Труды XII Байкальской международной конференции. Пленарные доклады, с. 91–99, 2001.

Двойственный подход к решению систем линейных равенств и неравенств[1]

А.И. ГОЛИКОВ, Ю.Г. ЕВТУШЕНКО

Вычислительный центр РАН

Пересмотрено 10 марта 2004

Рассматривается задача о решении систем линейных равенств и неравенств. Вводятся сопряженные и альтернативные системы к исходной. Размерность переменных в этих задачах равна числу ограничений в исходной задаче. Решение сводится к безусловной минимизации нормы невязки (свертки равенств и неравенств) исходной или альтернативной системы. Если минимальная невязка равна нулю, то получено одно из решений системы, невязку которой минимизировали, и установлена несовместность оставшейся системы. Если минимальная невязка не равна нулю, то данная система несовместна, и по простым формулам находится нормальное решение оставшейся совместной системы. С помощью сопряженной системы формулируется взаимно двойственная задача к задаче безусловной минимизации нормы невязок. Двойственность позволяет дать простейшее конструктивное доказательство теорем об альтернативах. В качестве примера предлагаемого подхода рассматриваются нетрадиционные условия оптимальности линейного программирования. Формулируется несовместная система, которая является альтернативной к системе необходимых и достаточных условий оптимальности. В результате однократной безусловной минимизации гладкой кусочно-квадратичной функции, размерность которой на единицу больше размерности переменных прямой задачи, вычисляются по простым формулам нормальные решения прямой и оптимальные нормальные невязки двойственной задач линейного программирования.

Решению систем равенств и неравенств посвящена обширная литература. При изучении вопросов, связанных с решением систем, важное место занимает случай, когда рассматриваемая система решений не имеет. И.И. Еремин такие задачи называет несобственными, они встречаются на практике. Подходы к решению таких задач, предложены, в частности, в работах [1]–[4]. Наиболее распространенным методом решения систем равенств и неравенств является их сведение к задаче безусловной минимизации невязок исходной системы. К этим работам тесно примыкают исследования по альтернативным системам [5]–[9]. Хорошо известно, что с каждой системой линейных уравнений и неравенств связана альтернативная система такая, что обе системы не могут иметь решения одновременно и разрешима только одна из них. Априори неизвестно, имеет ли данная система решения. Поэтому следует, во-первых, выяснить разрешима ли заданная система и, во-вторых, если она разрешима, найти ее решение.

В данной работе исследуются линейные системы равенств и неравенств. Обоснование предлагаемого подхода проводится на базе рассуждений, близких к теории двойственности в нелинейном программировании. Вводятся системы, сопряженные и альтернативные к

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта N 01-01-00804, и по программе государственной поддержки ведущих научных школ, код проекта N 00-15-96080.

исходной системе. Размерность переменных в этих задачах равна числу ограничений в исходной задаче. Решение сводится к безусловной минимизации нормы невязки (свертки равенств и неравенств) исходной или альтернативной к ней системы.

Если даны две альтернативные системы, то для нахождения решения разрешимой задачи достаточно минимизировать невязку какой-либо одной из двух альтернативных систем. Такая задача дает более богатую информацию, чем решение исходной системы. Если в результате минимизации для выбранной системы получена нулевая невязка, то решение задачи безусловной минимизации является и решением выбранной системы. При этом можно утверждать, что вторая система не имеет решения. Если минимальная невязка выбранной системы не равна нулю, то эта система не имеет решения, а вторая система разрешима, и по результатам проведенной минимизации по простым формулам вычисляется решение этой системы с минимальной нормой (нормальное решение).

Аналогично [4] с помощью сопряженной системы формулируется взаимно двойственная задача к задаче безусловной минимизации нормы невязок. Двойственность позволяет дать простейшее конструктивное доказательство теорем об альтернативах.

