УДК 004.421.6; 517.926.4

ИСЧЕРПЫВАЮЩЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С УСЕЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

© 2022 г. С. А. Абрамов, А. А. Рябенко, Д. Е. Хмельнов
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН
Вычислительный центр РАН им. А.А.Дородницына
119333 Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, anna.ryabenko@gmail.com, dennis_khmelnov@mail.ru
Поступила в редакцию

Ранее были предложены алгоритмы, позволяющие находить лорановы и регулярные решения линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами в виде усеченных формальных степенных рядов. Решения также содержат усеченные степенные ряды. Ниже предлагаются некоторые автоматические способы подтверждения невозможности получения большего числа членов таких решений без предоставления дополнительной информации о заданном уравнении. Подтверждение имеет форму контрпримера к предположению о возможности получения однозначно определенных дополнительных членов решения.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. *Уравнения, усеченные ряды*

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Для кольца полиномов от x над K мы в дальнейшем используем обычное обозначение $K[x]$. Кольцо формальных степенных рядов от x над K обозначается через $K[[x]]$, поле формальных лорановых рядов — через $K((x))$. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i$ поля $K((x))$ его *валюация* $\operatorname{val}_x a(x)$ определена равенством $\operatorname{val}_x a(x) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\operatorname{val}_x 0 = \infty$. Пусть $t \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, *$t$-усечение* $a^{\langle t\rangle}(x)$ получается отбрасыванием всех членов $a(x)$ степени большей, чем t. Число t называется *степенью усечения.* Под $O(x^t)$, где $t \in \mathbb{Z}$, будет пониматься некий (неуточняемый) ряд с валюацией, большей или равной t. Как правило, это обозначение используется в тех случаях, когда либо подразумеваемый ряд нам не известен, либо если конкретный вид ряда не представляет для нас интереса; важно лишь, что его валюация не меньше, чем t.

В настоящей статье дифференциальные уравнения записываются с помощью операции $\theta = x\frac{d}{dx}$ вместо обычной операции дифференцирования $\frac{d}{dx}$ (переход от одной формы записи к другой выполняется легко).

Мы рассматриваем уравнения в усеченном виде. *Усеченное дифференциальное уравнение* записывается как

$$\sum_{i=0}^{r}\left(a_i^{\langle t_i\rangle}(x) + O(x^{t_i+1})\right)\theta^i y(x) = 0, \qquad (1)$$

$a_i^{\langle t_i\rangle}(x) \in K[x]$, $t_i \geq \deg a_i^{\langle t_i\rangle}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, r$, где $O(x^{t_i+1})$ обозначает незаданную часть ряда.

Нам неизвестен полный вид рассматриваемого уравнения

$$a_r(x)\theta^r y(x) + a_{r-1}(x)\theta^{r-1}y(x) + \\ + \cdots + a_0(x)y(x) = 0, \quad (2)$$

в котором $a_0(x), \ldots, a_r(x) \in K[[x]]$, $a_i - a_i^{\langle t_i\rangle}(x) = O(x^{t_i+1})$, $i = 0, \ldots, r$. Предполагается, что *ведущий* коэффициент $a_r(x)$ отличен от нуля и что валюация хотя бы одного из рядов $a_0(x), \ldots, a_r(x)$ равна нулю.

1.2. *Лорановы и регулярные решения уравнений*

Решение дифференциального уравнения (2), являющееся формальным лорановым рядом, называется *лорановым.*

Регулярное решение имеет вид

$$y(x) = x^\lambda w(x),$$

где $\lambda \in K$, $w(x) \in K((x))[\ln x]$. Каждое такое решение записывается как

$$x^\lambda \sum_{s=0}^{m} w_s(x) \ln^s x, \qquad (3)$$

где $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $w_s(x) \in K((x))$, $s = 0, 1, \ldots, m$.

*Частичная поддержка РФФИ, грант 19-01-00032.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Усеченные (или укороченные) ряды в роли коэффициентов уравнений различного вида представляют как теоретический, так и практический интерес и являются предметом различного рода исследований (см., например, [1], [2]). В [3]–[7] мы рассматривали линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с коэффициентами, заданными в виде усеченных степенных рядов. Обсуждался вопрос о том, что можно узнать из представленных таким образом уравнений об их лорановых и регулярных решениях. Нас интересовало нахождение максимально возможного числа таких коэффициентов рядов в решениях, которые являются инвариантными относительно различных возможных продолжений заданного усеченного уравнения. *Продолжение* усеченного ряда — это ряд, возможно также усеченный, начальные члены которого совпадают с известными начальными членами исходного усеченного ряда; соответственно, продолжением усеченного уравнения назовем уравнение, коэффициенты которого являются продолжениями коэффициентов исходного уравнения.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение:

$$\begin{aligned}&\left(-1+x+O(x^3)\right)\theta^2 y(x)+\\&\quad+\left(-2+x+O(x^3)\right)\theta y(x)+O(x^3)\,y(x)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

