Определяющие рациональные функции линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами*

С. А. Абрамов,   А. А. Рябенко
Вычислительный центр РАН
Москва, 119991, ГСП-1, ул. Вавилова, 40
sabramov@ccas.ru, ryabenko@cs.msu.ru

Аннотация

Для обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и полиномиальными правыми частями вводится понятие определяющей рациональной функции и приводятся алгоритмы ее построения.

1 Введение

Известно, что аналитическое решение дифференциального уравнения

$$a_d(x)y^{(d)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_d(x)$ суть полиномы над полем комплексных чисел, может иметь особенность, в частности — полюс, в точке α только в том случае, если $a_d(\alpha) = 0$ (предполагается, что $a_d(x)$ не является нулевым полиномом). Нижнюю границу порядка полюса можно получить, найдя наименьший целый корень определяющего уравнения, которое является алгебраическим уравнением степени, не превосходящей d, сопоставляемым уравнению (1) и точке α (см. [5, 6]). Если у определяющего уравнения нет целых корней, то у уравнения (1) нет таких ненулевых решений, которые либо регулярны, либо имеют полюс в α. Предположим, что каждое из определяющих уравнений, соответствующих корням полинома $a_d(x)$, имеет целые корни. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ суть все комплексные корни полинома $a_d(x)$, и $l_0, l_1, \dots, l_k$ — наименьшие целые корни соответствующих определяющих уравнений (которые могут быть произвольными — не обязательно отрицательными — целыми числами). Тогда любое мероморфное во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ решение уравнения (1) может быть представлено как произведение рациональной функции

$$V(x) = (x - \alpha_0)^{l_0}(x - \alpha_1)^{l_1} \dots (x - \alpha_k)^{l_k} \tag{2}$$

на некоторую целую функцию; $V(x)$ названа в этой статье определяющей рациональной функцией уравнения (1).

Задача распознавания существования определяющей рациональной функции для (1) и построения этой функции в случае ее существования может быть рассмотрена применительно к (1) и в том случае, когда $a_0(x), a_1(x), \dots, a_d(x)$ являются полиномами над

*Частичная поддержка РФФИ, грант 07-01-00482-а.

произвольным полем K характеристики 0, в этом случае $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ принадлежат полю разложения K' коэффициента $a_d(x)$. Подстановка

$$y(x) = u(x)V(x), \tag{3}$$

где $V(x)$ — определяющая рациональная функция, $u(x)$ — новая неизвестная функция, сводит задачу поиска рациональных решений уравнения (1) к задаче поиска полиномиальных решений.

В разделе 3 мы распространяем понятие определяющей рациональной функции на случай неоднородного линейного уравнения с коэффициентами и правой частью, принадлежащими $K[x]$.

В разделе 4 в предложении 6 показывается, что определяющая рациональная функция в известном смысле представляет собой оптимальный вариант рационального множителя для подстановки, сводящей поиск рациональных решений к поиску полиномиальных решений (алгоритм, позволяющий строить рациональный множитель такого рода для разностного случая, был предложен в [8]; алгоритмы более простые, но дающие более грубые рациональные множители, для разностного случая ранее предлагались в [2], [3]).

В [11] описано, как, основываясь на разложении $a_d(x)$ на неприводимые над K множители и используя p-адические разложения рациональных функций, рациональная функция вида

$$\tilde{V}(x) = (x - \alpha_0)^{m_0}(x - \alpha_1)^{m_1} \ldots (x - \alpha_k)^{m_k}, \tag{4}$$

где $m_0 \leqslant l_0, m_1 \leqslant l_1, \ldots, m_k \leqslant l_k$, может быть построена без вычислений в алгебраических расширениях поля K. При этом получаемая функция имеет вид $\frac{1}{v(x)}$, где $v(x)$ — полином. То полезное для последующих вычислений обстоятельство, что некоторые из неприводимых множителей полинома $a_d(x)$ можно включить в рациональную функцию $\tilde{V}(x)$ с положительным показателем степени, не используется алгоритмом из [11]. В разделе 5 нашей статьи мы описываем в элементарных терминах основанный на полной факторизации $a_d(x)$ алгоритм построения определяющей рациональной функции $V(x)$ — несколько измененный вариант алгоритма из [11].

Предложенный в [2] алгоритм, который также позволяет получать некоторую рациональную функцию вида (4), был основан на вычислении наибольших общих делителей и результантов полиномов над K без использования полной факторизации полиномов и вычисления корней $a_d(x)$. В сообщении [4] указывалось, что алгоритм из [2] можно усовершенствовать так, что результатом его работы всегда будет определяющая функция (2). Подстановка (3) с определяющей $V(x)$ сводит поиск рациональных решений к поиску полиномиальных решений, имеющих в общем случае меньшие степени, чем при использовании $\tilde{V}(x)$. В разделе 6 настоящей статьи детально описана эта усовершенствованная версия алгоритма из [2].

Уточним, что как алгоритмы из [11, 2], так и новые алгоритмы, используют нахождение целых корней полиномов из $K[x]$.

В разделе 7 обсуждается реализация алгоритмов из разделов 5 и 6 в среде Maple, а также демонстрируются результаты некоторых экспериментов.

Статья носит в какой-то мере обзорный характер, и часть текста представляет собой сжатое изложение нескольких лекций спецкурса, читаемого первым автором студентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова. При этом к новым результатам можно отнести предложение 6, процедуру подразбиения из раздела 6 и описанную в разделе 7 реализацию ряда алгоритмов.

2 Определяющие уравнения

Для введения понятий определяющего уравнения и определяющей рациональной функции нам будет удобно использовать формальные ряды. Если K — некоторое поле, то, как обычно, через $K[[x]]$ обозначается кольцо формальных степенных (тейлоровых) рядов над K, т.е. рядов вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

$c_0, c_1, c_2, \dots \in K$. Поле отношений этого кольца, обозначаемое через $K((x))$, есть поле (лорановых) рядов вида

$$c_m x^m + c_{m+1} x^{n+1} + c_{m+2} x^{m+2} + \dots, \tag{5}$$

$c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots \in K$. Число m — произвольное (не обязательно неотрицательное) целое. Наименьшее m, для которого для ряда $s(x)$ коэффициент при x^m отличен от нуля называется *порядком* ряда по x (или просто порядком) и обозначается через $\nu(s)$; для нулевого ряда полагаем $\nu(0) = \infty$. Через $\mathrm{tc}(s)$ мы обозначаем коэффициент при $x^{\nu(s)}$, полагая $\mathrm{tc}(0) = 0$.