В качестве примера предлагаемого подхода рассматриваются нетрадиционные условия оптимальности линейного программирования. Формулируется несовместная система, которая является альтернативной к системе необходимых и достаточных условий оптимальности. В результате однократной безусловной минимизации гладкой кусочно-квадратичной функции, размерность которой на единицу больше размерности переменных прямой задачи, вычисляются по простым формулам нормальные решения прямой и оптимальные невязки с минимальной нормой двойственной задач линейного программирования.

Подчеркнем, что благодаря различию размерностей переменных альтернативных систем для численного решения заданной системы линейных уравнений и неравенств может оказаться целесообразным переход от исходной совместной системы к минимизации невязки альтернативной несовместной системы. Такая редукция может привести к задаче безусловной минимизации меньшей размерности и дать возможность вычислить нормальное решение исходной системы.

Пусть A — матрица $m \times n$ — задана в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Здесь прямоугольные матрицы A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} имеют размерности $m_1 \times n_1$, $m_1 \times n_2$, $m_2 \times n_1$, $m_2 \times n_2$ сответственно. Пусть векторы $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ имеют разбиение $x^\top = [x_1^\top, x_2^\top]$, $u^\top = [u_1^\top, u_2^\top]$, $b^\top = [b_1^\top, b_2^\top]$, где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$, $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$. Введем два вспомогательных множества

$$\Pi_x = \{[x_1, x_2] : x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}_+,\ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}\}, \qquad \Pi_u = \{[u_1, u_2] : u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+,\ u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}\}.$$

Рассмотрим систему линейных равенств и неравенств

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \qquad x_1 \geq 0_{n_1}. \tag{I}$$

Определим *сопряженную систему* к (I)

$$A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2 \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top z_1 + A_{22}^\top z_2 = 0_{n_2}, \qquad z_1 \geq 0_{m_1}. \tag{I$'$}$$

Введем *альтернативную* к (I) систему

$$A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2 \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2 = 0_{n_2}, \qquad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho, \quad u_1 \geq 0_{m_1}. \tag{II}$$

Здесь $\rho > 0$ — произвольное фиксированное положительное число. Отметим, что требование положительности ρ автоматически предполагает выполнение условия $\|b\| \neq 0$.

Введем вектор $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, представимый в виде $w^\top = [w_1^\top, w_2^\top, w_3]$, где $w_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $w_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w_3 \in \in \mathbb{R}^1$, и вспомогательное множество $\Pi_w = \{[w_1, w_2, w_3] : w_1 \in \mathbb{R}^{n_1}_+,\ w_2 \in \mathbb{R}^{n_2},\ w_3 \in \in \mathbb{R}^1\}$.

Для системы (II) сопряженная система имеет вид

$$A_{11}w_1 + A_{12}w_2 - b_1w_3 \geq 0_{m_1}, \quad A_{21}w_1 + A_{22}w_2 - b_2w_3 = 0_{m_2}, \qquad w_1 \geq 0_{n_1}. \tag{II$'$}$$

Множества решений системы (I), сопряженной системы (I$'$), альтернативной системы (II) и системы (II$'$) обозначим соответственно через X, Z, U и W. В отличие от (I) и (II) системы (I$'$) и (II$'$) всегда имеют решения, так как $0_m \in Z$ и $0_{n+1} \in W$.

Системы (I) и (II) не могут быть одновременно разрешимы, т.е. множества X и U не могут быть одновременно непустыми. Предположим противное, пусть существуют x^* — решение системы (I) и u^* — решение системы (II). Подставим в (I) решение x^* и скалярно умножим первое неравенство в (I) на u_1^*, второе равенство — на u_2^*. После сложения результатов и простейших преобразований получим

$$x_1^{*\top}(A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*) + x_2^{*\top}(A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*) \geq b_1^\top u_1^* + b_2^\top u_2^*.$$

Согласно (II) левая часть этого неравенства неположительна, а правая часть в строго положительна, так как $A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^* \leq 0_{n_1}$ и $b_1^\top u_1^* + b_2^\top u_2^* = \rho > 0$. Приходим к противоречию. Следовательно системы (I), (II) не могут одновременно иметь решения. Ниже из теорем 2 и 4 будет следовать, что всегда имеет решение одна и только одна из систем: либо (I), либо (II). Поэтому эти системы называются альтернативными.