С помощью алгоритма из [3], [4] мы получаем, что любое уравнение вида (2), т.е. уравнение с полностью заданными коэффициентами, которое является продолжением уравнения (4), имеет лорановы решения с валюациями -2 и 0. Более того, для любого продолжения уравнения любое его лораново решение с валюацией -2 является продолжением усеченного ряда

$$\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{2\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)\tag{5}$$

для некоторых $\_c_1, \_c_2 \in K$, где $\_c_1 \neq 0$. Также для любого продолжения уравнения (4) любое его лораново решение с валюацией 0 является продолжением усеченного ряда

$$\_c_2+O(x^3)\tag{6}$$

для некоторого $\_c_2 \in K$, где $\_c_2 \neq 0$. Выражения (5) и (6) мы называем *усеченными лорановыми решениями* уравнения (4). Алгоритм из [3], [4] позволяет построить усеченные лорановы решения максимально возможной степени усечения. Для уравнения (4) для решений с валюацией -2 максимально возможная степень усечения равна 0, а для решений с валюацией 0 равна 2. Далее под усеченными решениями мы будем понимать решения с максимально возможной степенью усечения.

Двумя разными продолжениями уравнения (4), например, являются:

$$\begin{aligned}&\left(-1+x-\mathbf{x^3}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4})\right)\theta^2 y(x)+\\&\quad+\left(-2+x-\mathbf{x^3}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4})\right)\theta y(x)+\\&\quad\quad+\left(-\mathbf{x^3}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4})\right)y(x)=0\end{aligned}\tag{7}$$

и

$$\begin{aligned}&\left(-1+x+\mathbf{x^3}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4})\right)\theta^2 y(x)+\\&\quad+\left(-2+x+\mathbf{x^3}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4})\right)\theta y(x)+\\&\quad\quad+\left(\mathbf{x^3}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4})\right)y(x)=0\end{aligned}\tag{8}$$

(здесь и далее с помощью жирного шрифта выделяются дополнительные члены продолжения). Усеченные лорановы решения уравнения (7):

$$\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{2\_c_1}{x}+\_c_2-\_\mathbf{c_1 x}+\mathbf{O}(\mathbf{x^2}),$$

$$\_c_2-\frac{\_\mathbf{c_2 x^3}}{\mathbf{15}}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4}).$$

Усеченные лорановы решения уравнения (8):

$$\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{2\_c_1}{x}+\_c_2+\_\mathbf{c_1 x}+\mathbf{O}(\mathbf{x^2}),$$

$$\_c_2+\frac{\_\mathbf{c_2 x^3}}{\mathbf{15}}+\mathbf{O}(\mathbf{x^4}).$$

Видно, что (5) и (6) являются усеченными решениями уравнения (4), максимально возможной степени усечения: решения уравнений (7) и (8) показывают, что коэффициенты дополнительных членов решений зависят от дополнительных членов в коэффициентах продолжений исходного уравнения.

Алгоритмы построения усеченных лорановых и регулярных решений были представлены в упомянутых работах. Другими словами, представленные алгоритмы обеспечивают исчерпывающее использование информации о заданном уравнении. В качестве инструмента реализации была выбрана система компьютерной алгебры Maple [8].

В настоящей статье мы интересуемся вопросом автоматического подтверждения такого исчерпывающего использования информации о заданном уравнении, то есть подтверждением того, что невозможно добавить дополнительные члены к построенным усеченным решениям так, что они будут инвариантны относительно всех продолжений заданного уравнения. Чтобы подтвердить это, достаточно продемонстрировать контрпример с двумя различными продолжениями заданного уравнения, которые приводят к появлению различных дополнительных членов в решениях.

Предварительные результаты этой работы были представлены в [9].

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Процедуры основаны на поиске лорановых и регулярных решений с *литералами*, то есть с символьными обозначениями, используемыми для представления незаданных коэффициентов ряда, входящего в уравнения (см. [5]). Эти символы обозначают коэффициенты при членах ряда, степени которых больше степени усечения ряда. Поиск решений с помощью литералов означает выражение последующих (неинвариантных для всех возможных продолжений) членов ряда в решении как формулы, содержащие литералы, то есть через незаданные коэффициенты. Это позволяет прояснить влияние незаданных коэффициентов на последующие члены рядов в решении.