Производная ряда $s(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i x^i$ (в нашем случае лишь конечное число коэффициентов c_i с отрицательными индексами может быть отлично от нуля) определяется как $D(s(x)) = s'(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i x^i$, где $d_i = (i+1)c_{i+1}$ для всех i. Из этого определения следует, что коэффициент d_{-1} всегда равен нулю.

Пусть K — поле характеристики 0. Пусть L — дифференциальный оператор

$$a_d(x) D^d + \dots + a_1(x) D + a_0(x), \tag{6}$$

где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{d-1}(x) \in K[[x]]$, $a_d(x) \in K[[x]] \setminus \{0\}$. Мы будем рассматривать уравнения вида

$$L(y) = f(x), \tag{7}$$

где $f(x) \in K[[x]]$. Основной вопрос, который нас сейчас будет интересовать, — это какова нижняя граница для порядков рядов $s(x) \in K'((x))$ таких, что $L(s(x)) = f(x)$.

Свяжем с оператором L и с уравнением (7) целое число

$$b = \min_{0 \leqslant j \leqslant d} (\nu(a_j) - j) \tag{8}$$

и алгебраическое уравнение

$$I(t) = 0,$$

где

$$I(t) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant d \\ \nu(a_j) - j = b}} \mathrm{tc}(a_j) t^{\underline{j}}, \tag{9}$$

$t^{\underline{j}} = t(t-1)\cdots(t-j+1)$. Уравнение $I(t) = 0$ называется *определяющим* уравнением, сопоставленным оператору L и уравнению $L(y) = f(x)$.

Пусть N — множество всех целых корней определяющего уравнения. Введем обозначение

$$\lambda = \begin{cases} \min N, & \text{если } N \neq \varnothing, \\ \infty, & \text{если } N = \varnothing. \end{cases} \tag{10}$$

Легко проверить, что если $s(x) \in K[[x]]$, $\nu(s) = m$, то $\nu(L(s(x))) \geqslant m+b$, и коэффициент при x^{m+b} ряда $L(s(x))$ равен $s_m I(m)$, где $s_m = \mathrm{tc}(s)$. Таким образом, этот коэффициент равен нулю если и только если $I(m) = 0$. Отсюда выводится

Предложение 1. *Пусть L имеет вид (6), $f(x) \in K[[x]]$. Пусть $s(x) \in K((x))$ и $L(s) = f(x)$. Тогда выполнено неравенство*

$$\nu(s) \geqslant \min(\nu(f) - b, \ \ \lambda), \tag{11}$$

где b и λ определены посредством (8) и (10).

(Детальное доказательство может быть проведено разбором возможностей $m+b = \nu(f)$ и $m + b < \nu(f)$; неравенство $m + b > \nu(f)$ невозможно при $L(s(x)) = f(x)$.)

В качестве следствия получаем, что если оператор L таков, что определяющее уравнение $I(t) = 0$ не имеет целых корней, то однородное дифференциальное уравнение $L(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в поле $K((x))$.

Значение правой части неравенства (11) будем обозначать через l:

$$l = \min(\nu(f) - b, \ \ \lambda). \tag{12}$$

Если $f(x)$ — нулевой ряд, т.е. уравнение (7) — однородное, то $l = \lambda$. Значения λ и l не зависят от того, рассматриваются ли решения дифференциального уравнения (7) в виде рядов над K или же над каким-либо его расширением.

Если $\nu(a_d) = 0$ в уравнении (6), и $L(s(x)) = f(x)$, то $\nu(s) \geqslant 0$. Это выводится из того, что при $\nu(a_d) = 0$ ряд $a_d(x)$ обратим в $K[[x]]$. Добавим, что при $\nu(a_d) = 0$ мы имеем $b = -d$ и $I(t) = t(t-1)\cdots(t-d+1)$.

Остановимся на вопросе точности оценки (11). В следующем предложении под решениями уравнений вида (7), имеющих коэффициенты и правые части в $K[[x]]$, понимаются решения, принадлежащие $K((x))$.

Предложение 2. *Пусть уравнение $L(y) = f(x)$, где L — оператор вида (6) и $f(x) \in K[[x]]$, имеет частное решение, и при этом уравнение $L(y) = 0$ имеет d линейно независимых решений. Тогда уравнение $L(y) = f(x)$ имеет решение, порядок которого совпадает с l.*

Доказательство. Покажем вначале, что определяющее уравнение имеет d различных целых корней, и для каждого из них существует решение уравнения $L(y) = 0$, порядок которого совпадает с этим корнем. В самом деле, взяв d линейно независимых решений уравнения $L(y) = 0$, можно, используя гауссовы исключения, построить новые d решений, имеющие попарно различные порядки. Эти порядки должны быть корнями определяющего уравнения, а степень определяющего уравнения не может превосходить d, поэтому у определяющего уравнения не может быть «лишних» корней.

Теперь перейдем к доказательству самого утверждения предложения. При этом мы будем доказывать несколько более сильное утверждение: уравнение $L(y) = f(x)$ обязательно обладает решением, порядок которого равен $\nu(f) - b$, а если $\lambda < \nu(f) - b$, то и решением порядка λ. Пусть $v(x)$ — решение уравнения $L(y) = f(x)$. Используя те d решений уравнения $L(y) = 0$, построение которых было описано выше, мы с помощью гауссовых исключений можем найти решение $\tilde{v}(x)$ уравнения $L(y) = f(x)$, порядок которого не совпадает ни с одним из корней определяющего уравнения. Для $\tilde{v}(x)$ имеем $\nu(\tilde{v}) = \nu(f) - b$. Если $\lambda < \nu(f) - b$, то в качестве решения, существование которого доказывается, возьмем $\tilde{v}(x) + w(x)$, где $w(x)$ — такое решение однородного уравнения, что $\nu(w) = \lambda$. □

3 Определяющие рациональные функции

Вернемся к случаю, когда коэффициенты оператора L и правая часть уравнения $L(y) = f(x)$ являются полиномами. Здесь и всюду далее будем без оговорок считать, что в этом уравнении

$$L = a_d(x)D^d + \cdots + a_1(x)D + a_0(x), \tag{13}$$

и $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{d-1}(x) \in K[x]$, $a_d(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. Предполагается также, что $f(x) \in K[x]$.

