*ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2015, № 2, с. 69–80*

**КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА**

*УДК 517.929*

# ПОИСК РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ *


**С.А. Абрамов**

*Вычислительный центр РАН*

*119333 Москва, ул. Вавилова, 40*

*E-mail: sergeyabramov@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.09.2014

Рассматриваются линейные дифференциальные и разностные системы произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами. Предлагается алгоритм поиска их рациональных решений, основанный на том, что формальные ряды, в которые разлагаются эти решения, после умножения на предварительно найденный универсальный знаменатель становятся полиномами. Описывается также комбинированный алгоритм с элементами эвристики. Для сокращения вычислительных затрат этот последний выбирает в некоторый момент между двумя алгоритмами — новым и стандартным, основанном на использовании универсального знаменателя для замены неизвестных в системе и последующем поиске полиномиальных решений.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $K$ — поле характеристики 0. Для кольца полиномов и поля рациональных функций от $x$ над $K$ в дальнейшем используются обычные обозначения $K[x]$ и $K(x)$. Поле формальных лорановых рядов обозначается через $K((x))$. Если $R$ — некоторое кольцо (в частности, поле), то $\mathrm{Mat}_m(R)$ обозначает кольцо квадратных матриц порядка $m$ с элементами из $R$.

Мы рассматриваем системы вида

$$A_r(x)\xi^r y(x) + \cdots + A_1(x)\xi y(x) + A_0(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

$\xi \in \{\frac{d}{dx}, E\}$, где $E$ — оператор сдвига: $Ey(x) = y(x+1)$. Квадратные матрицы $A_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$, имеют порядок $m$, их элементы принадлежат $K[x]$, при этом $A_r(x), A_0(x)$ — ненулевые *ведущая* и *трейлинговая* матрицы; $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T$ — столбец неизвестных функций ($T$ — знак транспонирования). Число $r$ называется *порядком* системы. Предполагается без дополнительных оговорок, что рассматриваемая система имеет *полный ранг*, или, иначе, является системой полного ранга, т.е. входящие в систему уравнения независимы над кольцом операторов $K(x)[\xi]$. Система (1) может быть записана в виде $L(y) = 0$, где $L$ — это оператор

$$A_r(x)\xi^r + \cdots + A_1(x)\xi + A_0(x). \tag{2}$$

Решение $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T \in K(x)^m$ системы (1) называется *рациональным*. Если $y(x) \in K[x]^m$, то это решение является *полиномиальным* (частный случай рационального решения).

Хорошо известны (см., например, [1, 2, 3, 4, 5]) алгоритмы поиска всех рациональных решений нормальных систем уравнений первого порядка:

$$\xi y(x) = A(x)y(x), \tag{3}$$

где $A(x) \in \mathrm{Mat}_m(K(x))$, при этом в разностном случае матрица $A(x)$ предполагается обратимой в $\mathrm{Mat}_m(K(x))$. Алгоритмы из [1, 2, 4, 5] основаны на нахождении некоторого *универсального знаменателя* рациональных решений исходной системы, или, как для краткости мы будем писать, универсального знаменателя для исходной системы, т.е. такого полинома $U(x) \in K[x]$,

*Частичная поддержка РФФИ, грант 13-01-00182-а.

что если система имеет рациональное решение $y(x) \in K(x)^m$, то оно может быть представлено как $\frac{1}{U(x)}z(x)$, где $z(x) \in K[x]^m$. Зная универсальный знаменатель, можно сделать подстановку

$$y(x) = \frac{1}{U(x)}z(x), \tag{4}$$

где $z(x) = (z_1, \ldots, z_m)^T$ — вектор новых неизвестных, и преобразовать исходную систему в систему для $z(x)$, а затем применить один из алгоритмов поиска полиномиальных решений (см., например, [1, 2, 6]).

Значительно реже задача поиска рациональных решений рассматривалась для систем полного ранга, имеющих вид (1), когда не исключается вырожденность матриц $A_0(x), A_r(x)$ — одной из них или обеих. Тем не менее соответствующие алгоритмы были предложены в [7] (дифференциальный случай) и [8] (разностный случай). Эти алгоритмы также основаны на том, что найденный на одном из начальных этапов универсальный знаменатель $U(x)$ привлекается на следующем этапе для подстановки (4), затем следует поиск полиномиальных решений получившейся новой системы.

Ниже рассматривается несколько иной подход, он основан на разложении в ряд (с произвольными постоянными, входящими линейно в его коэффициенты) общего решения исходной системы (1). После умножения на предварительно найденный универсальный знаменатель $U(x)$ те ряды, которые соответствуют рациональным решениям, становятся полиномами. Для реализации этой общей схемы в виде алгоритма мы рассматриваем формальные ряды по убывающим степеням (можно также говорить о разложении в ряд в точке $\infty$). Каждый такой ряд содержит лишь конечное число степеней $x$ с неотрицательными показателями и, возможно, бесконечное число степеней — с отрицательными. Условимся называть *степенью* $\deg y(x)$ ряда $y(x)$ наибольший показатель степени $x$, входящей в ряд $y(x)$ с ненулевым коэффициентом (т.е. с коэффициентом, являющимся ненулевым столбцом). Если $y(x)$ представляет собой нулевой ряд, то полагаем $\deg y(x) = -\infty$.

В случае дифференциальной системы

$$A_r(x)y^{(r)}(x) + \cdots + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = 0 \tag{5}$$

рассматриваемые ряды принадлежат $K^m((x^{-1}))$. В случае разностной системы

$$A_r(x)y(x+r) + \cdots + A_1(x)y(x+1) + \\ + A_0(x)y(x) = 0 \tag{6}$$

привлекаются ряды по степеням $x^{\underline{n}}$ (см., например, [9, гл. 10]):

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\ldots(x-n+1), & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0, \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+|n|)}, & \text{если } n < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Двусторонние последовательности рациональных функций

$$(x^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \ \ (x^{\underline{n}})_{n\in\mathbb{Z}}$$

мы будем привлекать как базисы для разложения (представления рядами) решений систем соответственно в дифференциальном и разностном случаях. Пусть разложение решения системы в соответствующем базисе имеет коэффициенты $v(n) = (v_1(n), \ldots, v_m(n))^T$. Тогда последовательность $v(n)$ удовлетворяет *индуцированной рекуррентной* системе

$$B_l(n)v(n+l) + B_{l-1}(n)v(n+l-1) + \cdots + \\ + B_t(n)v(n+t) = 0, \tag{8}$$

где целые $l, t$ таковы, что $l \geqslant t$, и $B_t(n), \ldots, B_l(n) \in \mathrm{Mat}_m(K[n])$ ([10]).