Решения уравнения (4) с литералами имеют вид

$$\frac{\_c_1}{x^2} - \frac{2\_c_1}{x} + \_c_2 + \left(\frac{1}{3}U_{0,3} - \frac{2}{3}U_{1,3} + \frac{4}{3}U_{2,3}\right)\_c_1 x + O(x^2),$$
$$\_c_2 + \frac{U_{0,3}}{15}\_c_2 x^3 + O(x^4), \quad (9)$$

где символьные обозначения $U_{i,j}$ — литералы, соответствующие незаданным коэффициентам при x^j в степенном ряду, являющемся коэффициентом уравнения при $\theta^i y(x)$. В общем случае коэффициенты решений, являющиеся неинвариантными продолжениями построенных усеченных решений, выражаются в виде полиномов от литералов.

Лемма 1 *Для любых $p_i(x_1, \ldots, x_l) \in K[x_1, \ldots, x_l] \setminus K$, $i = 1, \ldots, m$, найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in K$, для которых $p_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \neq p_i(\beta_1, \ldots, \beta_l)$, $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Вначале индукцией по n покажем, что для любого полинома $P(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus K$, $n \geq 1$, найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, при которых $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. Для $n = 1$ утверждение очевидно, поскольку $P(x_1)$ имеет конечное число корней, а поле K бесконечно. Пусть $n > 1$ и утверждение справедливо для $1, \ldots, n-1$. Запишем $P(x_1, \ldots, x_n)$ как полином от x_n и пусть $q(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — какой-то из ненулевых коэффициентов этого полинома. По предположению индукции найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$, что $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$. Следовательно, $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x_n)$ является ненулевым полиномом от x_n. Согласно основанию индукции (случай одной переменной), найдется подходящее α_n.

Рассмотрим теперь ненулевой полином $P(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{2l})$, равный произведению полиномов $p_i(x_1, \ldots, x_l) - p_i(x_{l+1}, \ldots, x_{2l})$, $i = 1, \ldots, m$ (полином $p_i(x_{l+1}, \ldots, x_{2l})$ получен простой заменой переменных $x_1, \ldots, x_l$ новыми переменными $x_{l+1}, \ldots, x_{2l}$). По доказанному выше существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2l} \in K$ такие, что $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2l}) \neq 0$. Можем оставить без изменения $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ и положить $\beta_1 = \alpha_{l+1}, \ldots, \beta_l = \alpha_{2l}$. $\square$

Из леммы 1 получаем следующую теорему, которая дает обоснование алгоритма, предназначенного для подтверждения исчерпывающего использования информации, содержащейся в уравнении с усеченными коэффициентами. Сам этот алгоритм исходит из построения решений с литералами.

Теорема 1 *Пусть решения уравнения (1) содержат m усеченных степенных рядов $c_{i0} + c_{i1}x + \cdots + c_{ik_i}x^{k_i} + p_i(u_1, \ldots, u_l)x^{k_i+1} + O(x^{k_i+2})$, $1 \leq i \leq m$, где $u_1, \ldots, u_l$ — литералы (незаданные коэффициенты степенных рядов-коэффициентов уравнения). Тогда найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in K$ такие, что два различных продолжения уравнения, соответствующие подстановкам $u_j = \alpha_j$, $u_j = \beta_j$, $j = 1, \ldots, l$, приводят к появлению различных дополнительных членов в усеченных рядах, входящих в решения, что служит подтверждением исчерпывающего использования информации, содержащейся в усеченных коэффициентах уравнения (1).*

Для решений с литералами (9) уравнения (4) первые неинвариантные коэффициенты рядов задаются выражениями

$$\left(\frac{1}{3}U_{0,3} - \frac{2}{3}U_{1,3} + \frac{4}{3}U_{2,3}\right)\_c_1, \quad (10)$$

$$\frac{U_{0,3}}{15}\_c_2. \quad (11)$$

В данном случае решения содержат два усеченных ряда и нам требуется определить такие различные значения всех литералов $U_{0,3}$, $U_{1,3}$ и $U_{2,3}$, что значения каждого выражения (10) и (11) не будут совпадать при этих различных значениях литералов. Согласно теореме 1 такие значения существуют. В частности, $U_{0,3} = -1$, $U_{1,3} = -1$ и $U_{2,3} = -1$ соответствует уравнению (7), а $U_{0,3} = 1$, $U_{1,3} = 1$ и $U_{2,3} = 1$ — уравнению (8). Отметим, что выбор, например, $U_{0,3} = -1$, $U_{1,3} = 1$, $U_{2,3} = 1$ и $U_{0,3} = 1$, $U_{1,3} = -2$, $U_{2,3} = -1$ также даст различные продолжения уравнения (4), но с одинаковыми продолжениями решения с валюацией -2, поскольку выражение (10) будет иметь одинаковое значение $\frac{1}{3}$ для этих двух разных пар значений литералов. Выражение (11) для этих двух разных пар значений будет иметь разные значения, и, соответственно, продолжения решения для валюации 0 будут различны. Несмотря на это, указанные пары различных значений не будут задавать контрпример, поскольку необходимо, чтобы все содержащиеся в решениях ряды имели различные продолжения, иначе остается неподтвержденным, что информация уравнения была использована полностью.

