Абрамов С. А., Рябенко А. А., Хмельнов Д. Е.

Усеченные ряды

Аннотация

Метод литералов вместе с известным методом многоугольников Ньютона позволяет находить выражения для формальных решений таких линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых коэффициенты заданы как усеченные степенные ряды, — для этих рядов известно лишь конечное число начальных членов, а неизвестные "хвосты" заменены символами $O(x^d)$ с подходящими d. Для рядов, входящих в решения, оказывается возможным получить все члены, однозначно определенные известными начальными фрагментами коэффициентов уравнения. Реализующие этот подход программы оформлены как Maple-пакет `TruncatedSeries`. Даются примеры работы с пакетом.

0. Предварительные сведения

0.1. Некоторые обозначения

Пусть K — некоторое поле. Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

- $K[x]$ — кольцо полиномов от x над K,
- $K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов от x над K,
- $K((x))$ — поле формальных лорановых рядов от x над K, являющееся полем частных кольца $K[[x]]$.

Для элементов кольца $K[[x]]$ и поля $K((x))$ вводится понятие валюации: для $a(x) = \sum a_i x^i$ полагаем $\operatorname{val} a(x) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\operatorname{val} 0 = \infty$.

0.2. Формальные экспоненциально-логарифмические решения

Пусть K — алгебраически замкнутое подполе поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Как известно (см., например, [9, разд. 110], [10]), уравнение

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x) \in K[[x]]$, $a_n(x) \neq 0$, имеет n таких линейно независимых решений $b_1(x), \ldots, b_n(x)$, что

$$b_i(x) = e^{Q_i(x)} x^{\lambda_i} w_i(x), \tag{2}$$

$$w_i(x) = \psi_{i0}(x) + \psi_{i1}(x) \ln x + \cdots + \psi_{is_i}(x) \ln^{s_i} x.$$

В каждом из таких решений b_i

- $Q_i(x) \in K[x^{-1/q_i}]$ (*показатель экспоненциальной части решения*), q_i — положительное целое (*индекс ветвления решения*),
- произведение $x^{\lambda_i} w_i(x)$ — *регулярная часть решения*,
- $\lambda_i \in K$ (*показатель регулярной части решения*),
- s_i — неотрицательное целое, $\psi_{ij}(x) \in K((x^{1/q_i}))$, $j = 0, \ldots, s_i$.

Определение 1. Решения вида (2) называются *формальными экспоненциально-логарифмическими* (или, для краткости, просто *формальными*) решениями. В частности, если $Q(x) \in K$ и $q = 1$, решение называем *регулярным*.

1. Уравнения с усеченными коэффициентами и усеченные решения

1.1. Уравнения с усеченными коэффициентами

Далее мы предполагаем, если не оговорено иное, что коэффициенты $a_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$, уравнения (1) заданы в усеченном виде:

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x^j + O(x^{t_i+1}),$$

где $t_i \geq -1$, $a_{ij} \in K$. При $t_i = -1$ полагаем $a_i(x) = O(1)$.

Определение 2. *Продолжением* уравнения (1) будем называть любое уравнение

$$\tilde{a}_n(x)y^{(n)} + \cdots + \tilde{a}_1(x)y' + \tilde{a}_0(x)y = 0,$$

с $\tilde{a}_0(x), \tilde{a}_1(x), \ldots, \tilde{a}_n(x) \in K[[x]]$, для которого

$$\tilde{a}_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij}x^j + \sum_{j=t_i+1}^{\infty} \tilde{a}_{ij}x^j,$$

т.е. $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1}),\ \ i = 0, \ldots, n.$

1.2. Усеченные решения

Мы называем *решением с усеченной регулярной частью* уравнения (1) выражение

$$e^{Q(x)}\, x^{\lambda} \left(\psi_0(x) + \psi_1(x) \ln x + \cdots + \psi_s(x) \ln^s x\right),$$

в котором для каждого коэффициента $\psi_i(x)$ выполняется

$$\psi_i(x) = \sum_{j=j_i}^{k_i} \psi_{ij}x^{j/q} + O(x^{(k_i+1)/q}), \tag{3}$$

где $k_i \geq j_i$, $\psi_{ij} \in K$, $\psi_{ij_i} \neq 0$, и при этом любое уравнение, являющееся продолжением (1), имеет решение

$$e^{Q(x)}\, x^{\lambda} \left(\tilde{\psi}_0(x) + \tilde{\psi}_1(x) \ln x + \cdots + \tilde{\psi}_s(x) \ln^s x\right), \tag{4}$$

