При $Q(n) \geqslant 2^{c_3 n^2}$, где c_3 — некоторая константа, задачу можно решить с помощью тривиальной неуниформной программы за время $O(n^2 \log n)$. Окончательно для неуниформной сложности задачи о кратчайших путях получаем

$$T_{\text{Б}}(n,\ Q(n)) = \begin{cases} O(T_{\text{Б}}(n)) & \text{при } Q(n) < n^{c_2}, \\ O\left(\dfrac{T_{\text{Б}}(n)(\log n)^{1/2}}{(\log Q(n))^{1/2}}\right) & \text{при } n^{c_2} \leqslant Q(n) < 2^{c_3 n^2}, \\ O(T_{\text{Б}}(n)/n) & \text{при } Q(n) \geqslant 2^{c_3 n^2}, \end{cases}$$

где $T_{\text{Б}}(n)$ — сложность униформного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патерсон М. С., Фишер М. Дж., Мейер А. Р. Улучшенный метод частичного перекрытия для умножения, выполняемого в темпе поступления информации// //Киб. сборник. 1977. Вып. 14. С. 77—94.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М., 1979.
3. Strassen V. Relative bilinear complexity and matrix multiplication//Jowrnal fur die reine und angevandte Mathematic. 1987. Bd 375/376. S. 406—443.
4. Pan V. The bit-operation complexity of matrix multiplication and of all pairs shortest path problem//Comput. Math. Applics. 1981. 7, N 5. P. 431—439.

Поступила в редакцию 27.05.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 15, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА. 1989. № 3

УДК 512.7

С. А. Абрамов

ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОИСКОМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поиск точных (формульных) решений дифференциальных и разностных уравнений — это одна из главных проблем компьютерной алгебры. Ниже предлагается довольно простой алгоритм, применимый к линейным уравнениям с полиномиальными коэффициентами и позволяющий построить все полиномиальные решения. При этом допускается, что уравнение не является однородным и его правой частью служит полином.

Ранее в [1] автором были рассмотрены разностные уравнения с постоянными коэффициентами и рациональными правыми частями. В настоящей работе развивается предложенный в [1] подход. Попрежнему в качестве полей коэффициентов привлекаются так называемые подходящие поля, т. е. поля характеристики 0 с алгоритмом нахождения целочисленных корней уравнений вида $p(x)=0$, где $p(x) \in K[x]$. При этом под целочисленным корнем понимается корень вида $n \cdot 1$, где $n \in \mathbf{Z}$, а 1 — единица поля K. В качестве примеров подходящих полей приведем поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$, поле рационально-комплексных чисел $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, поле рациональных функций и поле алгебраических функций над $\mathbf{Q}$ от произвольного числа переменных $t_1, \ldots, t_m$. В дальнейшем под полем K понимается некоторое подходящее поле. Удобно будет считать степенью нулевого полинома отрицательную бесконечность: $\deg 0 = -\infty$. Если $p(x) \in K[x]$, то неравенство $p(x)\neq 0$ будет означать, что полином $p(x)$ не равен нулю как элемент кольца $K[x]$. В аналогичном смысле надо понимать утверждение о равенстве полинома нулю.

Пусть дано линейное дифференциальное или разностное уравнение n-го порядка

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,\delta^\nu y(x)=b(x), \tag{1}$$

в котором $\delta\in\{d/dx,\ \Delta\}$, $a_0(x),\ \ldots,\ a_n(x)$, $b(x)\in K[x]$. (Напомним, что $\Delta y(x)=y(x+1)-y(x)$.) Будем предполагать, что в уравнении (1) $a_0(x)\neq 0$.

Нас интересует, обладает ли (1) полиномиальным решением

$$y(x)=y_kx^k+\ldots+y_1x+y_0. \tag{2}$$

Понятно, что степень $y(x)$, т. е. фигурирующее в (2) число k, для произвольных полиномов $a_0(x),\ \ldots,\ a_n(x)$, $b(x)$ вычисляется не столь просто, как в случае постоянных коэффициентов (полиномы Лежандра любых степеней удовлетворяют уравнению второго порядка). Поэтому мы начнем с задачи верхнего оценивания степени полинома $y(x)$.