4. СЛУЧАЙ ИЗМЕНЕНИЯ СТЕПЕНИ $\ln x$ В РЕШЕНИЯХ

Алгоритмы поиска усеченных решений, рассмотренные нами ранее в [3]–[7], строят только те усеченные решения, для которых инвариантна степень вхождения $\ln x$. Например, для уравнения

$$\left(-1+x+O(x^2)\right)\theta^2 y(x)+ \\ +\left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta y(x)+O(x^4)y(x)=0 \quad (12)$$

любое его продолжение с полностью заданными коэффициентами имеет регулярные решения с валюациями -2 и 0. Однако, для некоторых продолжений уравнения (12) все регулярные решения являются лорановыми, тогда как для других регулярные решения с валюацией -2 имеют вид (3) с $m=1$ и $w_1(x)\neq 0$, т.е. лорановыми не являются.

Согласно [6, замечание 5], при вычислении усеченных решений формируется конечное множество полиномов от литералов. Каждый полином P из этого множества имеет коэффициенты в виде линейных комбинаций над K произвольных постоянных $\_c_1,\ldots,\_c_r$, введенных в процессе построения усеченных решений. Например, для уравнения (12) получаем

$$P=4\,U_{2,2}\,\_c_1-6\_c_1.$$

Согласно алгоритму построения регулярных решений из [6], значения литералов, при которых эти полиномы тождественно обращаются в ноль, определяют продолжения уравнения такие, что для них степень вхождения $\ln x$ в регулярные решения меньше, чем для тех продолжений, для которых некоторые P не обращаются тождественно в ноль.

Автоматическое предоставление таких продолжений также демонстрирует исчерпывающее использование информации о заданном усеченном уравнении. Отметим, что не каждое усеченное уравнение имеет продолжения, отличающиеся степенью вхождения $\ln x$ в регулярные решения. Контрпримеры для уравнения (12) и их усеченные решения даны в разделе 5.3 в примере 6.

5. РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕРЫ

Мы представляем реализованные нами процедуры для поиска продолжений-контрпримеров. Подтверждение исчерпывающего использования информации об уравнении с усеченными степенными коэффициентами в найденных усеченных решениях выполнено в виде процедуры `ExhaustiveUseConfirmation`, реализованной с использованием инструментов системы компьютерной алгебры Maple [8]. Также реализованы дополнительные процедуры `DifferentProlongationExtras`, `ConstructProlongation`, `DifferentLnDegreeExtras`, назначение которых будет проиллюстрировано на примерах в этом разделе. Процедуры встроены в пакет `TruncatedSeries` [10]–[12], в котором ранее были реализованы наши алгоритмы из [3]–[7].

5.1. *Лорановы решения*

Пример 1 Рассмотрим следующее уравнение с коэффициентами в виде усеченных рядов и построим его лораново решение, используя пакет `TruncatedSeries`:

```
> eq := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)+
        (-2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
        (x+6*x^2+O(x^4))*y(x);
```

$$eq := \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2) \\ +\left(-2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1) \\ +\left(x+6x^2+O(x^4)\right)y(x)$$

```
> sol := TruncatedSeries:-
          LaurentSolution(eq,y(x));
```

$$sol := \left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{5\_c_1}{x}+\_c_2+O(x), \\ \_c_2+\frac{x\_c_2}{3}+\frac{5x^2\_c_2}{6}+\frac{13x^3\_c_2}{30}+O(x^4)\right]$$

Вызов процедуры `ExhaustiveUseConfirmation` (используется опция `‘laurent‘`, указывающая, что требуется результат для лорановых решений) подтверждает исчерпывающее использование информации о данном уравнении, представляя два разных продолжения уравнения, которые приводят к двум различным продолжениям решений. Процедура печатает текстовые пояснения на английском языке с подробностями про эти два различных продолжения уравнения (“Equation prolongation #1” и “Equation prolongation #2”) и про их решения (“The equation solution”). Показано, что представленные продолжения уравнения имеют различные дополнительные члены (“Additional term(s) in the equation prolonagation”), что решения обоих продолжений уравнения являются разными продолжениями решения заданного уравнения с разными дополнительными членами в этих решениях (“Additional term(s) in the equation solution”).

```
> TruncatedSeries:-
   ExhaustiveUseConfirmation(sol,eq,y(x),
                                 ‘laurent‘);

   Equation prolongation #1
```

$$\left(-1+x+x^2-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,2) \\ +\left(-2-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1) \\ +\left(x+6x^2-x^4+O(x^5)\right)y(x)$$

Additional term(s) in the equation prolongation:

$$y(x)(-x^4+O(x^5))+\theta(y(x),x,1)(-x^3+O(x^4))$$
$$+\theta(y(x),x,2)(-x^3+O(x^4))$$