в котором

$$\tilde{\psi}_i(x) - \psi_i(x) = O(x^{(k_i+1)/q}),\ \ i = 0, \ldots, s.$$

В частности, если $Q(x) \in K$ и $q = 1$, то решение называем *усеченным регулярным*. Если при этом λ — целое число и $s = 0$, то — *усеченным лорановым*. Число k_i в (3) называем *степенью усечения* ряда $\psi_i(x)$.

Пусть

$$Q(x) = \frac{\varepsilon_1}{x^{\kappa_1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_\sigma}{x^{\kappa_\sigma}}, \tag{5}$$

где $\kappa_1 > \cdots > \kappa_\sigma > 0$, $\kappa_i \in \mathbb{Q}$ и $\varepsilon_i \in K \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, \sigma$. Называем $\varepsilon_1/x^{\kappa_1}$ ведущим слагаемым $Q(x)$. Выражение

$$e^{Q(x)}\,Y(x)$$

мы называем решением с *усеченным показателем экспоненциальной части* уравнения (1), коль скоро любое уравнение, являющееся продолжением (1), имеет формальное решение

$$e^{Q(x)+\widetilde{Q}(x)}\,x^\lambda\left(\tilde\psi_0(x)+\tilde\psi_1(x)\ln x+\cdots+\tilde\psi_s(x)\ln^s x\right), \qquad (6)$$

такое, что

$$\widetilde{Q}(x) = \frac{\varepsilon_{\sigma+1}}{x^{\kappa_{\sigma+1}}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{\sigma+\varsigma}}{x^{\kappa_{\sigma+\varsigma}}}$$

где $\kappa_\sigma > \kappa_{\sigma+1} > \cdots > \kappa_{\sigma+\varsigma} > 0$, $\kappa_i \in \mathbb{Q}$ и $\varepsilon_i \in K \setminus \{0\}$, $i = \sigma+1, \ldots, \sigma+\varsigma$.

2. Построение усеченных решений

2.1. Алгоритмы

В [1] обсуждалась задача построения усеченных лорановых решений уравнения (1). Сформулировано условие, при котором любое продолжение уравнения (1) имеет ненулевое лораново решение $w(x) \in K((x))$. Вычисляется конечное множество V всех таких целых чисел α, что любое продолжение уравнения имеет лорановы решения с валюацией α. Т.е. V — множество всех таких валюаций лорановых решений, которые инвариантны относительно продолжений уравнения (1). При этом для каждого $\alpha \in V$ вычисляется максимально возможное число членов усеченных лорановых решений уравнения (1) с валюацией α:

$$w(x) = \sum_{i=\alpha}^{k} w_i x^i + O(x^{k+1}),$$

$k \geq \alpha$. В указанной работе предлагается алгоритм (“метод литералов”), который строит коэффициенты $w_\alpha, \ldots, w_k$ в виде линейных комбинаций над K произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$; алгоритм основан на привлечении индуцированного рекуррентного соотношения, введенного в [7].

В [2] аналогично решается задача построения усеченных регулярных решений. Так же сформулировано условие, при котором любое продолжение уравнения (1) имеет регулярное решение

$$x^{\lambda}\left(\psi_0(x)+\psi_1(x)\ln x+\cdots+\psi_s(x)\ln^s x\right),\ \operatorname{val}\psi_s(x)=0, \qquad (7)$$

где $\lambda \in K$, $\psi_i \in K((x))$, $i = 0,\ldots,s$. Вычисляется конечное множество V всех таких наборов $(\lambda, j_1,\ldots,j_{s-1})$, что любое продолжение уравнения имеет решение (7), в котором

$$\operatorname{val}\psi_i(x)=j_i, \quad i=0,\ldots,s-1.$$

Для каждого набора $(\lambda, j_1,\ldots,j_{s-1}) \in V$ вычисляется максимально возможное число членов входящих в (7) рядов, инвариантных относительно продолжений уравнения (1):

$$\psi_i(x)=\sum_{j=j_i}^{k_i}\psi_{i,j}x^j+O(x^{k_i+1}),$$

$k_i \geq j_i$, $j_s = 0$, $i = 0,\ldots,s$. В [2] предлагается алгоритм, основанный на классическом методе Хеффтера [8] и методе литералов из [1], который строит коэффициенты $\psi_{i,j}$, $j=j_i,\ldots,k_i$, $i=0,\ldots,s$, в виде линейных комбинаций над K произвольных постоянных $C_1,\ldots,C_n$.