Мы используем термин “индуцированная рекуррентная система”, а не “индуцированная разностная система”, подчеркивая этим особую роль индуцированных систем. Для краткости мы часто будем говорить просто об индуцированных системах. Их построение обсуждается в п. 2.2. Величина $l - t$ называется *порядком* системы (8).

Рассматривая начальные члены, коэффициенты которых удовлетворяют индуцированной системе (коэффициенты при всех достаточно больших степенях по нашему соглашению представляют собой нулевые вектор-столбцы), мы можем столкнуться как с тем, что существует продолжение этого начального фрагмента до формального ряда, являющегося решением исходной системы, так и с тем, что такое продолжение невозможно. Мы будем в дальнейшем использовать осторожный термин *формальная сумма*, понимая под этим формальную сумму $\sum_{n=N}^{\infty} g(n)x^n$

в дифференциальном случае и $\sum_{n=N}^{\infty} g(n)x^{\underline{n}}$ — в разностном, $g(n) \in K^m$. При этом $g(n) = 0$ при всех достаточно больших $n$ для каждой конкретной формальной суммы, тем самым каждая формальная сумма содержит конечное число ненулевых слагаемых. Если $f(x)$ является формальной суммой указанного вида и $g(n)$ — последовательность ее коэффициентов, то число $N$ будем называть *границей* этой последовательности, используя для этой границы обозначение $\operatorname{stp} g(n)$. Наибольшее такое $n$, что $g(n) \neq 0$ в формальной сумме $f(x)$, мы называем *степенью* $f(x)$, используя обозначение $\deg f(x)$; при этом $\deg f(x) = -\infty$, если формальная сумма $f(x)$ содержит только нулевые слагаемые.

Если последовательность $g(n)$ коэффициентов формальной суммы удовлетворяет индуцированной системе, то эта формальная сумма является *подчиненной* исходной системе.

Новый алгоритм использует построение подчиненных системе формальных сумм, границы которых выбираются некоторым специальным образом. Вообще говоря, мы не можем без существенных вычислительных затрат определить, допускает ли та или иная формальная сумма продолжение до формального ряда, являющегося решением исходной системы. Однако те "полезные" формальные суммы, которые отбирает алгоритм, допускают такое продолжение, — мы доказываем это в п. 4.3.

Новый алгоритм обходится без подстановок вида (4), используемая им индуцированная система в достаточно общей ситуации имеет меньший порядок. При равных прочих условиях это является несомненным преимуществом нового алгоритма. Проблема может возникнуть с числом элементов последовательности, которые предстоит найти с помощью рекуррентной системы: стандартный алгоритм иногда обходится меньшим их числом.

В разделе 6 описывается комбинированный, являющийся в какой-то мере эвристическим, алгоритм, который для сокращения вычислительных затрат выбирает на основе анализа промежуточных результатов, следовать ли новому алгоритму или же стандартному, основанному на использовании универсального знаменателя для замены неизвестных в системе и последующем поиске полиномиальных решений.

Если исходная система неоднородна и правая ее часть принадлежит $K[x]^m$, то добавлением к $y(x)$ дополнительной $(m+1)$-й компоненты $y_{m+1}(x)$ с постоянным значением 1, можно преобразовать исходную систему в однородную (преобразованные матрицы $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x)$ будут принадлежать $\mathrm{Mat}_{m+1}(K[x])$). Мы в дальнейшем рассматриваем только однородные системы.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

### *2.1. Охватывающие системы*

Ведущая матрица системы может оказаться необратимой в $\mathrm{Mat}_m(K(x))$, т.е. вырожденой, и это порождает известные трудности для поиска решений. Алгоритмы $\mathrm{EG}_\delta$ и $\mathrm{EG}_\sigma$ позволяют обходить препятствия такого рода. Для любой системы $S$ вида (1) алгоритм $\mathrm{EG}_\delta$ в дифференциальном случае, а алгоритм $\mathrm{EG}_\sigma$ — в разностном, строят *l-охватывающую* систему $\bar{S}$ с невырожденной ведущей матрицей $\bar{A}_r(x)$. При этом множество решений системы $\bar{S}$ содержит все решения системы $S$.

В разностном случае для системы $S$ можно с помощью алгоритма $\mathrm{EG}_\sigma$ помимо $l$-охватывающей системы построить и *t-охватывающую* систему $\bar{\bar{S}}$ вида (1) с невырожденной трейлинговой матрицей $\bar{\bar{A}}_0(x)$. При этом множество решений системы $\bar{\bar{S}}$ содержит все решения системы $S$.

Дополнительно алгоритм $\mathrm{EG}_\sigma$ находит конечное множество $\mathcal{C}$ *линейных ограничений*, т.е. линейных соотношений с постоянными коэффициентами для конечного множества значений $y_i(\eta + j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, r$. Каждое линейное ограничение получается из одного из уравнений системы на некотором этапе ее преобразования: в это уравнение подставляется некоторое конкретное значение переменной. Мы будем использовать линейные ограничения при рассмотрении решений в виде последовательностей с элементами из $K^m$, для этого нам будет достаточно линейных ограничений, для которых $\eta \in \mathbb{Z}$. В результате применения $\mathrm{EG}_\sigma$ получается пара $(\tilde{S}, \mathcal{C})$, с тем же множеством решений, что и $S$, при этом ведущая или соответственно трейлинговая матрица системы $\tilde{S}$ невырождена.