The equation solution:

$$\left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{5\_c_1}{x}+\_c_2+x\left(\frac{\_c_2}{3}-\frac{37\_c_1}{3}\right)+O(x^2),\right.$$
$$\_c_2+\frac{x\_c_2}{3}+\frac{5x^2\_c_2}{6}+\frac{13x^3\_c_2}{30}$$
$$\left.+\frac{11x^4\_c_2}{24}+O(x^5)\right]$$

Additional term(s) in the equation solution:

$$\left[x\left(\frac{\_c_2}{3}-\frac{37\_c_1}{3}\right)+O(x^2),\frac{11x^4\_c_2}{24}+O(x^5)\right]$$

```
Equation prolongation #2
```

$$\left(-1+x+x^2+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,2)$$
$$+\left(-2+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1)$$
$$+\left(x+6x^2+x^4+O(x^5)\right)y(x)$$

Additional term(s) in the equation prolongation:

$$y(x)(x^4+O(x^5))+\theta(y(x),x,1)(x^3+O(x^4))$$
$$+\theta(y(x),x,2)(x^3+O(x^4))$$

The equation solution:

$$\left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{5\_c_1}{x}+\_c_2+x\left(\frac{\_c_2}{3}-11\_c_1\right)+O(x^2),\right.$$
$$\_c_2+\frac{x\_c_2}{3}+\frac{5x^2\_c_2}{6}+\frac{13x^3\_c_2}{30}$$
$$\left.+\frac{43x^4\_c_2}{72}+O(x^5)\right]$$

Additional term(s) in the equation solution:

$$\left[x\left(\frac{\_c_2}{3}-11\_c_1\right)+O(x^2),\frac{43x^4\_c_2}{72}+O(x^5)\right]$$

Пример 2 Рассмотрим еще одно продолжение данного уравнения с другими дополнительные членами (используется вспомогательная процедура `ConstructProlongation`) и построим его лорановы решения:

```
> eq1 := TruncatedSeries:-
          ConstructProlongation(
           theta(y(x),x,1)*(x^3+O(x^4)),
           eq,y(x));
```

$$eq1 := \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)$$
$$+\left(-2+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1)$$
$$+\left(x+6x^2+O(x^4)\right)y(x)$$

```
> TruncatedSeries:-LaurentSolution(eq1,y(x));
```

$$\left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{5\_c_1}{x}+\_c_2+O(x),\right.$$
$$\left.\_c_2+\frac{x\_c_2}{3}+\frac{5x^2\_c_2}{6}+\frac{13x^3\_c_2}{30}+O(x^4)\right]$$

Решение совпало с решением заданного уравнения `eq`. Это показывает, что для подтверждения исчерпывающего использования информации о заданном уравнении недостаточно просто построить решения двух случайных различных продолжений. Информация, предоставленная дополнительными членами в случайном продолжении, не обязательно приводит к появлению каких-либо дополнительных членов в решениях уравнения, поэтому такое продолжение не может быть использовано в качестве искомого контрпримера.

Пример 3 Рассмотрим еще одно уравнение и построим его лорановы решения:

```
> eq := (x + O(x^2))*theta(y(x), x, 1) +
      O(x^2)*y(x);
```

$$eq := \left(x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^2)y(x)$$

```
> sol := TruncatedSeries:-
         LaurentSolution(eq,y(x));
```

$$sol := [\_c_1+O(x)]$$

Вместо того, чтобы использовать процедуру `ExhaustiveUseConfirmation`, проверку исчерпывающего использования информации о данном уравнении можно провести пошагово, используя две дополнительные вспомогательные процедуры. Этот способ может быть лучше, чем использование текстовых пояснений, которые печатаются процедурой `ExhaustiveUseConfirmation`, в тех случая, когда, например, подробности контрпримера необходимы в некоторой последующей алгоритмической обработке.

На первом шаге вызов процедуры `DifferentProlongationExtras` (вновь используется опция `‘laurent‘`, указывающая, что требуется результат для лорановых решений) дает два разных варианта дополнительных членов для построения двух разных продолжений заданного уравнения:

```
> dp := TruncatedSeries:-
        DifferentProlongationExtras(eq,y(x),
                                  ‘laurent‘);
```

$$dp := \left[y(x)\left(-x^2+O(x^3)\right), y(x)\left(x^2+O(x^3)\right)\right]$$

На втором шаге дважды применяется процедура `ConstructProlongation` для того, чтобы построить эти два разных продолжения заданного уравнения:

```
> eq1 := TruncatedSeries:-
         ConstructProlongation(dp[1],eq,y(x));
```

$$eq1 := \left(x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1)+y(x)\left(-x^2+O(x^3)\right)$$

```
> eq2 := TruncatedSeries:-
         ConstructProlongation(dp[2],eq,y(x));
```

$$eq2 := \left(x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,1)+y(x)\left(x^2+O(x^3)\right)$$

И на третьем шаге строятся лорановы решения каждого продолжения заданного уравнения:

```
> sol1 := TruncatedSeries:-
          LaurentSolution(eq1,y(x));
```

$$sol1 := \left[\_c_1 + x\_c_1 + O(x^2)\right]$$

```
> sol2 := TruncatedSeries:-
          LaurentSolution(eq2,y(x));
```

$$sol2 := \left[\_c_1 - x\_c_1 + O(x^2)\right]$$

Разные продолжения уравнения приводят к двум различным продолжениям решения.

