной в том смысле, что может привести к появлению лишних решений. Так, i-е уравнение системы $(1 \leqslant i \leqslant m)$ может быть заменено линейной комбинацией всех уравнений системы, и эта линейная комбинация имеет полиномиальные коэффициенты $v_1(n), v_2(n), \ldots, v_m(n)$. Если n_0 является целым корнем $v_i(n)$, то для любого решения $y(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} z(n)x^n$, $\nu \leqslant n_0$, исходной системы должно, вследствие (9), удовлетворяться линейное ограничение

$$(B_0(n_0))_{i,*}\, z(n_0) + (B_{-1}(n_0))_{i,*}\, z(n_0-1) + \ldots \\ \cdots + (B_{-n_0+\nu}(n_0))_{i,*}\, z(\nu) = 0. \tag{11}$$

В разделе 3 будет применяться специальный вариант алгоритма EG_σ, позволяющий работать с бесконечными индуцированными рекуррентными системами, которые возникают при рассмотрении дифференциальных систем с коэффициентами-рядами.

Примечание 1. Дифференциальным вариантом алгоритма EG является алгоритм EG_δ, который для дифференциальной системы полного ранга с полиномиальными коэффициентами строит l-охватывающую систему, т.е. систему с невырожденной ведущей матрицей, при этом множество решений построенной системы содержит все решения исходной системы [14, 13, 3].

3. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Обрисуем эскизно основные идеи алгоритмов поиска локальных решений трех названных в п. 2.2 видов. Основное внимание будет уделено преодолению препятствий, возникающих из-за того, что в роли коэффициентов выступают бесконечные ряды.

3.1. Лорановы решения: нижние границы валюаций и последовательности коэффициентов

Для исходной дифференциальной системы $L(y) = 0$ индуцированной рекуррентной системой является система $R(z) = 0$ с $R = \mathcal{M}L$, где преобразование $\mathcal{M}$ определяется с помощью (10). Имеем

$$R = B_0(n) + B_{-1}(n)E^{-1} + B_{-2}(n)E^{-2} + \ldots,$$

индуцированная система запишется в виде

$$B_0(n)z(n) + B_{-1}(n)z(n-1) + \cdots = 0, \tag{12}$$

где

- $z(n) = (z_1(n), \dots, z_m(n))^T$ — вектор-столбец неизвестных последовательностей таких, что $z_i(n) = 0$ для всех отрицательных n с достаточно большим значением $|n|$, $i = 1, \dots, m$;
- $B_0(n), B_{-1}(n), \dots \in \mathrm{Mat}_m(K[n])$;
- $B_0(n)$ — ненулевая ведущая матрица оператора R и системы (12).

В [2] показано, что индуцированная система $R(z) = 0$ имеет полный ранг, т.е. уравнения системы $R(z) = 0$ независимы над $K[n][[E^{-1}]]$, если и только если исходная дифференциальная система $L(y) = 0$ имеет полный ранг. При этом система $L(y) = 0$ обладает лорановым решением $y(x) = u(v)x^v + u(v+1)x^{v+1} + \dots$, если и только если двусторонняя последовательность

$$\dots, 0, 0, u(v), u(v+1), \dots \tag{13}$$

вектор-столбцов коэффициентов $y(x)$ удовлетворяет индуцированной рекуррентной системе:

$$\begin{aligned}
&B_0(v)u(v) = 0,\\
&B_0(v+1)u(v+1) + B_{-1}(v+1)u(v) = 0,\\
&B_0(v+2)u(v+2) + B_{-1}(v+2)u(v+1) +\\
&\qquad\qquad + B_{-2}(v+2)u(v) = 0,\\
&\dots
\end{aligned}$$

Если матрица $B_0(n)$ невырождена, то $\det B_0(n) = 0$ может рассматриваться как определяющее уравнение исходной дифференциальной системы: множество целых корней этого алгебраического уравнения включает множество всех возможных валюаций лорановых решений системы $L(y) = 0$. Это позволяет найти нижнюю границу валюаций всех лорановых решений системы.

Однако во многих случаях матрица $B_0(n)$ оказывается вырожденной даже когда ведущая матрица $A_r(x)$ системы $L(y) = 0$ невырождена. Следующая теорема показывает, что эта ситуация не является тупиковой.