Альтернативная к альтернативной задаче (II) сводится к исходной задаче (I). Действительно, система, альтернативная к (II), имеет вид

$$A_{11}w_1 + A_{12}w_2 - b_1w_3 \geq 0_{m_1}, \quad A_{21}w_1 + A_{22}w_2 - b_2w_3 = 0_{m_2}, \qquad \rho w_3 = \rho', \quad w_1 \geq 0_{n_1}, \tag{1}$$

где $\rho' > 0$ — произвольное положительное число. Поэтому $w_3 = \rho'/\rho > 0$. Сделав в (1) замену $x_1 = w_1/w_3$, $x_2 = w_2/w_3$, приходим к исходной системе (I).

Проекцией точки $\bar{x}$ на непустое замкнутое множество X назовем точку $x_* \in X$, ближайшую к точке $\bar{x}$, т.е. решение задачи

$$\min_{x \in X} \frac{\|\bar{x} - x\|^2}{2} = \frac{\|\bar{x} - x_*\|^2}{2}.$$

Будем писать $x_* = \mathrm{pr}\,(\bar{x}, X)$, расстояние от точки $\bar{x}$ до множества X обозначим $\mathrm{dist}\,(\bar{x}, X) = = \|x_* - \bar{x}\|$.

Через $\mathrm{pen}\,(w, W)$ обозначим квадратичный штраф в точке w за нарушение условия $w \in W$. Например, для множеств X, U и для любых $x \in \Pi_x$ и $u \in \Pi_u$ соответственно имеем

$$\mathrm{pen}(x, X) = [\|(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2)_+\|^2 + \|b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2\|^2]^{1/2}, \tag{2}$$
$$\mathrm{pen}(u, U) = [\|(A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2)_+\|^2 + \|A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2\|^2 + (\rho - b_1^\top u_1 - b_2^\top u_2)^2]^{1/2}. \tag{3}$$

Здесь и ниже для простоты считаем, что используется евклидова норма; a_+ есть неотрицательная часть вектора a, т.е. i-я компонента вектора a_+ совпадает с i-й компонентой вектора a, если она неотрицательна, и равна нулю в противном случае.

Если $x \in \Pi_x$, то $\mathrm{pen}\,(x, X) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in X$. Аналогично, если $u \in \Pi_u$, то $\mathrm{pen}\,(u, U) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in U$.

Для проверки разрешимости той или иной системы и нахождения соответствующего решения будем использовать методы безусловной минимизации, примененные к любой из следующих задач:

$$\begin{aligned} I_1 &= \min_{x\in\Pi_x} \frac{\|(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2)_+\|^2 + \|b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2\|^2}{2}, \\ I_2 &= \min_{u\in\Pi_u} \frac{\|(A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2)_+\|^2 + \|A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2\|^2 + (\rho - b_1^\top u_1 - b_2^\top u_2)^2}{2}. \end{aligned}$$

С использованием обозначений (2) – (3) эти задачи можно переписать соответственно следующим образом:

$$I_1 = \min_{x\in\Pi_x} \frac{[\mathrm{pen}\,(x, X)]^2}{2}, \tag{4}$$

$$I_2 = \min_{u\in\Pi_u} \frac{[\mathrm{pen}\,(u, U)]^2}{2}. \tag{5}$$

Строго говоря, (4) и (5) не суть задачи безусловной минимизации, так как в них присутствуют ограничения на знаки векторов x_1 и u_1, однако поскольку большинство методов безусловной минимизации с помощью простейших модификаций может учитывать наличие ограничений на знак переменных, то сохраним за (4) и (5) этот термин.