Алгоритм $\mathrm{EG}_\sigma$ может применяться как к исходной разностной системе, так и к системе, являющейся индуцированной для исходной дифференциальной или разностной системы. Для алгоритма $\mathrm{EG}_\delta$ в [11, п. 4.2] предложен, в сравнении с [7], более экономный по числу операций вариант.

**Примечание 1.** *Пусть задана система $\tilde{S}$ с множеством $\mathcal{C}$ линейных ограничений. Если рассматриваются все ее решения, принадлежащие классу последовательностей вида $v(n) = (v_1(n), \ldots, v_m(n))^T$ со значениями в $K^m$ и определенных при $N \leqslant n < \infty$ ($N$ фиксировано), то все принадлежащие $\mathcal{C}$ линейные ограничения, в которые с ненулевыми коэффициентами входят какие-то $v_i(\eta)$ с $\eta < N$ должны игнорироваться.*

### 2.2. *Индуцированные рекуррентные системы*

К сказанному во введении об индуцированных системах добавим, что в дифференциальном случае индуцированная рекуррентная система строится по исходной системе преобразованием

$$x \to E_n^{-1}, \quad \frac{d}{dx} \to (n+1)E_n, \tag{9}$$

в разностном случае — преобразованием

$$x \to n + E_n^{-1}, \quad E \to 1 + (n+1)E_n. \tag{10}$$

([12, 13, 14]). Эти преобразования удобно применять, если записать оператор (2) в виде операторной матрицы:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{m1} & \ldots & L_{mm} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$L_{ij} \in K[x, \xi]$, $i, j = 1, \ldots, m$. Явные формулы для преобразований (9), (10), применяемых к $L_{ij}$, даны в [12, п. 4.1, п. 4.2]

Если исходной системе соответствует оператор $L$ вида (2), а системе (8) соответствует индуцированный оператор

$$R = B_l(n)E_n^l + B_{l-1}(n)E_n^{l-1} + \cdots + B_t(n)E_n^t \tag{12}$$

($E_n$ обозначает сдвиг по $n$: $E_n v(n) = v(n+1)$), то равенство $\deg L(y) = n_0$ выполняется для некоторого целого $n_0$ если и только если последовательность $v(n)$ коэффициентов ряда $y(x)$ удовлетворяет системе $R(v) = 0$ для всех $n \geqslant t + n_0$ (здесь $t$ такое же, как в (12)).

Пусть $f(x)$ — ряд или формальная сумма и $g(n)$ — соответствующая последовательность коэффициентов. Пусть $N_0 \in \mathbb{Z}$, и если $f(x)$ — это формальная сумма, то $N_0 \geqslant \operatorname{stp} g(n)$. Будем обозначать через $\lfloor f(x) \rfloor_{N_0}$ формальную сумму, состоящую из тех входящих в $f(x)$ слагаемых, степени $x$ в которых не меньше, чем $N_0$.

Из сказанного выше легко выводится следующее предложение.

**Предложение 1.** *Пусть $L$ — оператор (2), $R$ — его индуцированный оператор (12) и целое $t$ — такое же, как в операторе $R$. Пусть $f(x)$ — формальная сумма, $g(n)$ — ее последовательность коэффициентов. В этом случае*

*(i) если $N \geqslant \operatorname{stp} g(n)$, то $\deg L(f(x)) \leqslant \deg L(\lfloor f(x) \rfloor_N)$.*

*(ii) формальная сумма $f(x)$ подчинена системе $L(y) = 0$ если и только если $\deg L(f(x)) < -t + \operatorname{stp} g(n)$.*

### 2.3. *Определяющие уравнения*

Напомним, что для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ из $K((x))$ его *валюация* $\operatorname{val}_x a(x)$ определена равенством

$$\operatorname{val}_x a(x) = \min\{i : a_i \neq 0\}, \tag{13}$$

при этом $\operatorname{val}_x 0 = \infty$. В скалярном случае для получения оценок валюаций аналитических решений в особых точках и границ степеней полиномиальных решений применяются алгебраические уравнения, называемые *определяющими* — см., например, [15, гл. IV]. Для нахождения аналогичного рода границ для рассматриваемых нами систем уравнений нужны какие-то варианты определяющих уравнений. Введенные в п. 2.2 индуцированные рекуррентные системы позволяют построить такие уравнения.

Если ведущая матрица $B_l(n)$ системы (8) вырождена, то для (8) можно с помощью $\mathrm{EG}_\sigma$ построить $l$-охватывающую систему

$$\bar{B}_l(n)v(n+l) + \bar{B}_{l-1}(n)v(n+l-1) + \cdots + \bar{B}_t(n)v(n+t) = 0. \tag{14}$$

Аналогичным образом можно построить $t$-охватывающую систему

$$\bar{\bar{B}}_l(n)v(n+l) + \bar{\bar{B}}_{l-1}(n)v(n+l-1) + \cdots + \\ + \bar{\bar{B}}_t(n)v(n+t) = 0. \quad (15)$$

Интересующие нас границы можно найти из некоторых алгебраических уравнений:

(i) Пусть $y(x) \in K((x))^m$ — решение дифференциальной системы, для которой (8) является индуцированной рекуррентной системой. Тогда значение $\nu = \mathrm{val}_x\, y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\det \bar{B}_l(\nu - l) = 0. \quad (16)$$

(ii) Пусть $y(x) \in K[x]^m$ — решение дифференциальной или разностной системы, для которой (8) является индуцированной рекуррентной системой. Тогда значение $\nu = \deg y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\det \bar{\bar{B}}_t(\nu - t) = 0 \quad (17)$$

(здесь $\deg y(x) = \max_{i=1}^m \deg y_i(x)$ для $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^T \in K[x]^m$).

Используя систему (14) при изменении $n$ от $-\infty$ в положительном направлении, мы можем получить в некий момент, исходя из нулевых элементов последовательности, ненулевой элемент только если трейлинговая матрица системы (14) окажется вырожденной, это дает (i). Аналогично обосновывается (ii).