Теорема 1. *[2] Пусть $R = \mathcal{M}L$, где L оператор полного ранга, принадлежащий $\mathrm{Mat}_m(K[[x]])[\theta]$. Пусть все коэффициенты оператора L суть конструктивные степенные ряды. Тогда существует и алгоритмически может быть построен такой оператор $F \in \mathrm{Mat}_m(K[n])[E]$, что ведущая матрица $\bar{B}_0(n)$ оператора $\bar{R} = FR$ невырождена. Дополнительно может быть построено конечное множество линейных ограничений (см. п. 2.3), которое позволяет избавиться от лишних решений, возникающих при переходе от системы $R(z) = 0$ к $\bar{R}(z) = 0$.*

Оператор F, существование которого утверждается в теореме 1, имеет, как и оператор R, полиномиальные коэффициенты. При этом F имеет конечный порядок.

Основанный на этой теореме специальный вариант алгоритма EG_σ, который мы назовем $\mathrm{EG}_\sigma^\infty$, позволяет построить любое заданное число первых слагаемых суммы (оператора)

$$\bar{B}_0(n) + \bar{B}_{-1}(n)E^{-1} + \bar{B}_{-2}(n)E^{-2} + \dots \tag{14}$$

В этом смысле, мы можем построить эту сумму.

Имеющая невырожденную ведущую матрицу система $\bar{R}(z) = 0$ и упомянутое в теореме множество линейных ограничений позволяют найти все лорановы решения исходной дифференциальной системы $L(y) = 0$ полного ранга. Здесь существенно, что множество линейных ограничений конечно, и каждое из этих ограничений содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых (благодаря тому, что нас интересуют только решения $z(n)$, для которых $z_i(n) = 0$ при всех отрицательных n, меньших нижней границы валюаций лорановых решений исходной дифференциальной системы).

Введем понятие, которое понадобится нам в дальнейшем. Пусть $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ — формальный степенной ряд и p — неотрицательное целое. Тогда полином $a^{\langle p\rangle}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$ называется *p-усечением* ряда $a(x)$ (или *усечением до степени p*). При этом число p будем называть *степенью усечения.*

Пусть S — линейная дифференциальная система произвольного порядка, имеющая коэффициенты в виде формальных степенных рядов, тогда p-усечение $S^{\langle p\rangle}$ системы S — это система с коэффициентами, представляющими собой p-усечения соответствующих коэффициентов системы S. В этом же смысле можно рассматривать p-усечения операторов.

Примечание 2. Если система S вида (1) имеет полный ранг, то наименьшее целое μ такое, что

$S^{\langle p\rangle}$ имеет полный ранг при любом $p \geqslant \mu$, называется *шириной* S. Можно привести пример системы S полного ранга и неотрицательного целого p таких, что $S^{\langle p\rangle}$ имеет полный ранг, но $S^{\langle p+1\rangle}$ имеет меньший ранг. Однако в [2] доказано, что ширина определена для любой системы полного ранга. При наших предположениях относительно системы ее ширина может быть найдена алгоритмически.

Обозначим через V_S пространство лорановых решений системы S и через $V_S^{\langle p\rangle}$, $p \in \mathbb{Z}$, пространство, элементы которого суть p-усечения соответствующих элементов пространства V_S. Мы рассматриваем алгоритмический поиск лорановых решений дифференциальных систем с рядами в роли коэффициентов как решение задачи, которую мы называем задачей $\mathbf{P}_L$. Предполагается, что заданы система S вида (1) полного ранга и $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

$\mathbf{P}_L$: Определить такое $p_0 \in \mathbb{Z}$, что $\dim V_S = \dim V_S^{\langle p\rangle}$ при всех $p \geqslant p_0$, и найти базис пространства $V_S^{\langle d\rangle}$, где $d = \max\{d_0, p_0\}$.

Алгоритм решения задачи $\mathbf{P}_L$ основывается на рассмотрении индуцированной рекуррентной системы, и приведении ее к “удобному виду” с помощью алгоритма $\mathrm{EG}_\sigma^\infty$, обсуждавшимся выше. Система (12) бесконечна, и алгоритм не может работать сразу со всеми матрицами B_{-i}, $i = 0, 1, \ldots$ Здесь выручают ленивые вычисления с хранением информации об уже выполненных редукциях и сдвигах. При необходимости это позволяет вовлекать в вычислительный процесс матрицы B_{-i} со все большими значениями i, не проделывая заново всю выполненную к этому моменту работу над матрицами с меньшими i.