Переходя от поля K к какому-нибудь его расширению K', содержащему все корни полинома $a_d(x)$, мы можем для каждого такого корня α построить уравнение

$$L_{x+\alpha}(y(x)) = f(x+\alpha), \tag{14}$$

где

$$L_{x+\alpha} = a_d(x+\alpha)D^d + \cdots + a_1(x+\alpha)D + a_0(x+\alpha). \tag{15}$$

Полиномы могут рассматриваться как (тейлоровы) ряды, поэтому для этого уравнения мы можем определить величину l посредством (12). Нам будет удобно обозначать эту величину через l_α (аналогично можно говорить о величине λ_α). Рациональная функция

$$\prod_{a_d(\alpha)=0} (x-\alpha)^{l_\alpha} \tag{16}$$

и будет называться *определяющей рациональной функцией* (кратко: определяющей функцией) уравнения $L(y) = f(x)$. Если хотя бы один показатель l_α равен бесконечности, то определяющая функция (16) не существует.

Покажем, что для нахождения значений l_α не обязательно прибегать к сдвинутым уравнениям вида (14). Прежде всего, для $f(x), p(x) \in K[x]$, где $p(x)$ — неприводимый, определим величину $\nu_{p(x)}(f)$, положив ее для ненулевого полинома $f(x)$ равной максимальному $k \in \mathbb{N}$, такому, что $p^k(x) \mid f(x)$, и положив ее равной ∞ для случая нулевого $f(x)$. Пусть фиксировано α такое, что $a_d(\alpha) = 0$. В рассматриваемом случае $f(x)$ и $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, d$, суть полиномы. Мы имеем $\nu_x(f(x+\alpha)) = \nu_{x-\alpha}(f(x))$, и значение $\mathrm{tc}(f(x+\alpha))$ может быть найдено с помощью формулы Тейлора, которая справедлива для полиномов над любым полем характеристики 0:

$$\mathrm{tc}(f(x+\alpha)) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!},$$

где порядок m производной равен $\nu_{x-\alpha}(f(x))$. Аналогичные соотношения можно получить для $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, d$. С обозначениями

$$m_{\alpha,j} = \nu_{x-\alpha}(a_j(x)), \quad j = 0, 1, \ldots, d,$$

формула (8) заменится на

$$b_\alpha = \min_{0 \leqslant j \leqslant d} (m_{\alpha,j} - j), \tag{17}$$

формула (9) перепишется в виде

$$I_\alpha(t) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant d \\ m_{\alpha,j} - j = b_\alpha}} \frac{a_j^{(m_{\alpha,j})}(\alpha)}{m_{\alpha,j}!} t^{\underline{j}}; \tag{18}$$

наконец, $\nu(f(x))$ заменяется на $\nu_{x-\alpha}(f(x))$ в формуле (11). Итак, из предложения (1) следует

Предложение 3. *Для каждого корня α полинома $a_d(x)$ показатель l_α в (16) есть*

$$\min(\nu_{x-\alpha}(f(x)) - b_\alpha,\ \lambda_\alpha), \tag{19}$$

где λ_α есть наименьший целый корень определяющего уравнения $I_\alpha(t) = 0$ (если целых корней нет, то $\lambda_\alpha = \infty$).

Предложение 4. *Пусть для уравнения $L(y) = f(x)$ существует определяющая функция $V(x)$. Тогда $V(x) \in K(x)$.*

Доказательство. Пусть неприводимый над K полином $p(x)$ является делителем $a_d(x)$, и K' — некоторое расширение поля K, содержащее все корни полинома $a_d(x)$. При фиксированном j, $0 \leqslant j \leqslant d$, значения $\nu_{x-\alpha}(a_j(x))$ совпадают для всех α таких, что $p(\alpha) = 0$: над полем K' мы имеем $\nu_{x-\alpha}(a_j(x)) = \nu_{p(x)}(a_j(x))$. Отсюда видно, что и определенные посредством (17) значения b_α совпадают между собой для этих значений α. Аналогично, $\nu_{x-\alpha}(f(x)) = \nu_{p(x)}(f(x))$. Очевидно, что значения λ_α тоже совпадают между собой, так как уравнения $I_\alpha(t) = 0$ имеют одинаковые множества целых корней. Поэтому и определенные посредством (19) значения l_α совпадают между собой для всех α таких, что $p(\alpha) = 0$. Если обозначить эти совпадающие значения l_α через $l_{p(x)}$, то выражение (16) для определяющей функции можно переписать в виде

$$\prod_{\substack{p(x)\in \mathrm{Irr}(K)\\ p(x)|a_d(x)}} p^{l_{p(x)}}(x), \qquad (20)$$

где $\mathrm{Irr}(K)$ — множество нормированных неприводимых полиномов над K. Отсюда следует требуемое. $\square$

4 Рациональные решения

Предложение 5. *Пусть уравнение $L(y) = f(x)$ имеет решение $F(x) \in K(x)$. Тогда*

(i) для уравнения $L(y) = f(x)$ существует определяющая функция;

(ii) $F(x) = q(x)V(x)$, где $q(x) \in K[x]$ и $V(x)$ — определяющая функция уравнения.

Доказательство. Пусть K' — некоторое расширение поля K, содержащее все корни полинома $a_d(x)$. Положим для произвольной рациональной функции $G(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

$$\nu_{p(x)}(G(x)) = \nu_{p(x)}(g(x)) - \nu_{p(x)}(h(x)).$$

Последнее определение корректно (не зависит от выбора конкретных $g(x), h(x)$).

Так как каждый полином от x над K можно рассматривать как (тейлоров) ряд, то в этом смысле $K[x] \subset K[[x]]$. Рациональную функцию, представленную отношением двух полиномов $g(x)$ и $h(x)$, можно рассматривать как лоранов ряд, получающийся умножением $g(x)$ на $h^{-1}(x)$ в $K((x))$. Этот ряд не зависит от конкретного представления исходной рациональной функции. При рассматриваемом сопоставлении поле $K(x)$ изоморфно вкладывается в поле $K((x))$. Если при этом сопоставлении рациональной функции $G(x)$ отвечает ряд $\hat{G}(x)$, то $\nu_x(G(x)) = \nu(\hat{G}(x))$, и производной рациональной функции $G(x)$ будет сопоставлена производная ряда $\hat{G}(x)$. Из этого сразу следует, что рациональное решение может иметь полюс только в такой точке α, в которой $a_d(\alpha) = 0$. Последнее остается в силе и при рассмотрении рациональных функций над произвольным расширением поля K'.