Уравнение (17) может рассматриваться как определяющее уравнение исходной системы в точке $\infty$, и наибольший целый неотрицательный корень этого уравнения дает верхнюю границу степеней полиномиальных решений. Если же целых неотрицательных корней у уравнения (17) нет, то у исходной системы заведомо нет полиномиальных решений. Аналогичным образом в дифференциальном случае уравнение (16) может быть использовано для нахождения нижних границ валюаций решений в точке 0. (Подстановка $x + \alpha$ вместо $x$ в исходную систему переводит точку $\alpha$ в точку 0.)

Применительно к (16), (17) название "определяющее уравнение" используется в некотором условном смысле, так как, например, получаемые этим путем уравнения не являются единственными, они зависят от построенных $l$- и $t$-охватывающих систем.

## 3. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ

Множество нормированных неприводимых полиномов из $K[x]$ будет обозначаться через $\mathrm{Irr}(K[x])$.

### *3.1. Дифференциальный случай*

Для дифференциальной системы $S$ рассматриваемого вида можно найти $l$-охватывающую систему $\bar{S}$, и если решение системы $S$ имеет особенность в точке $\alpha$, то $\alpha$ — корень определителя ведущей матрицы системы $\bar{S}$. Умение с помощью соответствующего определяющего уравнения находить нижнюю границу $e_\alpha$ валюации в точке $\alpha$ любого из решений системы $S$ позволяет построить универсальный знаменатель. Заметим, что если определяющее уравнение, соответствующее какому-то $\alpha$, не имеет целых корней, то $S$ не имеет рациональных решений. Можно добавить к сказанному, что границы $e_i$ одинаковы для всех корней $\alpha_i$ каждого множителя левой части определяющего уравнения и это используется в вычислениях ([16]). Пусть полиномам $p_1(x), \ldots, p_s(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$ соответствуют отрицательные целые $e_1, \ldots, e_s$. Тогда в качестве универсального знаменателя может быть взят полином

$$U(x) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{-e_i}(x). \quad (18)$$

В дальнейшем нам потребуется также полином

$$\tilde{U}(x) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{-e_i+r}(x), \quad (19)$$

а также число

$$\rho = r \sum_{i=1}^{s} \deg p_i(x). \quad (20)$$

### *3.2. Разностный случай*

Если $p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$, $f(x) \in K[x]$, то $\mathrm{val}_{p(x)} f(x)$ определяется как максимальное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $p^n(x) | f(x)$ ($\mathrm{val}_{p(x)} 0 = \infty$), и $\mathrm{val}_{p(x)} F(x) = \mathrm{val}_{p(x)} f(x) - \mathrm{val}_{p(x)} g(x)$ для $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x), g(x) \in K[x]$. Это определение согласуется с (13).

Для $p(x) \in \mathrm{Irr}(K[x])$, $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ мы определяем конечное множество

$$\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = \{k \in \mathbb{Z} : p(x+k) \mid f(x)\};$$

при $\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = \varnothing$ полагаем $\max\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = -\infty$, $\min\mathcal{N}_{p(x)}(f(x)) = +\infty$.

Знаменатель $\mathrm{den}F(x)$ рациональной функции $F(x)$ — это полином наименьшей возможной степени с единичным старшим коэффициентом такой, что $F(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{den}F(x)}$ для некоторого полинома $f(x)$. Знаменатель $\mathrm{den}A(x)$ матрицы $A(x) \in \mathrm{Mat}_m(K(x)$ — это наименьшее общее кратное знаменателей элементов матрицы $A(x)$. Пусть $\bar{A}_r(x)$ — ведущая матрица $l$-охватывающей системы и $\bar{\bar{A}}_0(x)$ — трейлинговая матрица $t$-охватывающей системы для (6). Положим

$$V(x) = \mathrm{den}\bar{A}_r^{-1}(x-r),\ W(x) = \mathrm{den}\bar{\bar{A}}_0^{-1}(x). \quad (21)$$

Один из алгоритмов построения универсального знаменателя состоит из двух шагов. На первом шаге строится множество $Q = \{q_1(x), \ldots, q_s(x)\}$, $s \geqslant 1$, всех таких элементов из $\mathrm{Irr}(K[x])$, что

$$\min\mathcal{N}_{q_t}(V(x)) = 0,\ \ \max\mathcal{N}_{q_t}(W(x)) \geqslant 0,$$

$t = 1, \ldots, s$. Для каждого $q_t(x) \in Q$ определяется

$$d_t = \max\mathcal{N}_{q_t}(W(x)).$$

Множество всех $p(x)$, для которых $p(x) = q_t(x+i)$ при некоторых $t, i$, $1 \leqslant t \leqslant s$, $0 \leqslant i \leqslant d_t$, обозначается через $M$.

На втором шаге вычисляется универсальный знаменатель

$$\prod_{p(x)\in M} p^{\gamma_{p(x)}}(x), \quad (22)$$

где

$$\gamma_{p(x)} = \min\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x+n)}V(x),\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{val}_{p(x-n)}W(x)\right\}. \quad (23)$$

Если учитывать совпадения $\gamma_{p(x)}$ для различных (иногда многих) $p(x)$, отличающихся друг от друга сдвигом на целое число, то вычисления существенно ускоряются ([4, 5, 17, 8]).

В дальнейшем нам потребуется полином

$$\tilde{U}(x) = \mathrm{lcm}_{i=0}^r U(x+i), \quad (24)$$

где lcm обозначает наименьшее общее кратное.

**Предложение 2.** *Пусть*

$$\mu_t = \max_{i=0}^{d_t} \mathrm{val}_{q_t(x+i)}U(x), \quad (25)$$

$t = 1, \ldots, s$, *и*

$$\rho = r\sum_{t=1}^{s} \mu_t \deg q_t(x). \quad (26)$$

*Тогда равенство*

$$\deg\tilde{U}(x) = \deg U(x+j) + \rho \quad (27)$$

*выполнено для всех* $j = 0, 1, \ldots, r$.