Введем следующие две задачи квадратичного программирования:

$$I_1^d = \max_{z\in Z} \left\{ b^\top z - \frac{\|z\|^2}{2} \right\}, \tag{6}$$

$$I_2^d = \max_{w\in W} \left\{ \rho w_3 - \frac{\|w\|^2}{2} \right\}. \tag{7}$$

Множества Z и W всегда непусты, так как содержат нулевые векторы. В отличие от систем (I), (II), которые могут быть разрешимы или неразрешимы, задачи (4) – (7) всегда имеют решения, причем задачи (6) и (7) имеют единственные решения. Задачи (6) и (7) можно назвать взаимно двойственными к (4) и (5) соответственно. Формально задачи безусловной минимизации (4) и (5) не имеют функцию Лагранжа и, следовательно, для них нельзя непосредственно построить двойственные задачи. Тем не менее с помощью введения дополнительных переменных можно построить искусственные ограничения и получить эквивалентные задачи нелинейного программирования, для которых определены двойственные задачи. В следующей теореме устанавливается связь между взаимно двойственными задачами (4) и (6).

Теорема 1. *Всякое решение x^* задачи* (4) *определяет единственное решение z^* задачи* (6) *по формулам*

$$z_1^* = (b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+, \qquad z_2^* = b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^* \tag{8}$$

и справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \|z^*\|^2 = b^\top z^*, \quad z^* = \mathrm{pr}\,(b, Z), \quad \|z^*\| = \mathrm{pen}\,(x^*, X), \\ \|b - z^*\| = \mathrm{dist}\,(b, Z), \quad [\mathrm{pen}\,(x^*, X)]^2 + [\mathrm{dist}\,(b, Z)]^2 = \|b\|^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Из теоремы 1 следует, что $\|z^*\| \le \|b\|$, $b^\top z^* \ge 0$. Вектор z^* лежит в полусфере с центром в начале координат и радиусом, равным $\|b\|$, причем z^* находится в той половине сферы, где вектор z^* образует острый угол с вектором b.

Соотношение (9) выражает равенство оптимальных значений целевых функций взаимно двойственных задач (4) и (6). Это равенство в силу (8) выражено только через решение z^* двойственной задачи (6).

Следующая теорема является одной из возможных формулировок теорем об альтернативах систем (I) и (II). При этом за основу берется безусловная минимизация невязок системы (I).

Теорема 2. *Пусть* $x^{*\top} = [x_1^{*\top}, x_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (4), $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ *— решение задачи* (6), *определяемое по формулам* (8); *тогда*

1. *Если* $\|z^*\| = 0$, *то* $I_1 = I_1^d = 0$, $\mathrm{dist}\,(b, Z) = \|b\|$ *и система* (I) *разрешима, одним из ее решений является* x^*; *система* (II) *неразрешима;*

2. *Если* $\|z^*\| \neq 0$, *то* $I_1 = I_1^d > 0$, $\mathrm{dist}\,(b, Z) < \|b\|$ *и система* (I) *неразрешима; система* (II) *разрешима и вектор* $u^* = \rho z^*/\|z^*\|^2$ *— ее решение с минимальной евклидовой нормой (нормальное решение).*

Пусть вектор $r \in \mathbb{R}^{n+1}$ задан в виде $r^\top = [0_n^\top, \rho]$. Следующая теорема устанавливает связь между взаимно двойственными задачами (5) и (7).

Теорема 3. *Пусть* $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (5). *Тогда решение задачи* (7) *определяется через решение задачи* (5) *по формулам*

$$w_1^* = (A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*)_+, \quad w_2^* = A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*, \quad w_3^* = \rho - b_1^\top u_1^* - b_2^\top u_2^*, \tag{10}$$

причем вектор $w^* = \mathrm{pr}\,(r, W)$ *и имеют место следующие свойства:*

$$\begin{gathered} \|w^*\|^2 = \rho w_3^*, \quad \|w^*\| = \mathrm{pen}\,(u^*, U), \quad \|r - w^*\| = \mathrm{dist}\,(r, W), \\ \|w^*\| \leq \rho, \quad 0 \leq w_3^* \leq \rho, \quad \|w_1^*\|^2 + \|w_2^*\|^2 < \rho/4. \end{gathered} \tag{11}$$

В теореме 3 соотношение (11) в силу (10) выражает через решение w^* задачи (7) равенство оптимальных значений целевых функций взаимно двойственных задач (5) и (7).