Подробное описание алгоритма построения лорановых решений дано в [2].

3.2. *Регулярные решения: обобщенный подход Хеффтера*

Для дифференциальной системы $L(y) = 0$ и любого целого $i \geqslant 0$ результат применения L к $g(x)\ln^i(x)/i!$ выглядит как

$$G_{ii}(g)\frac{\ln^i x}{i!} + \cdots + G_{i1}(g)\frac{\ln x}{1!} + G_{i0}(g),$$

где $G_{i0}, G_{i1}, \ldots, G_{ii} \in \mathrm{Mat}_m(K[[x]])[\theta]$ и $G_{00} = L$, $G_{i+j,j} = G_{i0}$ для всех $i, j \geqslant 0$ ([16], [17, разд. 3.2.1]). Примем обозначение $L_i = G_{i0}$. При этом $L_i = G_{i+j,j}$ для всех $j \geqslant 0$.

Общая схема поиска регулярных решений рассматриваемых систем аналогична предложенной в [15] схеме для имеющей произвольный порядок линейной дифференциальной системы полного ранга с полиномиальными коэффициентами (см. также [13, разд. 7.4]). Сама эта схема является обобщением алгоритма Хеффтера [16] и основана на рассмотрении последовательности систем

$$S_0, S_1, \ldots, \tag{15}$$

где S_k — это система

$$L_0(g_i) = -\sum_{j=1}^{i} L_j(g_{i-j}), \quad i = 0, 1, \ldots, k \tag{16}$$

(при $i = 0$ в (16) имеем $L_0(g_0) = 0$). Доказанное Хеффтером для скалярного случая утверждение обобщается на случай систем:

Теорема 2. *([7, 15, 18]) Множество целых неотрицательных k, для которых система S_k имеет лораново решение*

$$\left(g_0(x)^T, g_1(x)^T, \ldots, g_k(x)^T\right)^T, \quad g_0(x) \neq 0,$$

конечно, и если оно пусто, то $L(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в $K((x))^m[\ln x]$. Если это множество не пусто и $\tilde{k}$ — его максимальный элемент, то любое принадлежащее $K((x))^m[\ln x]$ решение системы $L(y) = 0$ может быть записано в виде:

$$\sum_{s=0}^{\tilde{k}} g_{\tilde{k}-s}(x)\frac{\ln^s x}{s!}, \tag{17}$$

где

$$\left(g_0(x)^T, g_1(x)^T, \ldots, g_{\tilde{k}}(x)^T\right)^T, \quad g_0(x) \neq 0, \tag{18}$$

является лорановым решением системы $S_{\tilde{k}}$. В то же время любое лораново решение вида (18) системы $S_{\tilde{k}}$ порождает решение (17) системы $L(y) = 0$.

Схема построения регулярных решений:

1. Для данной дифференциальной системы S рассмотреть индуцированную рекуррентную систему и с помощью обсуждавшегося в п. 3.1 алгоритма $\mathrm{EG}_\sigma^\infty$ перейти к рекуррентной системе с невырожденной ведущей матрицей $\bar{B}_0(n)$. Вычислить все корни уравнения $\det \bar{B}_0(n) = 0$. Считая два корня λ, λ' эквивалентными при $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$, построить множество Λ, содержащее по одному представителю каждого класса эквивалентности.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ найти регулярные решения, допускающие множитель x^λ. Для этого рассмотреть систему $S(\lambda)$ — результат подстановки (5) в S и последующего умножения на $x^{-\lambda}$. Используя соответствующие системе $S(\lambda)$ операторы $L_0, L_1, \ldots$, найти лорановы решения систем, входящих в (15) (до первой системы, не имеющей лорановых решений). Это дает регулярные решения $y(x)$ в виде (17) для системы $S(\lambda)$.