Очевидно, что $\delta^\nu x^k=k(k-1)\ldots(k-\nu+1)x^{k-\nu}+\ldots$ для любого натурального $\nu\leqslant k$. Очевидно так же, что при $\nu\leqslant k$, т. е. при $\nu\leqslant\deg y(x)$, выполнено

$$\deg(a_\nu(x)\,\delta^\nu y(x))=\deg a_\nu(x)+\deg y(x)-\nu.$$

Определим для оператора

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,\delta^\nu,\quad a_0(x)\neq 0, \tag{3}$$

задающего левую часть (1), целую неотрицательную величину m, положив

$$m=\max_{0\leqslant\nu\leqslant n}(\deg a_\nu(x)-\nu) \tag{4}$$

(неотрицательность m следует из неравенства $a_0(x)\neq 0$). Пусть $\deg a_\nu(x)-\nu=m$ для $\nu=\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_\varkappa$, $0\leqslant\nu_1<\ldots<\nu_\varkappa\leqslant n$. Можно заметить следующее: если $\deg y(x)=k\geqslant m$, то применение (3) к $y(x)$ дает полином, степень которого не превосходит $k+m$, а коэффициент при x^{k+m} равен

$$y_k\sum_{i=1}^{\varkappa} lc(a_{\nu_i}(x))\,k(k-1)\ldots(k-\nu_i+1),$$

где $lc(\ldots)$ — старший коэффициент аргумента-полинома. Итак, исходя из оператора (3), можно вычислить неотрицательное целое m и построить ненулевой полином

$$\tilde a(r)=\sum_{i=1}^{\varkappa} lc(a_{\nu_i}(x))\,r(r-1)\ldots(r-\nu_i+1) \tag{5}$$

(здесь r — новая переменная) так, что если $\deg y(x)=k\geqslant n$, то левая часть (1) имеет степень, не превосходящую $k+m$, и коэффициент при x^{k+m} равен $\tilde a(k)y_k$. Отметим, что предположение $k\geqslant n$ можно ослабить: достаточно выполнения неравенства

$$k\geqslant\deg\tilde a(r). \tag{6}$$

Найдем верхнюю границу k. Пусть имеют место равенства (1), (2) и неравенство (6). Возможны следующие варианты: $k+m=\deg b(x)$ и $k+m>\deg b(x)$, т. е. либо $k=\deg b(x)-m$, либо $\tilde{a}(k)=0$. Это означает, что k не превосходит

$$\max(\deg \tilde{a}(r),\ \deg b(x)-m,\ z), \tag{7}$$

где z — наибольший целочисленный корень уравнения $\tilde{a}(r)=0$.

Оценка степени получена, и далее можно применять алгоритм (метод) неопределенных коэффициентов. Но это неудобно, так как за счет компоненты z величина (7) может быть довольно большой и матрица системы уравнений потребует для своего построения непомерных затрат действий и памяти. Удобнее здесь применить не общий алгоритм неопределенных коэффициентов, а его модификацию — алгоритм последовательного определения коэффициентов. Если $y(x)$ разыскивается в виде полинома степени не выше, чем N, то при $N\geqslant\deg \tilde{a}(r)$ коэффициент y_N удовлетворяет равенству

$$\tilde{a}(N)\,y_N=b_{N+m}. \tag{8}$$

Можно получить похожее равенство и для случая $N<\deg \tilde{a}(r)$. Полезно ввести последовательность неотрицательных чисел $m_0, \ldots, m_n$ и последовательность полиномов $\tilde{a}_0(r), \ldots, \tilde{a}_n(r)$, где m_i и $\tilde{a}_i(r)$ определены для оператора $\sum\limits_{\nu=0}^{n-i} a_\nu(x)\,\delta^\nu$ точно так же, как определялись m и $\tilde{a}(r)$ для оператора (3); таким образом, $m_0=m$, $\tilde{a}_0(r)=\tilde{a}(r)$. Тогда при $N<\deg \tilde{a}(r)$ и тем самым при $N<n$ будет иметь место равенство

$$\tilde{a}_{n-N}(N)\,y_N=b_{N+m_{n-N}}.$$

Можно охватить оба случая $N\geqslant\deg \tilde{a}(r)$ и $N<\deg \tilde{a}(r)$ и написать

$$\tilde{a}_{n\dot{-}N}(N)\,y_N=b_{N+m_{n\dot{-}N}}, \tag{9}$$

понимая под $n\dot{-}N$ разность $n-N$, если $n\geqslant N$, и 0 в противном случае. Если вычислен y_N, то от (1) можно перейти к уравнению для $y^*(x)=y(x)-y_N x^N$. В этом случае левая часть уравнения остается старой, а правая преобразуется следующим образом:

$$b(x)-y_N\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,\delta^\nu x^N. \tag{10}$$