Следующая теорема об альтернативах может быть получена из теоремы 2, если применить безусловную минимизацию к системе (II).

Теорема 4. *Пусть* $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (5), $w^{*\top} = [w_1^{*\top}, w_2^{*\top}, w_3^*]$ *— решение задачи* (7), *определяемое по формулам* (10); *тогда*

1. *Если* $\|w^*\| = 0$, *то* $I_2 = I_2^d = 0$, *система* (II) *разрешима, одним из ее решений является* u^*. *Система* (I) *неразрешима, так как системы* (I) *и* (II) *не могут одновременно иметь решения.*

2. *Если* $\|w^*\| \neq 0$, *то* $w_3^* > 0$, $I_1 = I_1^d > 0$, *система* (II) *неразрешима; система* (I) *разрешима и вектор* $x_1^* = w_1^*/w_3^*$, $x_2^* = w_2^*/w_3^*$ *— ее решение с минимальной евклидовой нормой (нормальное решение).*

Возможны различные варианты представления альтернативной системы (II). Как следует из приведенных теорем, система, альтернативная к (I), получается из сопряженной системы (I′) путем добавления условия, исключающего возможность тривиального решения. Например, можно потребовать для решений сопряженной системы (I′) выполнения условия $b^\top u > 0$ (как в лемме Фаркаша), либо условия $b^\top u = 1$ (как в теореме Гейла), либо наложить нелинейное условие $\|u\|^2 = \rho$, где $\rho > 0$ — произвольная фиксированная величина, и т.д.

Применим приведенные выше результаты к задачам линейного программирования (ЛП). Пусть прямая задача ЛП задана в каноническом виде

$$\min_{x \in X} c^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

Здесь и ниже A — матрица $m \times n$ ранга m, $m < n$; дефект матрицы A, равный $n - m$, обозначим через ν; векторы c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ниже вместо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности (4) для задач ЛП воспользуемся условиями из [10]. Для этого введем матрицу K размера $\nu \times n$. В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы A. Таким образом, im $K^\top$ является ортогональным дополнением к пространству im $A^\top$. Поэтому

$$\text{im } K^\top = \ker A, \qquad AK^\top = 0_{m\nu}, \qquad \mathbb{R}^n = \text{im } A^\top \oplus \text{im } K^\top. \tag{12}$$

Здесь через 0_{ij} обозначена $i \times j$ матрица с нулевыми элементами.

Если матрицу A представить в блочном виде $A = [B \mid N]$, где B невырожденна, то матрицу K можно записать в следующем виде: $K = [-N^\top (B^{-1})^\top \mid I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса-Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m \mid N]$, тогда матрица K представима в виде $K = [-N^\top \mid I_\nu]$. В ряде случаев построение матрицы K упрощается. Например, пусть задача ЛП имеет ограничения типа неравенств $Nz \geq b$, где N — матрица $m \times \nu$, $z \in \mathbb{R}^\nu_+$. Вводя дополнительные переменные $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ представим как объединение векторов z, ξ, т.е. $x^\top = [z^\top, \xi^\top]$. Тогда допустимое множество запишется в том же виде, что и в задаче (P), где матрица $A = [N \mid -I_m]$. Тогда $K = [I_\nu \mid N^\top]$.