Построение регулярных решений сводится этой схемой к построению лорановых решений неоднородных дифференциальных систем с лорановыми правыми частями. Это построение не сильно отличается от описанного в п. 3.1. Рекуррентная система для такой неоднородной дифференциальной системы тоже будет неоднородной, ее правой частью служит последовательность коэффициентов правой части дифференциальной системы: каждая компонента этой векторной последовательности является алгоритмически заданной последовательностью элементов поля K. Алгоритм $\mathrm{EG}_\sigma^\infty$ может быть модифицирован на случай таких неоднородных рекуррентных систем. В результате применения этого алгоритма получается неоднородная рекуррентная система с левой частью, заданной оператором (14), и с правой частью, имеющей вид последовательности вектор-столбцов. Возникающие линейные ограничения будут неоднородными, их число конечно. Множество, содержащее все целые корни алгебраического уравнения $\det \bar{B}_0(n) = 0$ и валюацию правой части полученной рекуррентной системы (при условии, что $u(v) \neq 0$, мы называем валюацией последовательности вида (13) число v; если все элементы последовательности равны нулю, то валюация равна ∞), включает в себя валюации всех возможных лорановых решений исходной дифференциальной системы. Это позволяет решить задачу $\mathbf{P}_L$, модифицированную для неоднородного случая.

Уточним представление регулярных решений, которые выдает алгоритм как результат своей работы. Обозначим через $W_S(\lambda)$ пространство регулярных решений системы S, допускающих множитель x^λ, и через $W_S^{\langle p \rangle}(\lambda)$ — пространство, получающееся из $W_S(\lambda)$ заменой каждого элемента вида (6) на

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{k} g_s^{\langle p \rangle}(x) \frac{\ln^s x}{s!}.$$

Ввиду конечномерности пространства $W_S(\lambda)$ очевидно, что валюации рядов $g_s(x)$ и $g_s^{\langle p \rangle}(x)$ ограничены снизу. При этом для всех достаточно больших p выполнено $\dim W_S(\lambda) = \dim W_S^{\langle p \rangle}(\lambda)$. Мы рассматриваем алгоритмический поиск регулярных решений систем дифференциальных уравнений с рядами в роли коэффициентов как решение задачи, которую мы называем задачей $\mathbf{P}_R$. Предполагается, что заданы система S вида (1) полного ранга и $d_0 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

$\mathbf{P}_R$: Найти полный набор допустимых множителей ненулевых решений системы S. Определить такое $p_0 \in \mathbb{Z}$, что для каждого x^λ из этого набора $W_S(\lambda) = \dim W_S^{\langle p \rangle}(\lambda)$ при всех $p \geqslant p_0$, и найти базис пространства $W_S^{\langle d \rangle}(\lambda)$, где $d = \max\{d_0, p_0\}$.

Индуцированные системы и их решения, возникающие при работе по описанной выше схеме бесконечны. Алгоритм, как и в случае лорановых решений, использует ленивые вычисления. При поиске решений очередной системы из последовательности (15) ранее найденные решения предыдущих систем при необходимости удлиняются, чтобы обеспечить адекватное усечение правой части очередной системы последовательности. Построение системы $S(\lambda)$ фактически не требуется, поскольку ее индуцированная рекуррентная система может быть получена из индуцированной рекуррентной системы для S с помощью замены n на $n + \lambda$.

Подробное описание алгоритма построения регулярных решений дано в [7].

Примечание 3. Согласно традиционному определению, регулярное решение — это имеющая числовые коэффициенты линейная комбинация решений вида (5), при этом в такую комбинацию с ненулевыми коэффициентами могут входить слагаемые со значениями λ, различающимися на нецелое число. Наш алгоритм строит базис для каждого из подпространств, состоящих из решений вида (5), для которых значения λ различаются на целое число. Объединение всех таких базисов дает базис пространства W_S регулярных решений, понимаемых в традиционном смысле.

3.3. Формальные решения: разрешимый вариант задачи поиска

Мы уже упоминали в разделе 1, что задача вычисления размерности пространства всех формальных решений системы полного ранга алгоритмически неразрешима. Алгоритмически неразрешимыми являются также задача проверки существования нерегулярных решений и задача построения базиса всех формальных решений [3, 4].