5.2. *Регулярные решения*

Пример 4 Рассмотрим следующее уравнение и построим его регулярные решения:

```
> eq := (-1+x+x^2+O(x^3))*theta(y(x), x, 2)+
        (-2 + x^2 + O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
        O(x^4)*y(x)
```

$$eq := \left(-1+x+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^4)y(x)$$

```
> sol := TruncatedSeries:-
         RegularSolution(eq,y(x));
```

$$sol := \left[-\frac{\_c_1}{x^2}+\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)+\ln(x)\left(\_c_1+O(x^4)\right), \_c_2+O(x^4)\right]$$

Выполним пошаговую проверку исчерпывающего использования информации о данном уравнении, как в примере 3.

Вызов процедуры `DifferentProlongationExtras` (здесь используется опция `'regular'`, указывающая, что требуется результат для регулярных решений) дает два разных варианта дополнительных членов для построения двух разных продолжений заданного уравнения:

```
> dp := TruncatedSeries:-
        DifferentProlongationExtras(eq,y(x),
                                  'regular');
```

$$dp := \left[y(x)\left(-x^4+O(x^5)\right)+\theta(y(x),x,2)\left(-x^3+O(x^4)\right) +\theta(y(x),x,1)\left(-x^3+O(x^4)\right), y(x)\left(x^4+O(x^5)\right)+\theta(y(x),x,2)\left(x^3+O(x^4)\right) +\theta(y(x),x,1)\left(x^3+O(x^4)\right)\right]$$

Применяем процедуру `ConstructProlongation` для того, чтобы построить эти два разных продолжения уравнения:

```
> eq1 := TruncatedSeries:-
         ConstructProlongation(dp[1],eq,y(x));
```

$$eq1 := \left(-1+x+x^2-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(-2+x^2-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1) + \left(-x^4+O(x^5)\right)y(x)$$

```
> eq2 := TruncatedSeries:-
         ConstructProlongation(dp[2],eq,y(x));
```

$$eq2 := \left(-1+x+x^2+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(-2+x^2+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1) + \left(x^4+O(x^5)\right)y(x)$$

Строим регулярные решения каждого продолжения заданного уравнения:

```
> sol1 := TruncatedSeries:-
          RegularSolution(eq1,y(x));
```

$$sol1 := \left[-\frac{\_c_1}{x^2}+\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2+\frac{2\_c_1 x}{3}+O(x^2) +\ln(x)\left(\_c_1-\frac{x^4\_c_1}{24}+O(x^5)\right), \_c_2-\frac{x^4\_c_1}{24}+O(x^5)\right]$$

```
> sol2 := TruncatedSeries:-
          RegularSolution(eq2,y(x));
```

$$sol2 := \left[-\frac{\_c_1}{x^2}+\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2-\frac{2\_c_1 x}{3}+O(x^2) +\ln(x)\left(\_c_1+\frac{x^4\_c_1}{24}+O(x^5)\right), \_c_2+\frac{x^4\_c_1}{24}+O(x^5)\right]$$

Разные продолжения уравнения приводят к двум различным продолжениям решения.

Пример 5 Рассмотрим еще одно уравнение и построим его регулярные решения:

```
> eq := (1+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,3)+
        (4-x+1/2*x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,2)
        +(4-2*x+x^2+O(x^3))*theta(y(x),x,1)
        +O(x^3)*y(x);
```

$$eq := \left(x^2+1+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,3) + \left(4-x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(x^2-2x+4+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^3)y(x)$$

```
> sol := TruncatedSeries:-
         RegularSolution(eq,y(x));
```

$$sol := \left[\frac{\frac{21\_c_1}{16}+\frac{\_c_2}{2}}{x^2}+\frac{\_c_1}{x}+\_c_3+O(x) + \ln(x)\left(\frac{\_c_1}{2x^2}+\_c_2+O(x)\right)+\ln(x)^2\left(\frac{\_c_1}{2}+O(x^3)\right),\right.$$
$$\left.\frac{\_c_2}{2x^2}+\_c_3+O(x)+\ln(x)\left(\_c_2+O(x^3)\right),\ \_c_3+O(x^3)\right]$$