Степень $y^*(x)$ не должна превосходить $N-1$, и, действуя этим способом, можно находить один коэффициент за другим. Сложность, однако, состоит в том, что если $\tilde{a}_{n\dot{-}N}(N)=0$, то (9) не дает возможности определить y_N. Поэтому проведем некоторую корректировку алгоритма последовательного определения коэффициентов. Будет удобным предварительно несколько обобщить исходную задачу, и мы считаем, что коэффициенты полинома $b(x)$ могут быть линейными полиномами (т. е. полиномами степени не выше первой) некоторых параметров. Пусть кроме уравнения с параметризованной правой частью дано неотрицательное целое N. Если придавать параметрам различные значения из K, то будут получаться индивидуальные уравнения вида (1). Каждое уравнение обладает множеством полиномиальных решений степени, меньшей или равной N. Задача состоит в том, чтобы найти объединение всех этих множеств. Поиск решений уравнения (1), имеющих вид полиномов степени, меньшей или равной N, является частным случаем задачи, в котором число параметров равно нулю.

Теперь покажем, как алгоритм последовательного определения коэффициентов может быть применен для решения сформулированной более общей задачи. Искомое множество полиномов, если оно не окажется пустым, будет представлено одним полиномом, коэффициенты которого зависят от ряда произвольных постоянных.

Пусть в (9) $\tilde{a}_{n \dot{-} N}(N) \neq 0$, тогда y_N определяется как линейный полином относительно параметров, входящих в $b_{N+m_{n \dot{-} N}}$. Если же $\tilde{a}_{n \dot{-} N}(N) = 0$, то решение, имеющее вид полинома степени, не превосходящей N, может существовать, если значения параметров удовлетворяют линейному алгебраическому уравнению (назовем его связью) $b_{N+m_{n \dot{-} N}} = 0$. Тривиальную связь $0=0$ можно игнорировать, а связь вида $\gamma=0$, где γ — ненулевой элемент поля K, говорит о том, что искомое множество полиномов пусто. В последнем случае вычисления следует прекратить. Остальные связи позволяют уменьшать число параметров, находящихся в рассмотрении. Если $\tilde{a}_{n \dot{-} N}(N) = 0$, то будем оставлять коэффициент y_N неопределенным и переход к новой правой части по формуле (10) внесет в нее дополнительный параметр y_N. Количество возникающих связей, вообще говоря, больше количества такого рода дополнительных параметров, т. е. если $m_{n \dot{-} N} > m_{n \dot{-} (N-1)}$, то при переходе от N к $N-1$ возникает $m_{n \dot{-} N} - m_{n \dot{-} (N-1)}$ добавочных связей

$$b_{N+m_{n \dot{-} N}-1} = 0, \ \ldots, \ b_{N+m_{n \dot{-} (N-1)}} = 0$$

(общий принцип порождения связей таков: всякий раз, когда для применения очередного шага алгоритма последовательного определения коэффициентов необходимо, чтобы значения каких-то коэффициентов правой части были равны нулю, эти коэффициенты автоматически приравниваются нулю). Вполне возможно, что если начальное значение N было выбрано равным значению (7), то после завершения переходов $N \to N-1 \to \ldots \to 1 \to 0$ обнаружится недостаточность системы возникающих связей для исключения всех параметров из линейных полиномов $y_N, y_{N-1}, \ldots, y_1, y_0$. Параметры, оставшиеся после завершения процесса исключения, можно считать произвольными постоянными.