**Доказательство.** Структура универсального знаменателя $U(x)$, получаемого упомянутым алгоритмом, такова, что для $\tilde{U}(x) = \mathrm{lcm}_{j=0}^r U(x+j)$ имеем

$$\sum_{i=0}^{d_i+r} \mathrm{val}_{q_t(x+i)}\tilde{U}(x) = \sum_{i=0}^{d_i} \mathrm{val}_{q_t(x+i)}U(x) + r\mu_t,$$

$t = 1, \ldots, s$. Поэтому

$$\deg\tilde{U}(x) = \deg U(x) + r\sum_{t=1}^{s} \mu_t \deg q_t(x),$$

и так как $\deg U(x) = \deg U(x+j)$ для любого $j$, то $\deg\tilde{U}(x) - \deg U(x+j) = r\sum_{t=1}^{s} \mu_t \deg q_t(x)$. Таким образом, равенство (27) выполнено. □

**Примечание 2.** *Величины* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *и* $\rho$ *могут быть найдены при построении* $U(x)$ *без дополнительных вычислительных затрат.*

Как в дифференциальном, так и в разностном случаях мы имеем

$$\deg\tilde{U}(x) - \deg U(x) = \rho. \quad (28)$$

## 4. ПОИСК ЧИСЛИТЕЛЕЙ ДЛЯ ИЗВЕСТНОГО УНИВЕРСАЛЬНОГО ЗНАМЕНАТЕЛЯ

### *4.1. Полиномиальные решения*

Вначале рассмотрим известную задачу поиска полиномиальных решений систем.

После того, как построена индуцированная система и для нее, в случае надобности, найдена

$t$-охватывающая система, мы определяем верхнюю границу $N$ степеней всех полиномиальных решений как наибольший целый неотрицательный корень уравнения (17). Если таких корней нет, то заключаем, что исходная система не имеет полиномиальных решений. В некоторых случаях множество линейных ограничений, получаемых вместе с $t$-охватывающей системой, дает возможность уточнить границу $N$ ([7, разд. 3]), мы здесь не будем останавливаться на этом. Для фактического нахождения полиномиальных решений можно применить метод неопределенных коэффициентов, но в настоящее время используется более эффективное построение коэффициентов полиномиальных решений с помощью полученной рекуррентной системы (см., например, [6]).

Перепишем (15) в виде

$$\bar{\bar{B}}_t(n)v(n+t) = -\bar{\bar{B}}_{t+1}(n)v(n+t+1) - \cdots \\ \cdots - \bar{\bar{B}}_{l-1}(n)v(n+l-1) - \bar{\bar{B}}_l(n)v(n+l). \quad (29)$$

Пользуясь тем, что $v(n) = 0$ при $n > N$, найдем последовательно

$$v(N),\ v(N-1),\ \ldots,\ v(0),\ v(-1),\ \ldots,\ v(-l+t).$$

Для этого при фиксированном $n$ мы рассматриваем (29) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $v(n+t)$. При $n = N-t, N-t-1, \ldots$ в решения таких систем будут входить постоянные, набор которых будет меняться при переходе к следующему значению $n$, коль скоро матрица в левой части очередной системы (29) оказывается вырожденной. С одной стороны, система должна быть совместной, и это может давать соотношения (линейные алгебраические уравнения) для ранее введенных постоянных, с другой стороны, возникают новые постоянные, число которых равно разности числа $m$ и ранга матрицы левой части. К полученным линейным алгебраическим уравнениям надо добавить уравнения

$$v(-1) = 0,\ v(-2) = 0,\ \ldots\ , v(-l+t) = 0 \quad (30)$$

относительно постоянных, а также линейные ограничения, в которые подставлены нули вместо неизвестных $v_i(\eta)$ при $\eta < 0$ и $\eta > N$. Полученное в итоге множество выражений $v(N)x^N + v(N-1)x^{N-1} + \cdots + v(0)$ является множеством всех полиномиальных решений исходной системы (постоянные входят линейно в $v(N), v(N-1), \ldots, v(0)$).

### *4.2. Замена неизвестных и порядок индуцированной системы*

Мы предполагаем далее, что для исходной системы $L(y) = 0$ универсальный знаменатель $U(x)$ построен по формулам (18), (22). Предполагаем также, что в соответствии с (19), (20), (24), (26) найдены $\tilde{U}(x)$ и $\rho$. Подстановка (4) в исходную систему $L(y) = 0$ и последующий переход к системе с полиномиальными коэффициентами достигается переходом от оператора $L$ к оператору

$$L_1 = \tilde{U}(x) L \frac{1}{U(x)}. \quad (31)$$

Индуцированные рекуррентные операторы для $L$ и $L_1$ будут обозначаться соответственно через $R$ и $R_1$. Величины $t$ и $l$ определяются, исходя из оператора $R$ (см. (12)). Аналогичные величины, связанные с $R_1$, будут обозначаться через $l_1, t_1$. Валюацией матрицы будем считать наименьшую из валюаций ее элементов, соответственно степенью матрицы будем считать наибольшую из степеней элементов.

**Предложение 3.** *Имеют место соотношения*
*(i)* $\operatorname{ord} R_1 - \operatorname{ord} R \leqslant \rho$;
*(ii)* $\operatorname{ord} R \leqslant \operatorname{ord} L - t$ *и* $\operatorname{ord} R_1 \leqslant \operatorname{ord} L - t_1$.

**Доказательство** достаточно провести для скалярных операторов, т.е. для $m = 1$. В общем случае $L$ допускает представление в виде операторной матрицы (11), аналогично дело обстоит с $R$.

(i) Можно проследить, что каждое слагаемое оператора $L$ при переходе от $L$ к $L_1$ преобразуется так, что порядок соответствующего индуцированного оператора увеличивается не более, чем на $\rho$.

(ii) Имеем $\operatorname{ord} R = l - t$ и $\operatorname{ord} R = l_1 - t_1$, при этом $l, l_1 \leqslant \operatorname{ord} L$. □

### *4.3. Домножение на универсальный знаменатель*

Утверждение следующей теоремы является ключевым для обоснования нового алгоритма поиска рациональных решений.