В [4] предложен алгоритм, основанный на методе многоугольников Ньютона [5] и алгоритме из [2] и предназначенный для построения решений с усеченной регулярной частью и решений с усеченным показателем экспоненциальной части.

Задача построения усеченных формальных решений для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами рассмотрена с позиций эффективной реализации в системах компьютерной алгебры, например, в [11], [5]. В отличие от этих результатов, нами рассмотрена задача построения усеченных решений для уравнений с коэффициентами-усеченными рядами. А.Д.Брюно в [6] предложил основанный на многоугольнике Ньютона алгоритм, который для рядов, входящих в решения, позволяет найти любое число членов. Уравнения, в общем случае, — нелинейные, представленные с помощью полностью (явно) заданных аналитических функций одной или нескольких переменных. Очевидно, это другая задача.

2.2. Maple-пакет `TruncatedSeries`

Для уравнений вида (1) с усеченными коэффициентами представляем нашу реализацию в Maple [12], [13] алгоритмов построения всех усеченных решений. Процедура `LaurentSolution` реализует алгоритм построения всех усеченных лорановых решений. Примеры ее использования имеются в [1], [3], [14]. Процедура `RegularSolution` реализует алгоритм построения всех усеченных регулярных решений. Примеры ее использования — в [2], [3], [14]. В [4] представлена предварительная реализация (процедура `FormalSolution`) алгоритма построения решений с усеченной регулярной частью и решений с усеченным показателем экспоненциальной части. К настоящему моменту процедура `FormalSolution` модифицирована так, что для решений с усеченным показателем экспоненциальной части в ответе содержится больше инвариантной относительно продолжений данного уравнения (1) информации, чем в первоначальной версии процедуры, предложенной в [4].

Процедура `FormalSolution` строит для уравнения (1) решение $e^{Q(x)}Y$ с усеченным показателем (5) так, что $Q(x)$ содержит максимальное число слагаемых, инвариантных относительно продолжений уравнения (1). Дополнительная информация позволяет различать следующие случаи:

(a) для всех продолжений уравнения (1) существует решение вида (6) с $\varsigma = 0$, т.е показатель экспоненциальной части $Q(x)$ построен полностью, индекс ветвления q также инвариантен относительно продолжений уравнения, но не существует инвариантного показателя λ в регулярной части; усеченное решение выводится в виде

$$e^{Q(x)}\, y_{reg}(x^{1/q}); \tag{8}$$

(b) для всех продолжений уравнения (1) существует решение вида (6) с $\varsigma \geq 1$, и инвариантным относительно продолжений уравнения является значение $\kappa_{\sigma+1}$, тогда как $\varepsilon_{\sigma+1}$ не инвариантно относительно продолжений уравнения; усеченное решение выводится в виде

$$e^{Q(x)}\, y_{irr(\kappa_{\sigma+1})}(x); \tag{9}$$

(c) для всех продолжений уравнения (1) существует решение вида (6) с $\varsigma \geq 1$, и значение $\kappa_{\sigma+1}$ не инвариантно относительно продолжений уравнения; усеченное решение выводится в виде

$$e^{Q(x)}\, y_{irr}(x); \tag{10}$$

(d) существует, с одной стороны, продолжение уравнения (1), имеющее решение вида (6) с показателем экспоненциальной части $Q(x)$ ($\varsigma = 0$), и, с другой сороны, — продолжение уравнения, такого решения не имеющее ($\varsigma \geq 1$); усеченное решение выводится в виде

$$e^{Q(x)}\, y_1(x). \tag{11}$$

Результат работы `FormalSolution` — список, каждый элемент которого является суммой выражений вида (4), (8)–(11). Если в ответе оказываются разные слагаемые с одинаковыми обозначением $y_{reg}(x^{1/q})$, либо $y_{irr(\kappa_{\sigma+1})}(x)$, либо $y_{irr}(x)$, то такие слагаемые индексируются как $y_{reg,1}(x^{1/q})$, $y_{reg,2}(x^{1/q})$ и т.д.