Рассмотрим произвольный корень α полинома $a_d(x)$. Дифференциальное уравнение $L_{x+\alpha}(y) = f(x+\alpha)$ (см. (14), (15)) имеет рациональное решение $G(x) = F(x+\alpha)$ и соответственно решение в виде ряда $\hat{G}(x)$, откуда определяющее уравнение $I_\alpha(t) = 0$ имеет целые корни. Это доказывает (i). Наименьший из целых корней не превосходит $\nu(\hat{G}(x))$, т.е. не превосходит $\nu_{x-\alpha}(F(x))$, откуда следует (ii). $\square$

Предложение 5 сводит задачу поиска рациональных решений уравнений рассматриваемого вида к поиску полиномиальных решений того же вида. Хорошо известно (см., например, [1], [10]), что для данного линейного дифференциального уравнения $L(y) = f(x)$

рассматриваемого вида можно априори дать верхнюю оценку для степеней его возможных полиномиальных решений. Найдем

$$c = \max_{0 \leqslant j \leqslant d} (\deg a_j(x) - j)$$

и построим алгебраическое уравнение $I_\infty(t) = 0$, где

$$I_\infty(t) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant d \\ \deg a_j(x) - j = c}} \mathrm{lc}(a_j) t^{\underline{j}}$$

(lc, как обычно, обозначает старший коэффициент полинома). Тогда если $q(x) \in K[x]$ и $L(q(x)) = f(x)$, то

$$\deg q(x) \leqslant \max(\deg f(x) - c,\ \mu), \tag{21}$$

где μ — наибольший целый корень уравнения $I_\infty(t) = 0$, а если целых корней нет, то $\mu = -\infty$.

Данное ранее доказательство предложения 2 может быть модифицировано на случай полиномиальных решений: если дифференциальное уравнение рассматриваемого вида имеет «много» полиномиальных решений, то оценка (21) точна, т.е. среди полиномиальных решений имеется такое, степень которого равна правой части (21).

После установления этой верхней границы для поиска полиномиальных решений может быть применен, например, метод неопределенных коэффициентов, который сведет задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений с коэффициентами из K.

Рациональную функцию $U(x) \in K(x)$ такую, что любое рациональное решение исходного уравнения может быть представлено в виде $u(x)U(x)$, $u(x) \in K[x]$, мы будем называть *универсальным множителем* рассматриваемого уравнения. Из предложения 5(ii) следует, что определяющая функция является универсальным множителем.

Следующее предложение показывает, что определяющая рациональная функция в известном смысле представляет собой оптимальный вариант универсального множителя.

Предложение 6. *Пусть для уравнения $L(y) = f(x)$ существует определяющая функция $V(x)$, имеющая вид (20). Пусть $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ — все различные неприводимые множители старшего коэффициента $a_d(x)$ оператора L. Пусть уравнение $L(y) = 0$ имеет d линейно независимых решений в $K(x)$, и пусть $U(x) \in K(x)$ — его универсальный множитель. Тогда $U(x) = p_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\dots p_k^{s_k}(x)r^{-1}(x)$, где $r(x) \in K[x]$, $r(x)$ не делится на $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$, и*

$$s_1 \leqslant l_{p_1(x)},\ s_2 \leqslant l_{p_2(x)},\ \dots\ , s_k \leqslant l_{p_k(x)}.$$

Как следствие, если $F(x) \in K(x)$, $L(F(x)) = f(x)$ и $F(x) = u(x)U(x) = v(x)V(x)$, $u(x), v(x) \in K[x]$, то $\deg v(x) \leqslant \deg u(x)$.

Доказательство. Возможность представления рационального решения исходного уравнения как решения в виде ряда и использование предложения 2 дают нам $\nu_{p_i(x)}(U(x)) \geqslant l_{p_i(x)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, а также $\nu_{q(x)}(U(x)) \leqslant 0$ для любого неприводимого $q(x)$, не являющегося делителем $a_d(x)$ (в этом случае $l_{q(x)} = 0$). □

Итак, используя подстановку с каким-то универсальным множителем, мы приходим к задаче поиска полиномиальных решений. Здесь можно найти верхнюю границу для степеней всех возможных полиномиальных решений и прибегнуть, например, к методу неопределенных коэффициентов. В том случае, который рассматривается в предложении 6, мы получим уравнение, которое имеет «много» полиномиальных решений, и оценка вида (21) будет точной в смысле наших обсуждений. Поэтому порядок системы линейных алгебраических уравнений, которую надо будет решать в ходе применения метода неопределенных коэффициентов, будет достигать минимума при использовании определяющей функции в роли универсального множителя.

5 Построение определяющей рациональной функции с использованием полной факторизации

Пусть нам известны все различные неприводимые множители $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ старшего коэффициента $a_d(x)$ оператора L. Пусть $p(x)$ — один из этих множителей. Мы можем найти

$$m_{p(x),j} = \nu_{p(x)}(a_j(x)), \quad j = 0, 1, \ldots, d,$$

и

$$b_{p(x)} = \min_{0 \leqslant j \leqslant d}(m_{p(x),j} - j),$$

а затем построить полином двух переменных

$$J_{p(x)}(t, x) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant d \\ m_{p(x),j} - j = b_{p(x)}}} \frac{a_j^{(m_{p(x),j})}(x)}{m_{p(x),j}!} t^{\underline{j}}. \tag{22}$$

По построению этот полином таков, что при подстановке в него вместо x любого корня α полинома $p(x)$ мы получаем $I_\alpha(t)$. Как уже отмечалось в доказательстве предложения 4, при всех α таких, что $p(\alpha) = 0$, множества целых корней уравнений $I_\alpha(t) = 0$ одинаковы. Обозначим множество таких корней через $N_{p(x)}$ и укажем два способа его нахождения.

Первый способ. Уравнение $J_{p(x)}(t, x) = 0$ запишем в виде

$$u_v(x)t^v + u_{v-1}(x)t^{v-1} + \cdots + u_0(x) = 0, \tag{23}$$

где $u_0(x), \ldots, u_{v-1}(x), u_v(x)$ — полиномы от x степени меньшей, чем $\deg p(x)$ (каждый полином от x можно заменить остатком от деления этого полинома на $p(x)$), при этом $u_v(x)$ — ненулевой полином. Это уравнение перепишем по степеням x:

$$w_k(t)x^k + w_{k-1}(t)x^{k-1} + \cdots + w_0(t) = 0, \tag{24}$$

где $k \leqslant \deg p(x) - 1$, $w_i(t) \in K[t]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $w_k(t) \in K[t] \setminus \{0\}$. После подстановки вместо x некоторого корня α полинома $p(x)$ это уравнение имеет целый корень n_0 если и только если все $w_i(t)$, входящие в (24), обращаются в 0 при $t = n_0$ (так как элемент поля $K(\alpha), p(\alpha) = 0$, записанный в виде полинома от α степени меньшей, чем $\deg p(\alpha)$, равен нулю если и только если все коэффициенты этого полинома равны нулю). Множество общих целых корней полиномов $w_i \in K[t]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, будет конечным, поскольку $w_k(t) \in K[t] \setminus \{0\}$. Это множество есть $N_{p(x)}$.