**Теорема 1.** *Пусть $f(x)$ — подчиненная системе $L(y) = 0$ формальная сумма, $v(n)$ — последовательность ее коэффициентов и*

$$\operatorname{stp} v(n) = -\operatorname{ord} L + t - \rho - \deg U(x). \qquad (32)$$

*Пусть в произведении $U(x)f(x)$, записанном в дифференциальном случае по степеням $x$, а в разностном — по степеням $x^{\underline{n}}$, все степени $x$ с показателями $-1, \ldots, -\operatorname{ord} R - \rho$ имеют нулевые коэффициенты. Тогда исходная система $L(y) = 0$ имеет рациональное решение $\frac{1}{U(x)} \lfloor U(x)f(x) \rfloor_0$.*

**Доказательство.** Заметим, что $L_1(U(x)f(x)) = \tilde{U}(x)L(f(x))$. Так как формальная сумма $f(x)$ подчинена исходной системе, то по предложению 1(ii) и равенству (32) имеем $\deg L(f(x)) < -\operatorname{ord} L - \rho - \deg U(x)$. Учитывая (28), получаем

$$\deg L_1(U(x)f(x)) = \deg U(x) + \rho + L(f(x)) < \\ < \deg U(x) + \rho - \operatorname{ord} L - \rho - \deg U(x) = \\ = -\operatorname{ord} L.$$

В силу предложения 3(ii) выполняется $-\operatorname{ord} L \leqslant -t_1 - \operatorname{ord} R_1$, и

$$\deg L_1 \left(U(x)f(x)\right) < -t_1 - \operatorname{ord} R_1. \qquad (33)$$

Для последовательности $g(n)$ коэффициентов произведения $U(x)f(x)$ мы имеем $\operatorname{stp} g(n) = \operatorname{stp} v(n) + \operatorname{val}_x U(x)$. Покажем, что $-\operatorname{ord} R_1 \geqslant \operatorname{stp} g(n)$. Для этого достаточно установить, что $-\operatorname{ord} R_1 \geqslant \operatorname{stp} v(n) + \deg U(x)$, а это неравенство является следствием (32) и предложения 3. Из предложения 1(i) следует, что

$$\deg L_1(\lfloor U(x)f(x) \rfloor_{-\operatorname{ord} R_1}) < -t_1 - \operatorname{ord} R_1.$$

В силу предложения 1(ii) коэффициенты формальной суммы $\lfloor U(x)f(x) \rfloor_{-\operatorname{ord} R_1}$ удовлетворяют рекуррентной системе с оператором $R_1$. Но самые последние коэффициенты этой формальной суммы в равном $\operatorname{ord} R_1$ количестве — это нули, так как степени $x$ с показателями $-1, \ldots, -\operatorname{ord} R - \rho$ имеют по условию в $U(x)f(x)$ нулевые коэффициенты. В силу предложения 3(i) $\operatorname{ord} R_1 \leqslant \operatorname{ord} R + \rho$. Следовательно, если дополнить $\lfloor U(x)f(x) \rfloor_{-\operatorname{ord} R_1}$ до бесконечного ряда слагаемыми с нулевыми коэффициентами, то вся последовательность коэффициентов этого ряда будет удовлетворять системе с оператором $R_1$. Отсюда $\lfloor U(x)f(x) \rfloor_0$ является полиномиальным решением системы $L_1(y) = 0$. □

**Примечание 3.** *Построение множества всех удовлетворяющих системе $R(v) = 0$ последовательностей с границей (32) выполняется с меньшими затратами, если трейлинговая матрица системы невырождена. Если в случае ее вырожденности при переходе к $t$-охватывающей системе $\bar{\bar{R}}(v) = 0$ возникает конечное множество $\mathcal{C}$ линейных ограничений, то в соответствии со сказанным в примечании 1 из этого множества удаляются некоторые из его элементов, при этом (32) выступает в роли $N$ из примечания 1.*

### *4.4. Завершение поиска рациональных решений*

Теорема 1 и примечание 3 показывают, что для нахождения числителей, соответствующих универсальному знаменателю $U(x)$, мы можем действовать до некоторого момента сходно с тем, как при поиске полиномиальных решений, рассмотренном в п. 4.1, но теперь система (15) будет индуцированной системой для исходной системы: подстановка (4) не привлекается. Система (29) является, как и раньше, $t$-охватывающей системой для (15), записанной удобным для наших целей образом. Мы по-прежнему рассматриваем (29) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $v(n + t)$, теперь такие системы решаются последовательно для $n = e^*, e^* - 1, \ldots, -\operatorname{ord} L + t - \rho - \deg U(x)$. Вновь будут появляться постоянные, набор которых будет меняться, когда матрица в левой части очередной системы (29) оказывается вырожденной (возникают линейные алгебраические уравнения для ранее введенных постоянных и возникают новые постоянные). Формальная сумма с найденными коэффициентами умножается на $U(x)$. Коэффициенты при степенях $x$ с показателями $-1, -2, \ldots, -\operatorname{ord} R - \rho$ из полученного произведения приравниваются нулю. К полученным линейным алгебраическим уравнениям добавляем не отброшенные в соответствии с примечанием 3 линейные ограничения, в которые подставлены нули вместо неизвестных $v_i(\eta)$ при $\eta < 0$ и

$\eta > e^* + \deg U(x)$. Решив образовавшуюся систему линейных алгебраических уравнений, мы, тем самым, окончательно находим множество постоянных, которые могут принимать произвольные значения. Преобразованные в соответствии с найденными решениями этой системы слагаемые, в которых показатели степени при $x$ лежат в диапазоне от 0 до $e^* + \deg U(x)$, дают нам искомые числители рациональных решений.

### 4.5. *Применение рекуррентного оператора вместо умножения на полином*

При умножении ряда или формальной суммы $f(x)$ на полином $U(x)$ последовательность коэффициентов $f(x)$ преобразуется применением рекуррентного оператора $S_{U(x)}$, который может быть построен, исходя из полинома $U(x)$, с помощью (9) в дифференциальном случае и (10) — в разностном.

В предложенном в п. 4.4 подходе к поиску числителей можно непосредственное умножение формальной суммы заменить на применение к конечной последовательности коэффициентов этой суммы некоторого скалярного рекуррентного оператора (оператор применяется независимо ко всем компонентам вектора). Как будет показано в разделе 6.1, это обстоятельство позволяет установить для некоторых случаев преимущество нового алгоритма в сравнении со стандартным.