Можно предложить разрешимый вариант задачи поиска формальных решений: если заранее известно, что система имеет по крайней мере N линейно независимых формальных решений, то такие N решений могут быть построены алгоритмически [5]. Далее мы рассматриваем именно этот вариант задачи.

Доказана теорема

Теорема 3. *[5] Пусть система S имеет некоторое нерегулярное решение $\bar{y}(x)$. Тогда для всех достаточно больших неотрицательных целых p система $S^{\langle p\rangle}$ имеет нерегулярное решение с такой же экспоненциальной частью, что и $\bar{y}(x)$.*

Применяя к некоторому p-усечению исходной системы S один из алгоритмов, предложенных в [19, 5, 20] (а также при необходимости алгоритм EG_δ — см. примечание 1; если выполняется переход от системы с полиномиальными коэффициентами к скалярному уравнению, то для поиска экспоненциальных частей могут быть полезными алгоритмы из [21, 22]), мы получаем некоторое множество кандидатов на роль экспоненциальной части решения S. Для каждого такого кандидата $e^{Q(x^{-1/q})}$ в системе S выполняем подстановку

$$x = \tau^q, \;\; y(x) = e^{Q(1/\tau)}\zeta(\tau),$$

где τ — новая независимая переменная, $\zeta(\tau)$ — вектор новых неизвестных функций. Умножая результат на $e^{-Q(1/\tau)}$, получаем систему с коэффициентами, являющимися лорановыми рядами, нижняя граница валюации которых известна. Домножив эту систему на τ в нужной целой степени, получим систему $S_{q,Q}$ с конструктивными степенными рядами в роли коэффициентов. К системе $S_{q,Q}$ применяем алгоритм построения пространства $\mathrm{W}_{S_{q,Q}}$ всех регулярных решений. Тогда для системы S размерность ее пространства формальных решений с экспоненциальной частью $e^{Q(x^{-1/q})}$ будет равна $q \dim W_{S_{q,Q}}$.

Итак, зная заранее, что размерность пространства всех формальных решений исходной системы не меньше, чем N, можно построить некоторое подпространство формальных решений размерности не меньше N по p-усечениям $S^{\langle p\rangle}$, увеличивая p от некоторого $p_0 \geqslant 0$ до тех пор, пока не будет построено подпространство решений нужной размерности. В качестве p_0 можно взять, например, ширину системы (см. примечание 2). Можно взять и 0, но тогда при каждом исследуемом значении $p \geqslant 0$ надо проверять полноту ранга усеченной системы.

Мы рассматриваем поиск формальных решений систем дифференциальных уравнений с рядами в роли коэффициентов как решение задачи, которую называем задачей $\mathbf{P}_F$. Предполагается, что заданы система S вида (1) полного ранга и $d_0, N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

$\mathbf{P}_F$: Найти набор $e^{Q_i(x^{-1/q_i})}$, $i = 1,\dots,k$, экспоненциальных частей формальных решений системы S, при котором для $S_i = S_{q_i,Q_i}$, $i = 1,\dots,k$, выполнено $\dim W_S + q_1 \dim W_{S_1} + \dots + q_k \dim W_{S_k} \geqslant N$. Для каждой из систем $S, S_1, \dots, S_k$ и числа d_0 указать решение задачи $\mathbf{P}_R$.

Если N больше, чем размерность пространства формальных решений S, то алгоритм построения формальных решений не завершит работу. Подробное описание алгоритма дано в [5].

3.4. О представлении рядов в решениях

Все входящие в решения лорановы ряды строятся в усеченном виде с количеством членов не меньшим, чем запрошено при запуске алгоритма (иногда и с большим, если это требуется для обеспечения нужной размерности пространства решений). Это представление схоже с представлением рядов в самих дифференциальных системах, когда ряд задается алгоритмом определения коэффициента по его индексу. Имеющееся небольшое различие связано с тем, что наши алгоритмы вычисляют все коэффициенты последовательно, и при вычислении коэффициента с индексом i будут вычислены и все ненулевые коэффициенты ряда с индексами меньшими i (иногда, как уже говорилось, даже и с некоторыми большими индексами), поэтому выбрано представление, включающее все вычисленные коэффициенты рядов, входящих в решения.

4. ПРОЦЕДУРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Алгоритмы построения рассматриваемых локальных решений реализованы в системе компьютерной алгебры `Maple` ([23]) в виде процедур пакета `EG`[1] [13, 7].