2.3. Примеры работы с `FormalSolution`

Графический интерфейс рабочего листа Maple позволяет вводить дифференциальные уравнения в математической форме. Например, присвоим имя $eq1$ следующему уравнению:

$$> eq1 := \mathrm{O}(x^5)\,\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\,x^4}\,y(x) + \left(x^4 + \mathrm{O}(x^5)\right)\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3}\,y(x) +$$
$$\mathrm{O}(x^3)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}\,y(x) + \left(x + \mathrm{O}(x^2)\right)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,y(x) + \left(1 + \mathrm{O}(x^2)\right)\,y(x) = 0 :$$

Продолжения этого уравнения могут иметь как порядок 3, так и порядок 4. Применим процедуру к $eq1$:

$> FormalSolution(eq1, y(x));$

$$\left[\frac{\_c_1 + \mathrm{O}(x)}{x} + y_{irr,\,1}(x) + y_{irr,\,2}(x)\right]$$

Полученный ответ означает, что для всех продолжений уравнения существует одномерное пространство лорановых решений вида $x^{-1}(\_c_1 + O(x))$, где $\_c_1$ обозначает произвольную постоянную. Также для всех продолжений существует двумерное пространство нерегулярных решений, причем показатель экспоненциальной части не инвариантен относительно продолжений уравнения $eq1$ (случай (с), см. (10)).

Отбросим слагаемое $\mathrm{O}(x^5)\,\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\,x^4}\,y(x)$ в предыдущем уравнении, множество всех продолжений полученного уравнения совпадает с множеством тех продолжений $eq1$, которые имеют порядок 3:

$$> eq2 := \left(x^4 + \mathrm{O}(x^5)\right)\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3}\,y(x) + \mathrm{O}(x^3)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}\,y(x) +$$

$$\left(x + \mathrm{O}(x^2)\right)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,y(x) + \left(1 + \mathrm{O}(x^2)\right)\,y(x) = 0 :$$

$> FormalSolution(eq2, y(x));$

$$\left[\frac{\_c_1 + \mathrm{O}(x)}{x} + e^{-\frac{2 RootOf(\_Z^2 + 1, index = 1)}{\sqrt{x}}}\,y_{reg,\,1}(\sqrt{x}) + \right.$$

$$\left. e^{-\frac{2 RootOf(\_Z^2 + 1, index = 2)}{\sqrt{x}}}\,y_{reg,\,2}(\sqrt{x})\right]$$

Из этого ответа следует, что нерегулярные решения всех продолжений уравнения $eq2$ имеют показатель экспоненциальной части $-2\varepsilon/(x^{1/2})$, где ε — корень полинома $\_Z^2 + 1 = 0$. Регулярные части в ответе обозначены $y_{reg\,1}(\sqrt{x})$ и $y_{reg\,2}(\sqrt{x})$ (случай (а), см. (8)), это означает, что не существует инвариантных начал регулярных частей для уравнения $eq2$.

В следующем уравнении неизвестная функция обозначена $z(x)$, поэтому в ответе появляется z:

$$> eq3 := \left(x^8 + \mathrm{O}(x^9)\right) \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3} z(x) + \mathrm{O}(x^5) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} z(x) + \left(3x^2 + \mathrm{O}(x^3)\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} z(x) + \left(2 + \mathrm{O}(x^2)\right) z(x) = 0 :$$

$$> FormalSolution(eq3, z(x));$$

$$\left[e^{\frac{2}{3x}} z_{reg}(x) + z_{irr(2),1}(x) + z_{irr(2),2}(x)\right]$$

Полученный ответ означает, что для всех продолжений уравнения существует одномерное пространство решений с показателем экспоненциальной части $Q(x) = 2/(3x)$. Другие решения всех продолжений также нерегулярны. Индекс $irr(2)$ означает (случай (b), см. (9)), что ведущее слагаемое показателя экспоненциальной части имеет вид ε/x^2, где число ε не инвариантно относительно продолжений уравнения $eq3$.