## 5. СТАНДАРТНЫЙ И НОВЫЙ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для удобства сравнения стандартного и нового алгоритмов, которое будет проведено в п. 6.1, мы нумеруем шаги нового алгоритма цифрами 1, 2, 3, ..., а шаги стандартного алгоритма — 1°, 2°, 3°, ... Если в описании некоторого шага алгоритма дифференциальный и разностный случаи рассматриваются раздельно, то они помечаются посредством $d/dx$ и соответственно $E$.

### 5.1. *Стандартный алгоритм*

1°. $(d/dx)$ С помощью $\mathrm{EG}_\delta$ (п. 2.1) построить для исходной системы $l$-охватывающую систему и найти потенциальные особые "точки" (неприводимые полиномы), — см. п. 3.1. Для каждой из этих "точек" найти (сдвигом, построением индуцированной рекуррентной системы и использованием $\mathrm{EG}_\sigma$) наименьший целый корень соответствующего ей определяющего полинома. Если при этом у какого-то из этих полиномов нет целых корней, то STOP. Иначе пусть $p_1(x), \dots, p_s(x)$ — потенциальные особые "точки", которым соответствуют наименьшие целые корни $e_1, \dots, e_s$ с отрицательными значениями. Найти универсальный знаменатель, положив $U(x) = p_1^{-e_1}(x) \dots p_s^{-e_s}(x)$.

$(E)$ Применяя к исходной системе $\mathrm{EG}_\sigma$ (п. 2.1), найти $l-$ и $t-$охватывающие системы. Построить полиномы $V(x), W(x)$ и по ним — универсальный знаменатель $U(x)$ с помощью одного из известных алгоритмов, например, алгоритма из [5] (см. п. 3.2).

2°. Выполнить подстановку (4) в исходную систему $L(y) = 0$ и избавиться от знаменателей, переходя к системе $L_1(y) = 0$ вида (31) с полиномиальными коэффициентами.

3°. Построить для полученной системы $L_1(y) = 0$ индуцированную систему $R_1(v) = 0$, применить к ней $\mathrm{EG}_\sigma$ и получить рекуррентную систему $\bar{R}_1(v) = 0$ с невырожденной трейлинговой матрицей. (При этом, возможно, будет дополнительно получено конечное множество $\mathcal{C}$ линейных ограничений.) Если у определителя этой матрицы нет неотрицательных целых корней, то STOP. Иначе полагаем $\bar{e}$ равным наибольшему из таких корней.

4°. Найти полиномиальные решения системы $L_1(y) = 0$, используя $\bar{e}$ как верхнюю границу степеней этих решений (п. 4.1). Это даст числители, соответствующие универсальному знаменателю $U(x)$.

### 5.2. *Новый алгоритм*

К тем отличиям нового алгоритма от стандартного, о которых говорилось во введении, мы добавляем привлечение некоторой стратегии проверки отсутствия рациональных решений, производимой на ранних стадиях вычислений ([18, 19]). Эта проверка не увеличивает вычислительной сложности алгоритма.

1. $(d/dx)$ Те же построения, что и на шаге $1^\circ(d/dx)$ стандартного алгоритма, и дополнительное вычисление $\rho$ — см. (20).

$(E)$ Применяя к исходной системе $\mathrm{EG}_\sigma$, найти $l$- и $t$-охватывающие системы. Построить полиномы $V(x), W(x)$ и по ним — универсальный знаменатель $U(x)$ с помощью алгоритма из [5] (см. п. 3.2), попутно получить значение $\rho$ (см. (26)).

2. Для исходной системы построить индуцированную рекуррентную систему $R(v) = 0$. С помощью $\mathrm{EG}_\sigma$ найти для нее $t$-охватывающую систему $\bar{R}(v) = 0$ с невырожденной трейлинговой матрицей, получая дополнительно конечное множество $\mathcal{C}$ линейных ограничений. Найти определяющее уравнение. Если оно не имеет целых корней, то STOP, иначе вычислить наибольший целый корень $e^*$. Если $e^* + \deg U(x) < 0$, то STOP.

3. Найти числители, соответствующие универсальному знаменателю $U(x)$, следуя пути, указанному в п. 4.4 и п. 4.5.

## 6. КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ

### 6.1. *Сравнение затрат*

Для вычисления универсального знаменателя $U(x)$ стандартный и новый алгоритмы выполняют одинаковые действия (шаги $1^\circ$ и 1).

Стандартный алгоритм выполняет подстановку (4) в систему $L(y) = 0$ и избавляется в получившейся системе от знаменателей (шаг $2^\circ$), затем строит индуцированную систему $R_1(v) = 0$, применяет к ней $\mathrm{EG}_\sigma$ и получает систему $\bar{R}_1(v) = 0$ с невырожденной трейлинговой матрицей (шаг $3^\circ$). С помощью этой системы на шаге $4^\circ$ строятся коэффициенты тех слагаемых формальной суммы, показатели степени в которых принадлежат множеству

$$\{\bar{e},\, \bar{e} - 1, \ldots, -\mathrm{ord}\, \bar{R}_1\}. \tag{34}$$

Новый алгоритм строит на шаге 2 рекуррентную систему $\bar{R}(v) = 0$ и с ее помощью на шаге 3 определяет для исходной системы те члены соответствующей формальной суммы, показатели степени в которых принадлежат множеству

$$\{e^*,\, e^* - 1, \ldots, -\mathrm{ord}\, L + t - \rho - \deg U(x)\}. \tag{35}$$

Стандартный алгоритм использует $\bar{e}$ в качестве верхней границы степеней полиномов, которые являются числителями, соответствующими универсальному знаменателю $U(x)$. Для нового алгоритма в этом качестве выступает $e^* + \deg U(x)$. Равенство

$$\bar{e} = e^* + \deg U(x), \tag{36}$$

имеет место, в частности, если $e^*$ и $\bar{e}$ являются точными верхними границами показателей степеней $x$ в решениях систем $L(y) = 0$ и соответственно $L_1(y) = 0$ в виде рядов по убывающим степеням $x$. Любая из величин $e^*$ и $\bar{e}$ может быть больше соответствующей верхней границы, и мы не можем заранее вычислить расхождения. Многое зависит от того, как применялся алгоритм $\mathrm{EG}_\sigma$ к индуцированным системам (этот алгоритм основан на исключениях по типу исключений Гаусса, и в некоторых ситуациях возможен тот или иной выбор уравнения для выполнения в нем исключения). Поэтому предположение о выполнении равенства (36) является вполне разумным при сравнении затрат старого и нового алгоритмов (фактически же возможно как $e^* \geqslant \bar{e}$, так и $e^* \leqslant \bar{e}$). Согласно предложению 3, число элементов множества (34) не превосходит числа элементов множества (35). Однако при $l = \mathrm{ord}\, L$ и $\mathrm{ord}\, R_1 = \mathrm{ord}\, R + \rho$ эти множества содержат одинаковое число элементов. Эти два равенства часто оказываются выполненными.