4.1. Представление систем

Для дифференциальной системы $L(y) = 0$ с бесконечными рядами в роли коэффициентов используется представление (1), в котором:

- матричные коэффициенты $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x)$ заданы с помощью стандартных объектов `Matrix` системы `Maple`.
- элементы матричного коэффициента в общем случае представлены в виде суммы полинома (начального отрезка ряда) и задаваемой с помощью стандартного объекта `Sum` системы `Maple` бесконечной степенной суммы с некоторым начальным значением $k_0 \geqslant 0$ индекса суммирования. Коэффициенты при x^k в такой сумме могут быть заданы произвольной функцией индекса k. Как полиномиальная часть, так и часть в виде `Sum` могут отсутствовать.
- множитель $\theta^l y(x)$ задан как `theta(y(x), x, l)`.
- произведение матричного коэффициента и вектор-функции задано с помощью знака “.”, т.е. знака стандартной операции матричного умножения в системе `Maple`.

[1] Пакет и сессия `Maple` с примерами использования описываемых процедур доступны по адресу http://www.ccas.ru/ca/doku.php/eg

Пример 1. Пусть $m = 3$ и система задана в виде (1):

$$\begin{pmatrix} x+\sum\limits_{k=3}^{\infty} x^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k \end{pmatrix} \theta^2 y(x) +$$

$$+\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \theta y(x) +$$

$$+\begin{pmatrix} -1-x+x^2-\sum\limits_{k=3}^{\infty} x^k & -x^2 & -1-x \\ -x^2 & -\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k & -1-x^3 \\ -x^3 & x & -1-\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k \end{pmatrix} y(x) = 0$$

В `Maple` эта система в выбранной форме представления может быть записана так, как на рис. 1. Это представление очень близко к исходной математической записи.

В наших ранних реализациях [2, 7] мы использовали представление дифференциальной системы $L(y) = 0$ операторной матрицей (4). Операторы L_{ij} рассматривались как степенные ряды по x с коэффициентами в $K[\theta]$; напомним, что порядок каждого такого коэффициента не превосходит порядка системы $L(y) = 0$. При фиксированных индексах i, j оператор L_{ij} задается функцией целого аргумента, например, k, которая вычисляет коэффициент (как полином от θ) при x^k в этом операторе. Эти функции для всех пар индексов i, j могут быть определены процедурами. В простых случаях используются функции `if` или `piecewise`. Это представление компактно — требуется задать $m \times m$ функций вне зависимости от порядка системы. Но у такого представления есть и недостатки — оно не достаточно наглядно и не виден порядок системы. Для поиска лорановых и регулярных решений такой порядок не требуется, однако он явно используется алгоритмом поиска формальных решений.

```
> sys:=Matrix([[x+Sum(x^k,k=3..infinity),0,0],
              [0,Sum(x^k,k=1..infinity),0],
              [0,0,Sum(x^k,k=1..infinity)]]).theta(y(x),x,2)+,
       Matrix([[x^2,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]).theta(y(x),x,1)+
       Matrix([[-1-x+x^2-Sum(x^k,k=3..infinity),-x^2,-1-x],
              [-x^2,-Sum(x^k,k=1..infinity),-1-x^3],
              [-x^3,x,-Sum(x^k,k=0..infinity)]]).y(x);
```

$$sys = \begin{bmatrix} x+\sum_{k=3}^{\infty} x^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} x^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{\infty} x^k \end{bmatrix} \theta(y(x), x, 2) + \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta(y(x), x, 1) + \begin{bmatrix} -1-x+x^2-\sum_{k=3}^{\infty} x^k & -x^2 & -1-x \\ -x^2 & -\sum_{k=1}^{\infty} x^k & -1-x^3 \\ -x^3 & x & -\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) \end{bmatrix} y(x)$$

Рис. 1.

Поэтому для унификации способа задания системы по всем трем рассматриваемым алгоритмам и для большей наглядности представления системы мы перешли к представлению, описанному выше.