Второй способ основывается на том, что $N_{p(x)}$ является множеством целых корней уравнения

$$\mathrm{Res}_x(J_{p(x)}(t, x), p(x)) = 0$$

(написанный в левой части уравнения результант является полиномом от t).

После того, как $N_{p(x)}$ найдено одним из этих способов, положим $\lambda_{p(x)}$ равным минимальному элементу этого множества, если само это множество не пусто, и равным ∞ в противном случае. Далее мы легко находим показатель $l_{p(x)}$ степени полинома $p(x)$ в (20):

$$l_{p(x)} = \min(\nu_{p(x)}(f(x)) - b_{p(x)},\ \lambda_{p(x)}).$$

Если показатель $l_{p(x)}$ равен бесконечности хотя бы для одного неприводимого множителя $p(x)$ полинома $a_d(x)$, то определяющая функция не существует.

Пример 1. Пусть $p(x), q(x)$ неприводимы над $\mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}^+$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$p(x)q(x)y' - (mp(x)q'(x) - nq(x)p'(x))y = 0. \tag{25}$$

Беря множитель $q(x)$ старшего коэффициента, мы получаем $b_{q(x)} = 0$ и $J_{q(x)}(t,x) = p(x)q'(x)t - mp(x)q'(x)$. Это дает $l_{q(x)} = \lambda_{q(x)} = m$. Беря теперь $p(x)$, аналогичным образом получаем $l_{p(x)} = \lambda_{p(x)} = -n$. Отсюда $V(x) = p^{-n}(x)q^m(x)$. Подстановка $y(x) = u(x)V(x)$ в (25) приводит к уравнению $u' = 0$, откуда получаем, что общее рациональное решение исходного уравнения есть $C\frac{q^m(x)}{p^n(x)}$, где C — произвольная постоянная.

Займемся теперь неоднородным уравнением

$$\begin{gathered} p(x)q(x)y' - (mp(x)q'(x) - nq(x)p'(x))y = \\ p(x)q(x)q'(x) - mp(x)q(x)q'(x) + nq^2(x)p'(x). \end{gathered} \tag{26}$$

Левая часть уравнения не изменилась, поэтому $b_{p(x)}$, $b_{q(x)}$, $J_{p(x)}(t,x)$, $J_{q(x)}(t,x)$, $\lambda_{p(x)}$ и $\lambda_{q(x)}$ остаются прежними. Обозначив правую часть уравнения (26) через $f(x)$, мы имеем $\nu_{q(x)}(f(x)) = 1$, $\nu_{p(x)}(f(x)) = 0$. Поэтому получаем $l_{p(x)} = -n$, $l_{q(x)} = 1$ и $V(x) = p^{-n}(x)q(x)$. После подстановки $y(x) = u(x)V(x)$ придем к уравнению, имеющему полиномиальное решение $Cq^{m-1}(x) + p^n(x)$. Это соответствует тому, что общим рациональным решением уравнения (26) будет $\frac{Cq^m(x)+q(x)p(x)}{p^n(x)}$.

6 Построение определяющей рациональной функции с использованием уравновешенной факторизации с подразбиением

Алгоритм из раздела 5 предполагает предварительное нахождение всех неприводимых делителей $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)$ полинома $a_d(x)$. Если по какой-то причине нежелательно прибегать к полной факторизации, то можно использовать другой вариант этого алгоритма, который основывается на *уравновешенной факторизации* ([2]). Приведем необходимые определения.

Пусть $f(x), g(x) \in K[x]$, $\deg f(x) > 0$. Полином $f(x)$ называется уравновешенным по отношению к $g(x)$, если либо $g(x)$ нулевой полином, либо $g(x) = f^l(x)\hat{g}(x)$, $\hat{g}(x) \in K[x]$, $l \geqslant 0$, и полиномы $f(x)$, $\hat{g}(x)$ взаимно просты. Разложение

$$f(x) = u_1(x)u_2(x)\ldots u_k(x),$$

$\deg u_i(x) > 0, i = 1, 2, \ldots, k$, называется уравновешенной факторизацией $f(x)$ по отношению к $g(x)$, если каждый полином $u_i(x)$ уравновешен по отношению к $g(x)$. Пусть S — конечное множество полиномов из $K[x]$, пусть $f(x) \in K[x]$, $\deg f(x) > 0$. Тогда $f(x)$ называется уравновешенным по отношению к S, если он уравновешен по отношению к каждому элементу S. Представление $f(x)$ в виде произведения уравновешенных по отношению к S сомножителей называется уравновешенной факторизацией полинома $f(x)$ по отношению к S.

В [2] дан алгоритм построения уравновешенной факторизации на основе основных операций над полиномами и вычисления наибольших общих делителей полиномов (gcd-техники). Более формализованное описание (псевдокод) этого алгоритма можно найти в [7].

Мы можем освободить полином $a_d(x)$ от квадратов, взяв частное от деления $a_d(x)$ на $\gcd(a_d(x), a_d'(x))$. Обозначим результат через $A(x)$. Пусть уравновешенная факторизация $A(x)$ по отношению к множеству полиномов

$$f(x), a_0(x), a_1(x), \ldots, a_d(x) \tag{27}$$

имеет вид

$$h_1(x)h_2(x)\cdots h_k(x). \tag{28}$$

Пусть $g(x)$ — это один из полиномов (27), и $h(x)$ — один из множителей произведения (28). Будем обозначать через

$$\nu_{h(x)}(g(x))$$

наибольший показатель степени, с которым $h(x)$ делит $g(x)$. Из определения уравновешенной факторизации следует, что для любого неприводимого делителя $p(x)$ полинома $h(x)$ мы имеем

$$\nu_{p(x)}(g(x)) = \nu_{h(x)}(g(x)).$$

Это говорит о том, что подход, описанный в разделе 5, может использоваться и для делителей, не являющихся, возможно, неприводимыми, но являющихся уравновешенными в указанном смысле. Однако необходимы уточнения, касающиеся поиска целых корней уравнения (24), так как теперь мы уже не можем считать, что для равенства нулю выражения в левой части уравнения все $w_i(t)$ должны обращаться в нуль. Поэтому первый из рассмотренных в разделе 5 способов вычисления множества целых корней в данном случае не подойдет. Но формальное применение второго способа не вызывает затруднений. Найдем полином $J_{h(x)}(t,x)$ по аналогии с (22), используя $h(x)$ вместо $p(x)$, и рассмотрим множество целых корней уравнения

$$\mathrm{Res}_x(J_{h(x)}(t,x), h(x)) = 0.$$

Мы можем определить $\lambda_{h(x)}$ по аналогии с $\lambda_{p(x)}$, а затем — показатель степени для $h(x)$, положив его равным

$$l_{h(x)} = \min(\nu_{h(x)}(f(x)) - b_{h(x)},\ \lambda_{h(x)}).$$

Найдя произведение всех уравновешенных множителей с такими показателями степеней, мы получим рациональную функцию $\tilde{V}(x)$.