Следуя новому алгоритму, на шаге 3 надо умножить полученную формальную сумму на $U(x)$. Предположим, что

$$\rho \geqslant \deg U(x). \tag{37}$$

Как показано в п. 4.5, умножение формальной суммы на $U(x)$ эквивалентно применению к последовательности коэффициентов этой формальной суммы рекуррентного оператора, порядок которого совпадает с $\deg U(x)$. При этом каждое слагаемое формальной суммы имеет коэффициент в виде вектора с $m$ компонентами из поля $K$. Рекуррентный оператор, соответствующий умножению на $U(x)$, записывается как скалярный оператор. Затраты на построение рекуррентной системы $R_1(v) = 0$ не меньше общих затрат на построение системы $R(v) = 0$ и оператора $S_{U(x)}$. Умножение коэффициента такого оператора на вектор из $K^m$ требует $m$ умножений в поле $K$, а для умножения матричного коэффициента оператора потребуется $m^2$ таких умножений и $m(m-1)$ сложений. Используя новый алгоритм, при вычислении каждого слагаемого формальной суммы мы получаем экономию с асимптотической оценкой $\Omega(mu)$, где $u = \deg U(x)$.

Новый алгоритм обходится без подстановки (4), используемая им индуцированная система в достаточно общей ситуации имеет меньший порядок. При равных прочих условиях в этом проявляется преимущество нового алгоритма. Проблема может возникнуть с числом элементов последовательности, которые предстоит вычислить с помощью рекуррентной системы. Ниже описывается комбинация рассмотренных стандартного и нового алгоритмов.

### *6.2. Проверяемое условие*

Как видно из предыдущих рассуждений, при выполнении условия (37) можно без большого риска рассчитывать на то, что шаг 3 потребует меньших затрат, чем 4°. Шаг 2 выглядит менее затратным, чем последовательные шаги 2°, 3°. Предлагается отчасти эвристический вариант алгоритма:

1) Шаг 1.
2) Если выполняется (37), то шаги 2, 3.
3) Если нет, то шаги 2°, 3°, 4°.

При поиске числителей, соответствующих найденному универсальному знаменателю, этот комбинированный вариант опирается на выбор между стандартным и новым алгоритмом. Определяющее выбор условие можно пытаться заменить каким-то другим, что, возможно, даст более эффективную комбинацию алгоритмов.

Автор благодарит А. Геффар за продуктивное обсуждение первоначального замысла статьи и Д. Е. Хмельнова, внимательно прочитавшего статью и сделавшего ряд полезных замечаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramov S., Barkatou M.* Rational solutions of first order linear difference systems // Proc. of ISSAC'98, 1998, 124–131.
2. *Barkatou M.* Rational solutions of matrix difference equations: problem of equivalence and factorization / Proc. of ISSAC'99. 1999. P. 277–282.
3. *van Hoeij M.* Rational solutions of linear difference equations // Proc. of ISSAC'98. 1998. P. 120–123.
4. *Gheffar A., Abramov S.* Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials // Adv. in Appl. Maths. 2011. V. 47. P. 352–364.
5. *Abramov S.A., Gheffar A., Khmelnov D.E.* Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators // Proc.of CASC 2010, LNCS 6244, Springer, Heidelberg. 2010. P. 4–18.
6. *Хмельнов Д.Е.* Поиск полиномиальных решений линейных функциональных систем с помощью индуцированных рекурренций // Программирование. 2004. № 2. P. 8–16.
7. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // Фунд. и прикл. мат. 2011/2012. Т. 17. № 1. P. 3–21.
8. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Знаменатели рациональных решений линейных разностных систем произвольного порядка // Программирование. 2012. №. 2. P. 45–54.
9. *Milne-Thomson L.M.* The calculus of finite differences. MacMillan and Co. Limited, London, 1933.
10. *Abramov S.* EG-eliminations // J. of Difference Equations and Applications. 1999, 5. P. 393–433.
11. *Abramov S., Barkatou M.* On the dimension of solution spaces of full rank linear differential systems // Proc. of CASC 2013, LNCS 8136, Springer, Heidelberg, 2013. P. 1–9.
12. *Abramov S., Bronstein M., Petkovšek M.* On polynomial solutions of linear operator equations // Proc. of ISSAC'95, 1995. P. 290–295.
13. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Mathematics, 1997. P. 1–8.
14. *Abramov S., Petkovšek M.* Special power series solutions of linear differential equations // Proc. of FPSAC'96, 1996. P. 1–7.
15. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1958.

16. *Barkatou M.* A fast algorithm to compute the rational solutions of systems of linear differential equations // RR 973-M- Mars 1997, IMAG-LMC, Grenoble, 1997.

17. *Абрамов С.А., Геффар А., Хмельнов Д.Е.* Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы знаменателей // Программирование. 2011. № 2. P. 28–39.

18. *Gheffar A.* Linear differential, difference and $q$-difference homogeneous equations having no rational solutions // ACM Commun. Comput. Algebra. 2010. V. 44. № 3. P. 78–83.

19. *Gheffar A.* Detecting nonexistence of rational solutions of linear difference equations in early stages of computation // ACM Commun. Comput. Algebra. 2014. V. 48. № 3. P. 90–97.