Вызов процедуры `ExhaustiveUseConfirmation` (снова используется опция **`‘regular‘`**, указывающая, что требуется результат для регулярных решений) подтверждает исчерпывающее использование информации о данном уравнении. Процедура печатает текстовые пояснения на английском языке аналогично тому, как это описано в примере 1.

```
> TruncatedSeries:-
   ExhaustiveUseConfirmation(sol,eq,y(x),
                                  ‘regular‘);
```

```
Equation prolongation #1
```

$$\left(x^2+1-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,3) + \left(4-x+\frac{x^2}{2}-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(x^2-2x+4-x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1) + (-x^3+O(x^4))y(x)$$

Additional term(s) in the equation prolongation:

$$\theta(y(x),x,3)(-x^3+O(x^4))+\theta(y(x),x,2)(-x^3+O(x^4)) + \theta(y(x),x,1)(-x^3+O(x^4))+y(x)(-x^3+O(x^4))$$

The equation solution:

$$\left[\frac{\frac{21\_c_1}{16}+\frac{\_c_2}{2}}{x^2}+\frac{\_c_1}{x}+\_c_3+\frac{61\_c_1x}{432}-\frac{\_c_2x}{18}+O(x^2) + \ln(x)\left(\frac{\_c_1}{2x^2}+\_c_2-\frac{\_c_1x}{18}+O(x^2)\right) + \ln(x)^2\left(\frac{\_c_1}{2}+x^3\frac{\_c_1}{150}+O(x^4)\right),\right.$$
$$\frac{\_c_2}{2x^2}+\_c_3-\frac{\_c_2x}{18}+O(x^2) + \ln(x)\left(\_c_2+\frac{x^3\_c_2}{75}+O(x^4)\right),$$
$$\left.\_c_3+\frac{x^3\_c_3}{75}+O(x^4)\right]$$

Additional term(s) in the equation solution:

$$\left[\left(x^3\frac{\_c_1}{150}+O(x^4)\right)\ln(x)^2+\left(-\frac{\_c_1x}{18}+O(x^2)\right)\ln(x) + \frac{61\_c_1x}{432}-\frac{\_c_2x}{18}+O(x^2),\right.$$
$$\left(\frac{x^3\_c_2}{75}+O(x^4)\right)\ln(x)-\frac{\_c_2x}{18}+O(x^2),$$
$$\left.\frac{x^3\_c_3}{75}+O(x^4)\right]$$

```
Equation prolongation #2
```

$$\left(x^2+1+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,3) + \left(4-x+\frac{x^2}{2}+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,2) + \left(x^2-2x+4+x^3+O(x^4)\right)\theta(y(x),x,1) + (x^3+O(x^4))y(x)$$

Additional term(s) in the equation prolongation:

$$\theta(y(x),x,3)(x^3+O(x^4))+\theta(y(x),x,2)(x^3+O(x^4)) + \theta(y(x),x,1)(x^3+O(x^4))+y(x)(x^3+O(x^4))$$

The equation solution:

$$\left[\frac{\frac{21\_c_1}{16}+\frac{\_c_2}{2}}{x^2}+\frac{\_c_1}{x}+\_c_3-\frac{\left(\frac{1175\_c_1}{24}-75\_c_2\right)x}{150}+O(x^2) + \ln(x)\left(\frac{\_c_1}{2x^2}+\_c_2+\frac{\_c_1x}{2}+O(x^2)\right) + \ln(x)^2\left(\frac{\_c_1}{2}-\frac{x^3\_c_1}{150}+O(x^4)\right),\right.$$
$$\frac{\_c_2}{2x^2}+\_c_3+\frac{\_c_2x}{2}+O(x^2) + \ln(x)\left(\_c_2-\frac{x^3\_c_2}{75}+O(x^4)\right),$$
$$\left.\_c_3-\frac{x^3\_c_3}{75}+O(x^4)\right]$$

Additional term(s) in the equation solution:

$$\left[\left(-\frac{x^3\_c_1}{150}+O(x^4)\right)\ln(x)^2+\left(O(x^2)+\frac{\_c_1 x}{2}\right)\ln(x)\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1175\_c_1}{24}-75\_c_2\right)x}{150}+O(x^2),$$

$$\left(-\frac{x^3\_c_2}{75}+O(x^4)\right)\ln(x)+\frac{\_c_2 x}{2}+O(x^2),$$

$$\left.-\frac{x^3\_c_3}{75}+O(x^4)\right]$$

5.3. *Изменение степени вхождения* $\ln x$ *в решение*

Пример 6 Построим регулярные решения следующего уравнения:

```
> eq := (-1+x+O(x^2))*theta(y(x), x, 2)+
       (-2 + x^2 + O(x^3))*theta(y(x),x,1)+
       O(x^4)*y(x)
```