Для уравнения

$$> eq4 := \left(-64x^6 + 240x^7 + \mathrm{O}(x^8)\right) \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\,x^4} y(x) + \left(-512x^5 + 1680x^6 + \mathrm{O}(x^7)\right) \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3} y(x) + \left(32x^3 - 888x^4 + 1980x^5 + \mathrm{O}(x^6)\right) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2} y(x) + \left(32x^2 + 60x^3 - 180x^4 + \mathrm{O}(x^5)\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} y(x) + \left(-4 + 43x - 150x^2 + 180x^3 + \mathrm{O}(x^4)\right) y(x) = 0 :$$

получаем

$> FormalSolution(eq4, y(x));$

$$\left[e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(x\left(\_c_1+\mathrm{O}(x)\right)+y_{reg,\,1}(\sqrt{x})\right)+\right.$$

$$\left. e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\left(x\left(\_c_2+\mathrm{O}(x)\right)+y_{reg,\,2}(\sqrt{x})\right)\right]$$

Здесь инвариантны относительно продолжений уравнения $eq4$ показатели экспоненциальных частей всех решений, а начала регулярной части инвариантны не все.

Еще одно уравнение:

$$> eq5 := \left(x^6+\mathrm{O}(x^7)\right)\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,x^3}\,y(x)\,+\left(x^4+\mathrm{O}(x^5)\right)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}\,y(x)+$$
$$\mathrm{O}(x^2)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,y(x)+\left(x+\mathrm{O}(x^2)\right)y(x)=0:$$

$> FormalSolution(eq5, y(x));$

$$\left[y_1(x)+y_{irr}(x)+y_{irr(1)}(x)\right]$$

Из этого ответа видно, что все продолжения уравнения $eq5$ имеют трехмерное пространство экспоненциально-логарифмических решений. Первое слагаемое $y_1(x)$ ответа означает, что существуют продолжения уравнения $eq5$, которые имеют одномерное пространство регулярных решений, и существуют продолжения, которые регулярных решений не имеют. Второе слагаемое означает, что все продолжения уравнения $eq5$ имеют такие нерегулярные решения, что степень их ведущего коэффициента показателя экспоненциальной части не инвариантна относительно продолжений (случай (c), см. (10)). И, наконец, третье слагаемое означает, что все продолжения уравнения $eq5$ имеют по крайней мере одномерное пространство нерегулярных решений с показателем экспоненциальной части ε/x, где число ε не инвариантно относительно продолжений уравнения (случай (b), см. (9)).

Пакет и сессии Maple с дополнительными примерами использования пакета `TruncatedSeries` доступны по адресу [14].

Литература

1. Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.
2. Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Регулярные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усеченные ряды. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 1. С. 4–17.
3. Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Процедуры поиска лорановых и регулярных решений линейных дифференциальных уравнений с усеченными степенными рядами в роли коэффициентов. *Труды ИСП РАН.* 2019. Т. 31. № 5. С. 233–248.
4. Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е. Усеченные ряды и формальные экспоненциально-логарифмические решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 10. С. 1664–1675.
5. Баркату М., Ришар-Жюнг Ф. Формальные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений. *Программирование.* 1997. № 2. С. 24–42.
6. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. *Усп. мат. наук.* 2004. Т. 59. Вып. 3(357). С. 31–80.
7. Abramov S.A., Bronstein M., Petkovšek M. On polynomial solutions of linear operator equations. *Proc. of ISSAC'95.* 1995. P. 290–296.

8. Heffter L. Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1894.
9. Schlesinger L. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Vol. 1. Teubner, Leipzig, 1895.
10. Singer M.F. Formal solutions of differential equations. *J. of Symbolic Computation*. 1990. Vol. 10. P. 59–94.
11. Tournier E. Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR. Étude théorique et réalisation. Thèse d'État. Université de Grenoble. 1987.
12. Maple online help
http://www.maplesoft.com/support/help/
13. Портал Maple по-русски
https://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=154454
14. Страница пакета `TruncatedSeries`
http://www.ccas.ru/ca/TruncatedSeries

Благодарности

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.
Работа поддержана РФФИ, грант 19-01-00032.

Сведения об авторах
Абрамов Сергей Александрович, д.ф-м.н.,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление", Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, гл.н.с.,
sergeyabramov@mail.ru
Рябенко Анна Андреевна, к.ф-м.н.,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление", Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, с.н.с.,
anna.ryabenko@gmail.com
Хмельнов Денис Евгеньевич, к.ф-м.н.,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление", Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, м.н.с.,
dennis_khmelnov@mail.ru