Подстановка $y(x) = u(x)\tilde{V}(x)$ позволяет переходить, например, от задачи поиска рациональных решений исходного дифференциального уравнения к задаче поиска полиномиальных решений нового уравнения того же порядка ([2]), но $\tilde{V}(x)$ не является в общем случае определяющей функцией, описанная подстановка может оказаться более грубой в смысле предложения 6, чем подстановка $y(x) = u(x)V(x)$ с определяющей функцией $V(x)$.

Однако $\tilde{V}(x)$ будет определяющей функцией, если каждый уравновешенный множитель $h(x)$ является *плоским* с конечным показателем, т.е. для всех корней $\alpha, \beta, \ldots$ полинома $h(x)$ определяющие уравнения

$$I_\alpha(t) = 0,\ I_\beta(t) = 0,\ \ldots \tag{29}$$

имеют целые корни и при этом наименьшие целые корни всех этих уравнений равны одному и тому же числу n. Тогда n — показатель множителя $h(x)$ в $V(x)$. Если же все уравнения (29) не имеют целых корней, то уравновешенный множитель $h(x)$ считаем плоским с показателем ∞. Наличие плоского множителя с показателем ∞ говорит о том, что определяющая функция не существует.

Пусть $N_{h(x)}$ — множество всех целых корней уравнения $\mathrm{Res}_x(J_{h(x)}(t,x), h(x) = 0$. Исходя из

$$h(x),\ J_{h(x)}(t,x),\ N_{h(x)}$$

разложение $h(x)$ на плоские множители может быть выполнено несложной процедурой, основанной на gcd-технике. Эта процедура называется *подразбиением*. Опишем ее, используя для простоты обозначение $J(t,x)$ вместо $J_{h(x)}(t,x)$.

Пусть $N = \{n_0, n_1, \ldots, n_\delta\}$ и $n_0 < n_1 < \cdots < n_\delta$. Тогда для n_0 мы найдем $h_{[n_0]}(x) = \gcd(J(n_0,x), h(x))$ и изменим $h(x)$, заменив его частным от деления $h(x)$ на $h_{[n_0]}(x)$. Затем проделаем тоже самое с $J(t,x)$, с измененным $h(x)$ и с n_1, это даст нам полином $h_{[n_1]}(x)$ и т.д. В итоге мы разложим $h(x)$ на множители

$$h_{[n_0]}(x),\ h_{[n_1]}(x),\ \dots\ , h_{[n_\delta]}(x). \tag{30}$$

Если после вычисления $h_{[n_\delta]}(x)$ и соответствующего изменения $h(x)$ мы получаем $\deg h(x) > 0$, то определяющая функция не существует. Если этого не произошло, то, те из полиномов (30), которые оказались равными единице, можно исключить из дальнейшего рассмотрения, при этом каждый из оставшихся полиномов вида $h_{[n_i]}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant \delta$, является плоским с показателем n_i.

Пример 2. Вернемся к уравнению (25). Старший коэффициент (обозначим его через $a_1(x)$) является бесквадратным, и его возможная уравновешенная факторизация состоит из единственного множителя $h(x)$, равного $a_1(x)$. Получаем $b_{h(x)} = 0$ и

$$J_{h(x)}(t,x) = (p(x)q(x))'t - (mp(x)q'(x) - nq(x)p'(x)).$$

Множеством целых корней уравнения $\mathrm{Res}_x(J_{h(x)}(t,x), h(x))$ является $N = \{-n, m\}$. Если не прибегать к подразбиению, то получим $\tilde{V}(x) = (p(x)q(x))^{-n}$. Выполним подразбиение. Имеем $\gcd(J_{h(x)}(-n,x), h(x)) = p(x)$. Изменяя $h(x)$, получаем $h(x) = q(x)$ и $\gcd(J_{h(x)}(m,x), q(x)) = q(x)$. Получаем определяющую функцию $V(x) = p^{-n}(x)q(x)^m$.

Подстановка $y(x) = u(x)\tilde{V}(x)$ приводит к уравнению

$$q(x)u'(x) - (n+m)q'(x)u(x) = 0,$$

имеющему полиномиальное решение $Cq^{n+m}(x)$. Подстановка $y(x) = u(x)V(x)$ приводит к уравнению $u'(x) = 0$, его полиномиальные решения — константы.

Сходным образом для уравнения (26) мы получим $(p(x)q(x))^{-n}$ до подразбиения, и $p^{-n}(x)q(x)$ — после.

В этом примере не обязательно считать $p(x)$ и $q(x)$ неприводимыми. Уравновешенная факторизация, как и уравновешенная факторизация с подразбиением, будет выполняться точно так же и при более слабом предположении о том, что $p(x), q(x)$, а также $p(x), p'(x)$ и $q(x), q'(x)$ взаимно просты.

7 Реализация и эксперименты

В среде Maple (см. [9]) алгоритм построения универсального множителя уже был реализован как вспомогательная процедура, используемая при поиске рациональных решений дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициетами процедурой **DEtools[ratsols]**. Существует даже две таких процедуры. Одна из них реализована на основе полной факторизации и строит определяющую функцию для однородного уравнения, другая — на основе уравновешенной факторизации (без подразбиения), строит универсальный знаменатель (т.е. $U(x)$ из предложения 6 с $s_1 \leqslant 0, \dots, s_k \leqslant 0$).

Для того чтобы можно было сравнить эффективность разобраных в разделах 5, 6 алгоритмов, понадобилось модифицировать существующий код, реализовать подразбиение, оформить все как отдельную, доступную пользователю процедуру.