$$eq := \left(-1+x+O(x^2)\right)\theta(y(x),x,2)$$
$$+\left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^4)y(x)$$

```
> sol := TruncatedSeries:-
        RegularSolution(eq,y(x));
```

$$sol := \left[\_c_1+O(x^4)\right]$$

Видим, что в данном случае построены усеченные регулярные решения, которые являются лорановыми и имеют валюацию 0. Вычислим продолжения, имеющие регулярные решения с разной степенью вхождения $\ln x$, с помощью процедуры `DifferentLnDegreeExtras`:

```
> dp := TruncatedSeries:-
       DifferentLnDegreeExtras(eq,y(x));
```

$$dp := \left[\theta(y(x),x,2)\left(\frac{3}{2}x^2+O(x^3)\right),\right.$$

$$\left.\theta(y(x),x,2)\left(2x^2+O(x^3)\right)\right]$$

Применяем процедуру `ConstructProlongation` для того, чтобы построить эти два разных продолжения уравнения:

```
> eq1 := TruncatedSeries:-
        ConstructProlongation(dp[1],eq,y(x));
```

$$eq1 := \left(-1+x+\frac{3}{2}x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)$$
$$+\left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^4)y(x)$$

```
> eq2 := TruncatedSeries:-
        ConstructProlongation(dp[2],eq,y(x));
```

$$eq2 := \left(-1+x+2x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,2)$$
$$+\left(-2+x^2+O(x^3)\right)\theta(y(x),x,1)+O(x^4)y(x)$$

Строим регулярные решения каждого продолжения заданного уравнения:

```
> sol1 := TruncatedSeries:-
         RegularSolution(eq1,y(x));
```

$$sol1 := \left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2+O(x),\ \_c_2+O(x^4)\right]$$

```
> sol2 := TruncatedSeries:-
         RegularSolution(eq2,y(x));
```

$$sol2 := \left[\frac{\_c_1}{x^2}-\frac{4\_c_1}{x}+\_c_2+O(x)+\ln(x)\left(\_c_1+O(x^4)\right),\right.$$

$$\left.\_c_2+O(x^4)\right]$$

Для первого продолжения уравнения все решения являются лорановыми, кроме лорановых решений с валюацией 0 построены лорановы решения с валюацией -2. Для второго продолжения решениях с валюацией -2 являются регулярными и содержат $\ln x$.

Авторы благодарят М.Петковшека (университет Любляны, Словения) за полезные советы, а также компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи математических наук. 2004. Том 59. Выпуск 3(357). С. 31–80.

2. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Pfluegel E.* Higher-order linear differential systems with truncated coefficients // In Proc. of CASC'2011. 2011. P. 10–24.

3. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.

4. *Abramov S.A, Khmelnov D.E., Ryabenko A.A.* Laurent solutions of linear ordinary differential equations with coefficients in the form of truncated power series// Материалы 3-й международной конференции "Компьютерная алгебра", М: Российск. ун-т дружбы народов. 2019. С. 75–82.

5. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов // Труды ИСП РАН. 2019. Т. 31. № 5. С. 233–248.

6. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 4–17.

7. *Abramov S.A., Khmelnov D.E., Ryabenko A.A.* Truncated and infinite power series in the role of coefficients of linear ordinary differential equations // Lecture Notes in Computer Science. 2020. Vol. 12291. P. 63–76.

8. Maple online help // http://www.maplesoft.com/support/help/

9. *Khmelnov D.E., Ryabenko A.A., Abramov S.A.* Automatic confirmation of exhaustive use of information on a given equation // Материалы 4-й международной конференции “Компьютерная алгебра”, М: ООО МАКС Пресс. 2021. С. 69–72.

10. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска усеченных решений линейных дифференциальных уравнений с бесконечными и усеченными степенными рядами в роли коэффициентов // Программирование. 2021. № 2. С. 56-65.

11. *Abramov S.A., Khmelnov D.E., Ryabenko A.A.* The TruncatedSeries package for solving linear ordinary differential equations having truncated series coefficients // In: Maple in Mathematics Education and Research, Springer Nature Switzerland. 2021. P. 19–33.

12. Страница пакета `TruncatedSeries` // http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries

EXHAUSTIVE USE OF INFORMATION ON AN EQUATION WITH TRUNCATED COEFFICIENTS

S.A. Abramov, A.A. Ryabenko, and D.E. Khmelnov

Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences,

ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russia

E-mail: sergeyabramov@mail.ru, anna.ryabenko@gmail.com, dennis_khmelnov@mail.ru

Algorithms were previously proposed that allow one to find truncated Laurent solutions to linear differential equations with coefficients in the form of truncated formal power series. Below are suggested some automatic means of confirming the impossibility of obtaining a larger number of terms of such solutions without some additional information on a given equation. The confirmation has the form of a counterexample to the assumption about the possibility of obtaining some additional terms of the solution.