4.2. *Лорановы решения*

Алгоритм поиска лорановых решений реализован в виде процедуры `EG[LaurentSolution]`. Помимо системы, заданной как описано в п. 4.1, процедура имеет три дополнительных аргумента:

θ — имя оператора $x\frac{d}{dx}$,

var — искомая вектор-функция $y(x)$,

d_0 — минимально необходимая степень усечения рядов в решении.

В результате применения процедуры получаем решение задачи $\mathbf{P}_L$ в соответствии с ее формулировкой из п. 3.1.

Пример 2. Применим процедуру к системе из примера 1, см. рис. 2. Видно, что в данном случае усечение имеет степень более высокую, чем запрашивалось (1, а не 0), так как иначе не был бы определен базис решений в соответствии с задачей $\mathbf{P}_L$.

4.3. *Регулярные решения*

Алгоритм поиска регулярных решений реализован в виде процедуры `EG[RegularSolution]`. Помимо системы, заданной как описано в п. 4.1, процедура имеет три дополнительных аргумента, таких же, как `EG[LaurentSolution]`.

В результате применения процедуры получаем решение задачи $\mathbf{P}_R$ в соответствии с ее формулировкой из п. 3.2.

Пример 3. Применим процедуру к системе из примера 1, см. рис. 3.

Как и в примере 2, усечение имеет степень более высокую, чем запрашивалось (1, а не 0), так как иначе не был бы определен базис решений в соответствии с задачей $\mathbf{P}_R$. Найденные в примере 2 лорановы решения содержатся в найденных регулярных решениях при $\_c_1 = 0$.

4.4. *Формальные решения*

Алгоритм поиска формальных решений реализован в виде процедуры `EG[FormalSolution]`. Первые три аргумента процедуры — такие же, как у процедур `EG[LaurentSolution]`, `EG[RegularSolution]`, четвертый аргумент:

τ — имя переменной, параметризующей формальные решения (8).

```
> EG:-LaurentSolution(sys,theta,y(x),0);
```

$$\left[x\_c_1 + O(x^2),\ -x\_c_1 + O(x^2),\ -x\_c_1 + O(x^2)\right]$$

Рис. 2.

```
> EG:-RegularSolution(sys,theta,y(x),0);
```

$$\left[\ln(x)\,(x\_c_1 + O(x^2)) + x\_c_2 + O(x^2),\ \ln(x)\,(-x\_c_1 + O(x^2)) + \_c_1 + x(-\_c_2 + 2\_c_1) + O(x^2),\ \ln(x)\,(-x\_c_1 + O(x^2)) - x\_c_2 + O(x^2)\right]$$

Рис. 3.

```
> Res:=EG:-FormalSolution(sys,theta,y(x),t,'solution_dimension'=6): Res[1]; Res[2]; Res[3];
```

$$\left[x = t, \left[\ln(t)\,(t\_c_1 + O(t^2)) + t\_c_2 + O(t^2),\ \ln(t)\,(-t\_c_1 + O(t^2)) + \_c_1 + t(-\_c_2 + 2\_c_1) + O(t^2),\ \ln(t)\,(-t\_c_1 + O(t^2)) - t\_c_2 + O(t^2)\right]\right]$$

$$\left[x = t, e^{\frac{1}{t}}\left[\ln(t) O(t^3) - t\_c_3 + O(t^3),\ \ln(t)\,(t^2\_c_3 + O(t^3)) + t^2\_c_4 - t\_c_3 + O(t^3),\ \ln(t) O(t^3) - t^2\_c_3 - t\_c_3 + O(t^3)\right]\right]$$

$$\left[x = t^2, e^{-\frac{2}{t}}\left[\sqrt{t}\,(\_c_5 + O(t)),\ \sqrt{t}\,O(t),\ \sqrt{t}\,O(t)\right]\right]$$

Рис. 4.

Предусмотрены еще два необязательных аргумента. Порядок необязательных аргументов произвольный, способ задания — равенство с ключевым словом: `'truncate_solution'` $= d_0$ — минимально необходимая степень усечения рядов в решении (по умолчанию $d_0 = 0$); `'solution_dimention'` $= N$ — нижняя граница размерности пространства формальных решений (по умолчанию $N = 1$).

В результате применения процедуры получаем решение задачи $\mathbf{P}_F$ в соответствии с ее формулировкой из п. 3.3.

Пример 4. Применим процедуру к системе из примера 1, см. рис. 4.