Таким образом, в среде Maple 11 был создан пакет **IndicialFunction**. Продемонстрируем работу главной процедуры пакета на уравнении из примера 1. Уравнение (25) записывается обычным в Maple образом:

```
> ode := p(x)*q(x)*diff(y(x),x)-m*p(x)*diff(q(x),x)-
>         n*q(x)*diff(p(x), x))*y(x):
```

Зададим $p(x) = x^5 + 2, m = 5, q(x) = x^3 + x - 3, n = 7$:

```
> ode1 := eval(ode=0,  {p(x) = x^5+2, m = 5,
>         q(x) = x^3+x-3, n = 7}):
```

Вычислим определяющую функцию:

```
> IndicialFunction(ode1, y(x));
```

$$\frac{(x^3 + x - 3)^5}{(x^5 + 2)^7}$$

Аналогично, для неоднородного уравнения (26)

```
> f := p(x)*q(x)*diff(q(x),x)-(m*p(x)*diff(q(x),x)-
>        n*q(x)*diff(p(x), x))*q(x):
> ode2 := eval(ode=f,  {p(x) = x^5+2, m = 5,
>         q(x) = x^3+x-3, n = 7}):
```

получим

```
> IndicialFunction(ode2, y(x));
```

$$\frac{x^3 + x - 3}{(x^5 + 2)^7}$$

Пакет содержит три процедуры построения определяющей функции:

- **IndicialFunction:-ByFactors**: использование полной факторизации старшего коэффициента с помощью стандартной Maple процедуры **factors**;
- **IndicialFunction:-ByFactorsAndResultant**: полная факторизация и вычисление $N_{p(x)}$ с помощью результанта;
- **IndicialFunction:-BySubpartition**: использование уравновешенной факторизации с последующим подразбиением.

Имеющаяся в Maple процедура уравновешенной факторизации **‘DEtools/balancedfacts‘**[1] также была модифицирована и помещена в пакет **IndicialFunctions**. Процедура **‘DEtools/balancedfacts‘** возвращает уравновешенную факторизацию полинома $f(x) = p_0 p_1^{s_1}(x) \cdots p_k^{s_k}(x)$ по отношению к $g(x)$ в виде списка $[p_0, [p_1(x), s_1], \ldots, [p_k(x), s_k]]$. Например, для

```
> f := x^13+x^11-3*x^10+4*x^8+4*x^6-12*x^5+4*x^3+4*x-12:
> g := x^4+x^2-2*x+x^3-3:
```

мы получаем

```
> ‘DEtools/balancedfacts‘(f, [g], x);
```

[1] Такие двух- (и даже трех-) сложные имена с кавычками давались в старых версиях Maple вспомогательным процедурам пакетов до тех пор, пока не ввели структуру **module**. Процедура **‘DEtools/balancedfacts‘** не имеет своей хелп-страницы, но доступна для использования.

$$[1, [[x^5 + 2, 2], [x^3 + x - 3, 1]]]$$

Это значит, что

$$f(x) = (x^5 + 2)^2 (x^3 + x - 3).$$

В процессе такой факторизации становится известно и представление

$$g(x) = p_i(x)^{\nu_i}\, \hat{g}_i(x).$$

Поскольку эта информация необходима при построении определяющей функции, мы запрограммировали процедуру **IndicialFunction:-BalancedFactorization** так, чтобы она передавала ее во втором списке вида $[g_0(x), \nu_{p_1(x)}(g(x)), \ldots, \nu_{p_k(x)}(g(x))]$:

```
> IndicialFunction:-BalancedFactorization(f, [g], x);
```

$$[1, [[x^5 + 2, 2], [x^3 + x - 3, 1]]], [[x + 1, 0, 1]]$$

То есть

$$g(x) = (x + 1)(x^5 + 2)^0 (x^3 + x - 3)^1.$$

Был проведен ряд экспериментов, чтобы проверить, какой алгоритм построения определяющей функции более эффективен по времени. Следующим образом мы получаем время работы каждого алгоритма (в секундах):

```
> st := time();
> IndicialFunction:-BySubpartition(ode1, y(x)):
> time()-st;
```

$$0.012$$

```
> st := time();
> IndicialFunction:-ByFactors(ode1, y(x)):
> time()-st;
```

$$0.016$$

```
> st := time();
> IndicialFunction:-ByFactorsAndResultant(ode1, y(x)):
> time()-st;
```

$$0.014$$

Время работы всех процедур достаточно мало, и **примерно** одинаково. Будем повышать степень полинома $p(x)$ в уравнении (25). Используем стандартную Maple процедуру **randpoly** для генерации случайного полинома нужной нам степени:

```
> randpoly(x, degree = 10);
```

$$-56x^{10} - 62x^7 + 97x^6 - 73x^3 - 4x^2$$

Мы провели тестирование уравнения при $50 \leqslant \deg p(x) \leqslant 100$. Приведем время счета для степеней 50, 60, 70, 80, 90, 100:

$\deg p(x)$	50	60	70	80	90	100
ByFactors	0.036	0.032	0.040	0.072	0.104	0.080
ByFactorsAndResultant	0.052	0.044	0.052	0.096	0.148	0.100
BySubpartition	0.328	0.380	0.732	2.360	2.464	3.021

Эти эксперименты показали, что, как правило, **ByFactors** и **ByFactorsAndResultant** работают одинаково, существенно быстрее, чем **BySubpartition**. Вероятно, это является следствием того, что в системе Maple факторизация полиномов реализована значительно более тщательно, чем поиск наибольшего общего делителя.

После проведения экспериментов, мы выбрали **ByFactors** как процедуру, вызываемую по умолчанию для построения определяющей функции. Наш пакет использован при поиске рациональных решений дифференциального уравнения. Для неоднородного уравнения **ode2** мы уже получали определяющую функцию:

```
> V := IndicialFunction(ode2, y(x));
```

$$V := \frac{x^3 + x - 3}{(x^5 + 2)^7}$$

Выполним замену $y(x) = V(x)u(x)$:

```
> ode3 := eval(ode2, y(x) = V*u(x));
```

$$ode3 := (x^5 + 2)(x^3 + x - 3)\left(-\frac{35(x^3 + x - 3)\,u(x)\,x^4}{(x^5 + 2)^8} + \frac{(3x^2 + 1)\,u(x)}{(x^5 + 2)^7} + \frac{(x^3 + x - 3)\,\frac{d}{dx}u(x)}{(x^5 + 2)^7}\right) - \frac{(5\,(x^5 + 2)\,(3x^2 + 1) - 35\,(x^3 + x - 3)\,x^4)\,(x^3 + x - 3)\,u(x)}{(x^5 + 2)^7} = (x^5 + 2)\,(x^3 + x - 3)\,(3x^2 + 1) - (5\,(x^5 + 2)\,(3x^2 + 1) - 35\,(x^3 + x - 3)\,x^4)\,(x^3 + x - 3)$$