Определим вектор $d = Kc \in \mathbb{R}^\nu$ и вектор невязок

$$v = c - A^\top u. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение два аффинных множества

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}, \qquad \bar{V} = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d\}.$$

Всюду ниже через $\bar{x}$ и $\bar{v}$ обозначим произвольные фиксированные n-мерные векторы, удовлетворяющие соответственно условиям $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{v} \in \bar{V}$. Заметим, что некоторые компоненты векторов $\bar{x}$, $\bar{v}$ могут быть отрицательными. В простейшем варианте можно взять $\bar{v} = c$. В силу того что матрица A имеет ранг m и $n > m$, всегда $\bar{X} \neq \emptyset$ и $\bar{V} \neq \emptyset$. Вектор $\bar{v} \in \bar{V}$ может быть очень легко найден. Для этого достаточно взять произвольный вектор $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, тогда вектор $\bar{v}$ определяется следующим образом:

$$\bar{v} = c - A^\top \bar{u}. \tag{14}$$

Принимая во внимание (12) and (13), приходим к выводу, что вектор $\bar{v}$ принадлежит $\bar{V}$.

Следуя [10], необходимые и достаточные условия минимума в задаче (P) можно записать в виде системы линейных уравнений с неотрицательными переменными

$$\begin{bmatrix} A & 0_{mn} \\ 0_{\nu n} & K \\ \bar{v}^\top & \bar{x}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \\ \bar{x}^\top \bar{v} \end{bmatrix}, \quad x \geq 0_n, \quad v \geq 0_n. \tag{15}$$

Если задача ЛП (P) имеет решение, то система (15) совместна; решив ее, найдем решение прямой задачи (P) и сопряженной задачи ЛП

$$\min_{v \in V} \bar{x}^\top v, \qquad V = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d,\ v \geq 0_n\}. \tag{C}$$

Система (15) состоит из $n+1$ условий равенств, $2n$ неравенств и содержит $2n$ переменных. Из-за высокой размерности ее непосредственное решение может оказаться затруднительным. Поэтому перейдем к альтернативной системе, которая имеет меньше переменных, чем система (15), и состоит из $2n$ линейных неравенств и одного равенства с $n+1$ переменными

$$\begin{bmatrix} A^\top & 0_{n\mu} & \bar{v} \\ 0_{nm} & K^\top & \bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ \alpha \end{bmatrix} \leq 0_{2n}, \qquad b^\top p + d^\top q + \bar{x}^\top \bar{v} \alpha = \rho. \tag{16}$$

Здесь $\rho > 0$ — произвольная фиксированная константа.

Так как система (15) совместна, то альтернативная система (16) несовместна. Это позволяет на основании теоремы 3 из безусловной минимизации невязки системы (16) получить нормальные решения задач ЛП (P) и (C). Задача (5) в данном случае записывается в виде

$$\min_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{q \in \mathbb{R}^\nu} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \frac{\left[\|(A^\top p + \bar{v}\alpha)_+\|^2 + \|(K^\top q + \bar{x}\alpha)_+\|^2 + (\rho - b^\top p - d^\top q - \bar{x}^\top \bar{v}\alpha)^2\right]}{2}.$$

В результате решения этой задачи находятся оптимальные векторы p^*, q^*, α^*, по которым вычисляются невязки несовместной системы (16)

$$w_x^* = (A^\top p^* + \bar{v}\alpha^*)_+, \qquad w_v^* = (K^\top q^* + \bar{x}\alpha^*)_+, \qquad w_3^* = \rho - b^\top p^* - d^\top q^* - \bar{x}^\top \bar{v}\alpha^*.$$

С помощью этих невязок в соответствии с теоремой 3 определяются нормальные решения (решения с минимальной евклидовой нормой) системы (15)

$$\tilde{x}^* = w_x^*/w_3^*, \qquad \tilde{v}^* = w_v^*/w_3^*,$$

т.е. находятся нормальные решения задач ЛП (P) и (C).

Решение задачи ЛП, таким образом, свелось к однократной безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой кусочно-квадратичной функции от $n+1$ переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

2. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1983.

3. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999.

4. **Еремин И. И.** Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 2001.

5. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

6. **Mangasarian O.L.** Nonlinear Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.

7. **Разумихин Б.С.** Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. М.: Наука, 1975.

8. **Dax A.** The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review. - Annals of Operations Research, 1993. V. 46. No.1. Pp. 11–60.

9. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал, 1998.

10. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000, т.40, No.12, с. 1766–1786.