Покажем теперь, как размеры системы связей могут быть оценены через порядок уравнения (1) и через степени полиномов $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, $b(x)$. Новый неопределенный коэффициент (параметр) y_M, $0 \leqslant y_M \leqslant N$, возникает в тот момент, когда $\tilde{a}_{n \dot{-} M}(M) = 0$. Это значит, что число неопределенных коэффициентов не превзойдет суммы числа корней уравнения $\tilde{a}_0(r)=0$ и n — количества полиномов $\tilde{a}_1(r), \ldots, \tilde{a}_n(r)$, т. е. не превзойдет $2n$. Из описания процесса порождения связей следует, что их общее число не превосходит величины

$$n + (1+m_0-m_1) + (1+m_1-m_2) + \ldots + (1+m_{n-1}-m_n) =$$
$$= n + m_0 - m_n \leqslant n + m_0,$$

где n — наибольшее число связей.

Таким образом, общее число связей не превосходит $2n+m$, где m определено формулой (4).

Подчеркнем, что для исключения параметров получаемые связи могут использоваться как одна за другой по мере их появления, так и все одновременно. В последнем случае связи используются в тот момент, когда все они уже получены и образуют систему линейных алгебраических уравнений с матрицей, размеры которой не превосходят $(2n+m)\times 2n$.

Рассмотрение последовательностей неотрицательных целых чисел $m_0, \ldots, m_n$ и полиномов $\tilde{a}_0(r), \ldots, \tilde{a}_n(r)$ позволяет сформулировать достаточные условия существования полиномиального решения уравнения (1). Вывод этих условий основывается на следующем наблюдении: препятствием к построению полиномиального решения является несовместность системы связей, поэтому достаточно выделить ситуацию, когда вообще не возникает никаких связей, отличных от тривиальных равенств $0=0$.

Разберем вначале случай однородного уравнения: пусть в уравнении (1) $b(x)=0$. После сказанного выше очевидно, что если N — наименьшее из целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию $\tilde{a}_{n\dot{-}N}(N)=0$, то существует решение однородного уравнения в виде полинома степени N и ни один полином более низкой степени не удовлетворяет этому уравнению. Решение в виде полинома степени N определено однозначно с точностью до постоянного множителя.

Пусть теперь уравнение (1) неоднородно, т. е. $\deg b(x)\geqslant 0$. Тогда если N — такое неотрицательное целое, что $N+m_{n\dot{-}N}=\deg b(x)$, и для всех $M\leqslant N$ выполнено $\tilde{a}_{n\dot{-}N}(M)\neq 0$, то существует единственное решение уравнения (1) в виде полинома степени N и ни один полином более низкой степени не удовлетворяет этому уравнению.

Те достаточные условия, которые сформулированы в справочнике [2], фактически являются частными случаями приведенных выше. В [2] рассмотрены уравнения вида (1), для которых обеспечиваются (в наших обозначениях) равенства полиномов $\tilde{a}_0(r)=\tilde{a}_1(r)=\ldots=\tilde{a}_n(r)$ или хотя бы равенства чисел $m_0=m_1=\ldots=m_n$. Заметим также, что в [2] речь идет исключительно о дифференциальных уравнениях, а разностные уравнения не затрагиваются вовсе.

В заключение обратим внимание на следующее. Довольно часто возникает задача решения дифференциального или разностного уравнения, зависящего от ряда параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, и при этом предполагается, что будет найдено решение, зависящее как от некоторых произвольных постоянных, так и от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Параметры при этом устанавливают соответствие между индивидуальными уравнениями и их решениями. В некоторых случаях такая задача может быть решена описанным выше алгоритмом. Пусть уравнение (1) таково, что полиномы $a_0(x), \ldots, a_n(x), b(x)$, имеют коэффициенты, являющиеся линейными полиномами от $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, и пусть при этом полиномы $\tilde{a}_0(r), \ldots, \tilde{a}_n(r)$ не зависят от $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ (принадлежат $K[r]$). Тогда можно поступать так, как предложено выше, но при этом параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ должны исключаться с помощью возникающих связей только при невозможности исключения неопределенных коэффициентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов С. А. Решение линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами в поле рациональных функций//ЖВМ и МФ. 1974. **14**, № 4. С. 1067—1070.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971. С. 576.

Поступила в редакцию
04.11.88