и построим для нового уравнения полиномиальное решение с помощью процедуры **DEtools[polysols]**:

```
> Psol := DEtools[polysols](ode3, u(x));
```

$$Psol := [[81 - 108x + 54x^2 - 120x^3 + 109x^4 - 36x^5 + 58x^6 - 36x^7 + 6x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + x^{12}], 128 + 448x^5 + 560x^{15} + 280x^{20} + 84x^{25} + 14x^{30} + x^{35} + 672x^{10}]$$

Полученный ответ означает, что общее полиномиальное решение уравнения **ode3** выглядит следующим образом:

```
> Psol[1][1]*C+Psol[2];
```

$$(81 - 108x + 54x^2 - 120x^3 + 109x^4 - 36x^5 + 58x^6 - 36x^7 + 6x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + x^{12})\,C + 128 + 448x^5 + 560x^{15} + 280x^{20} + 84x^{25} + 14x^{30} + x^{35} + 672x^{10}$$

где C — произвольная постоянная. Домножим его на $V(x)$ и получим общее рациональное решение уравнения **ode2**:

```
> V*Psol[1][1]*C+V*Psol[2];
```

$$\frac{x^3+x-3}{(x^5+2)^7}\left(81 - 108x + 54x^2 - 120x^3 + 109x^4 - 36x^5 + 58x^6 - 36x^7 + 6x^8 - 12x^9 + 4x^{10} + x^{12}\right) C + \frac{x^3+x-3}{(x^5+2)^7}\left(128 + 448x^5 + 560x^{15} + 280x^{20} + 84x^{25} + 14x^{30} + x^{35} + 672x^{10}\right)$$

С помощью процедуры **DEtools[ratsols]** мы тоже получим общее рациональное решение (в другой форме):

```
> DEtools[ratsols](ode2, y(x));
```

$$[[\frac{(x^3+x-3)^5}{(x^5+2)^7}, \frac{1}{(x^5+2)^7}(-71339352 + 118898408 + 79557752x^5 + 145320248x^3 - 79265520x^2 - 162934680x^4 + 2936432x^{11} + 1468552x^{13} + 560x^{16} + 560x^{18} + 280x^{21} + 280x^{23} + 84x^{26} + 84x^{28} + 14x^{31} + 14x^{33} + x^{36} + x^{38} - 26421392x^8 - 96879632x^6 + 80733400x^7 - 17616576x^{10} + 291896x^{15} - 4403640x^{12} + 29357600x^9 - 840x^{20} - 252x^{25} - 42x^{30} - 3x^{35})]$$

Теперь сравним время счета с помощью новой процедуры:

```
> st := time();
> V := IndicialFunction(ode2, y(x)):
> ode3 := eval(ode2, y(x) = V*u(x)):
> Psol := DEtools[polysols](ode3, u(x)):
> [Psol[1][1]*V, Psol[2]*V]:
> time()-st;
```

$$0.068$$

и с помощью **DEtools[ratsols]**:

```
> st := time():
> DEtools[ratsols](ode2, y(x)):
> time()-st;
```

Новая программа работает быстрее.

В пакете **IndicialFunction** для дифференциального уравнения со старшим коэффициентом $a_d(x)$ программа сначала получает его факторизацию (полную или уравновешенную)

$$a_d(x) = p_1^{s_1}(x)\dots p_k^{s_k}(x),$$

затем последовательно строит определяющие уравнения для всех множителей, ищет их целые корни и вычисляет показатели l_{p_i}. Из тех множителей $p_i(x)$, для которых показатель конечен, составляет произведение

$$V = p_{i_1}^{l_{p_{i_1}}}(x)\cdots p_{i_t}^{l_{p_{i_t}}}(x),$$

которое не всегда будет определяющей функцией. Те множители, для которых $l_{p_i} = \infty$, запоминает в списке

$$B = [p_{j_1}(x), \dots, p_{j_r}(x)].$$

В итоге процедура возвращает пару (V, B). Например, для уравнения

```
> ode4 := (2+2*x^3+2 x)*y(x)+(x^3+x^4)*diff(y(x), x):
```

получим

```
> IndicialFunction(ode4, y(x));
```

$$\frac{1}{(1+x)^2},\ [x]$$

Этот ответ означает, что данное уравнение не может иметь рациональных решений, что в точке $x = -1$ оно имеет решения в виде формального ряда (**лоранова**), а в $x = 0$ таких решений нет. Применив замену $y(x) = u(x)/(x+1)^2$ к **ode4**, затем домножив на общий знаменатель, мы получим уравнение с коэффициентами меньшей степени:

```
> ode5 := numer(normal(eval(ode4, y(x) = u(x)/(1+x)^2)));
```

$$ode5 := x^3\frac{d}{dx}u(x) + 2u(x)$$

для которого $V = 1$:

```
> IndicialFunction(ode5, u(x));
```

$$1,\ [x]$$

Если поставлена задача поиска только рациональных решений, время работы можно сократить, прекратив ее, как только программа получит $l_{p_i} = \infty$. Это будет сделано, если задан дополнительный аргумент **'ratsols'**:

```
> IndicialFunction(ode4, y(x), 'ratsols');
```

Здесь программа возвращает **NULL**, **это** означает, **что** определяющей функции не существует.

Список литературы

[1] Абрамов С.А., Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений, *Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика*, No. 3, 53–60 (1989).

[2] Абрамов С.А., Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, 29, No. 11, 1611–1620 (1989).

[3] Абрамов С.А., Рациональные решения линейных разностных и q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, *Программирование*, No. 6, 3–11 (1995).

[4] Абрамов С.А., Построение определяющих рациональных функций линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Тезисы докладов, 86–87 (2008).

[5] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы (1965).

[6] Коддингтон Э.А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М: Издательство иностранной литературы (1958).

[7] Bronstein M., Integration and Differential Equations in Computer Algebra, *Программирование*, No. 5, 26–44 (1992).

[8] van Hoeij M., Rational Solutions of Linear Difference Equations, *ISSAC'98 Proceedings*, 120–123 (1998).

[9] Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., McCarron J., DeMarco P., Maple 11 introductory programming guide *Waterloo Maple Inc.*, Waterloo, Ontario, Canada, 2007.

[10] Petkovšek M., H.S. Wilf, D. Zeilberger, $A = B$, Peters, 1996.

[11] Singer M.F., Liouvillian Solutions of n^{th} Order Homogeneous Linear Equations, *American Journal of Mathematics*, 103, No. 4, 661–682 (1981).