Это даст список из трех элементов. Первый элемент списка `Res[1]` представляет пространство регулярных решений системы, совпадающее с найденным в примере 3. Размерность этого пространства равна двум — количеству произвольных постоянных $\_c_1$, $\_c_2$. Второй элемент — пространство формальных решений с экспоненциальной частью $e^{1/x}$, его размерность также равна двум. Третий элемент — два пространства формальных решений с экспоненциальными частями $e^{-2/\sqrt{x}}$ и $e^{2/\sqrt{x}}$, каждое из которых имеет размерность один. Общая размерность найденного пространства формальных решений равна шести, как и было запрошено с помощью аргумента `'solution_dimention'`.

В разделе 3 было показано, как при построении формальных решений используется поиск регулярных решений, а при построении регулярных решений — поиск лорановых решений. При этом процедура построения всех формальных решений строит и все регулярные, в частности — лорановы решения. В принципе, одной процедуры `EG[FormalSolution]` достаточно, чтобы получать решения всех трех типов. Но если надо построить, скажем, только лорановы решения, то процедура `EG[LaurentSolution]` сделает это значительно быстрее, если даже исходная система не имеет никаких формальных решений, кроме лорановых. Поэтому предлагаются три процедуры поиска решений разных типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Pfluegel E.* Higher-order linear differential systems with truncated coefficients // In Proc. of CASC'2011. 2011. P. 10–24.

2. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Khmelnov D.E.* On full rank differential systems with power series coefficients // J. of Symbolic Computation. 2015. V. 68. P. 120–137.

3. *Abramov S.A., Barkatou M.A.* On the dimension of solution spaces of full rank linear differential systems // In Proc. of CASC'2013. 2013. P. 1–9.

4. *Abramov S.A., Barkatou M.A.* Computable Infinite Power Series in the Role of Coefficients of Linear Differential Systems // Proc. of CASC'2014. 2014. P. 1–12.

5. *Рябенко А.А.* Экспоненциально-логарифмические решения линейных дифференциальных систем с коэффициентами в виде степенных рядов // Программирование. 2015. № 2. С. 54–62.

6. *Turing A.* On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem // Proceedings of the London Mathematical Society. 1936. Series 2, 42. P. 230–265.

7. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных дифференциальных систем с коэффициентами в виде степенных рядов // Программирование. 2014. № 2. С. 75–85.

8. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Издательство иностранной литературы, 1958.

9. *Barkatou M.A., El Bacha C., Cluzeau T.* Simple forms of higher-order linear differential systems and their applications in computing regular solutions // J. of Symbolic Computation. 2011. V. 46. P. 633–658.

10. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Mathematics. 2000. V. 210. P. 3–25.

11. *Abramov S.* EG-eliminations // J. of Difference Equations and Applications. 1999. V. 5. P. 393–433.

12. *Abramov S.A., Bronstein M.* Linear algebra for skew-polynomial matrices // Rapport de Recherche INRIA, RR-4420, March 2002, http://www.inria.fr/RRRT/RR-4420.html

13. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные дифференциальные и разностные системы: EG_δ- и EG_σ- исключения // Программирование. 2013. № 2. С. 51–74.

14. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // Фунд. и прикл. мат. 2011/2012. Т. 17. № 1. С. 3–21.

15. *Abramov S., Bronstein M., Khmelnov D.* On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems // In Proc. of CASC'05. 2005. P. 1–12.

16. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen // Teubner, Leipzig, 1894.

17. *van der Hoeven J.* Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities // J. of Symbolic Computation. 2001. V. 31. P. 717–743.

18. *Abramov S.A., Khmelnov D.E.* A note on computing the regular solutions of linear differential systems // In Proc. of RWCA'04. 2004. P. 13–27.

19. *Barkatou M.* An algorithm to compute the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear differential system // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 1997. V. 8. P. 1–23.

20. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Resolving sequences of operators for linear differential and difference systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. V. 56. No. 5.

21. *Tournier E.* Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR Étude théorique et réalisation. Thèse d'État // Université de Grenoble. 1987.

22. *Pflügel E.* DESIR-II // RT 154, IMAG Grenoble. 1996.

23. Maple online help // http://www.maplesoft.com/support/help/