Доклады Академии наук СССР 1977. Том 233, No.3, стр. 277–280

УДК 512.98 МАТЕМАТИКА

Н.И. ГРАЧЕВ, Ю.Г. ЕВТУШЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 24 XII 1976)
Пересмотрено 8 IV 2001

1. Рассмотрим задачу об отыскании минимакса

$$\min_{x\in E_n}\max_{y\in E_m} F(x,y); \tag{1}$$

здесь $F(x,y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, E_i есть i-мерное эвклидово пространство, $x=[x^1,\dots,x^n]$, $y=[y^1,\dots,y^m]$.

Пусть $z_*=(x_*,y_*)$ — точка строгого локального решения (1), т.е. существуют окрестности X и Y точек x_* и y_* соответственно такие, что для любых x $\in$ X, $y\in Y$, $x\neq x_*$, $y\neq y_*$ имеют место неравенства

$$F(x_*,y)<F(x_*,y_*)<F(x,\bar y(x))=\sup_{y\in Y}F(x,y).$$

Согласно [1], для того чтобы точка z_* была строгим локальным решением (1), необходимо, чтобы

$$F_x(z_*)=F_y(z_*)=0, \tag{2}$$

и достаточно, чтобы были отрицательно определенными следующие квадратичные формы:

$$y^\top F_{yy}(z_*)y<0,\quad x^\top[F_{xy}(z_*)F_{yy}^{-1}(z_*)F_{yx}(z_*)-F_{xx}(z_*)]x<0 \tag{3}$$

для $\forall y\in E_m$, $\|y\|\neq0$, $\forall x\in E_n$, $\|x\|\neq0$.

В [1, 2] предложены итеративные методы решения (1), однако они оказались трудоемкими в случае задач высокой размерности, так как требовали многократного обращения матриц вторых производных. Для приближенных расчетов можно использовать следующий легко реализуемый прием. Будем отыскивать предельные (при $t\to\infty$) точки решения задачи Коши

$$\dot x=-\varepsilon F_x(x,y),\quad \dot y=F_y(x,y),\quad (\cdot)=d/dt,\quad x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0. \tag{4}$$

Возможен дискретный вариант, где

$$x_{s+1}=x_s-\varepsilon\alpha F_x(x_s,y_s),\qquad y_{s+1}=y_s+\alpha F_y(x_s,y_s),\qquad s=0,1,2,\dots; \tag{5}$$

здесь $0<\varepsilon<1$, $0<\alpha$.

Обозначим решения (4) через $x(z_0,t,\varepsilon)$, $y(z_0,t,\varepsilon)$, где $z_0=(x_0,y_0)$. Используя результаты [3, 4], можно показать, что имеет место

Теорема 1. *Пусть функция $F(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки z_*, в ней выполнены условия* (2), (3). *Тогда существуют окрестность W*

точки z_* и числа $0 < \bar{\alpha},\ 0 < \bar{\varepsilon}$ такие, что для всех $z_0 \in W,\ 0 < \alpha < \bar{\alpha},\ 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ имеет место сходимость решений (4) *и* (5) *к z_*, т.е.*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{x}(z_0,t,\varepsilon) = x_*, \qquad \lim_{t\to\infty} y(z_0,t,\varepsilon) = y_*,$$
$$\lim_{s\to\infty} x_s = x_*, \qquad \lim_{s\to\infty} y_s = y_*.$$

Теорема 1 приводит к простой схеме решения (1). Наличие в (4) и (5) медленно и быстро меняющихся переменных усложняет расчеты, однако в ряде задач высокой размерности такой подход оказывается весьма эффективным. Фактически мы совершили переход, обратный тому, который обычно делается в теории сингулярных уравнений: вместо решения вырожденной системы (которая может оказаться чрезвычайно сложной) решается задача (4), эквивалентная сингулярно возмущенной.

Пример. Пусть $F(x,y) = e^{x^2}\sin 2\pi(x-y)$; легко видеть, что в этом случае

$$\min_{x\in E_1}\max_{y\in E_1} F(x,y) = 1, \qquad \max_{y\in E_1}\min_{x\in E_1} F(x,y) = -1.$$

В точках решения обеих задач выполнены необходимые и достаточные условия минимакса и максимина соответственно. Поэтому при $\varepsilon \ll 1$ решения (4), (5) сходятся к минимаксному решению, при $\varepsilon \gg 1$ — к максиминному решению.

Приведем еще два метода решения (1), в которых

$$\dot{x} = -F_x(x, y(x)), \qquad F(x,y(x)) = \max_{y\in E_m} F(x,y); \tag{6}$$

$$\dot{x} = -\varepsilon F_x(x,y), \qquad \dot{y} = -F_{yy}^{-1}(x,y)F_y(x,y). \tag{7}$$

Их дискретные варианты имеют вид

$$x_{k+1} = x_k - \varepsilon F_x(x_k,y_k), \qquad F(x_k,y_k) = \max_{y\in E_m} F(x_k,y); \tag{8}$$

$$x_{k+1} = x_k - \varepsilon F_x(x_k,y_k), \qquad y_{k+1} = y_k - F_{yy}^{-1}(x_k,y_k)F_y(x_k,y_k). \tag{9}$$

Достаточные условия сходимости формулируются точно так же, как и в теореме 1 (за исключением того, что в дискретных вариантах нет необходимости вводить малый шаг α).

$\boxed{\textbf{2.}}$ Методы приходится значительно видоизменять для решения задач с иерархической структурой и игр с непротивоположными интересами [5]. Методы решения таких задач приведены в [6, 7]. Следуя [7], задачу отыскания гарантирующей стратегии запишем в следующем виде:

$$J = \min_{x\in E_n} F(x,y) \min_{y\in E_m} K(x,y); \tag{10}$$

здесь при каждом фиксированном x ищется множество $y(x)$ из условия

$$K(x,y(x)) = \min_{y\in E_m} K(x,y),$$

далее вычисляется

$$J = \min_{x\in E_n}\max_{y\in y(x)} K(x,y(x)) = K(x_*,y(x_*)) = K(x_*,y_*).$$

Точку (x_*,y_*) будем называть *решением задачи* (10). Если функция $\mathrm{K}(x,y)$ достигает значения строгого локального минимума по y в точках $y(x)$ при всех значениях x из некоторой окрестности x_* и функция $F(x, y(x))$ достигает значения строгого локального минимума в точке x_*, то будем говорить, что $z_* = (x_*, y_*)$ — точка строгого локального решения задачи (10). Обозначим

$$z = (x, y), \quad B(z) = K_{yy}^{-1}(z)K_{yx}(z), \quad H(z, \lambda) = F(z) + K_y^{\top}(z)\lambda,$$

$$N(z, \lambda) = H_{xx}(z, \lambda) - B^{\top}(z)H_{yx}(x, \lambda) - H_{yx}(z, \lambda)B(z) + B^{\top}(z)H_{yy}(z, \lambda)B(z);$$

здесь $\lambda \in E_m$.

Согласно [7], для того чтобы точка z_* была строгим локальным решением (10), необходимо, чтобы

$$K_y(z_*) = 0, \qquad F_x(z_*) - B^{\top}(z_*)F_y(z_*) = 0, \tag{11}$$

и достаточно, чтобы $\forall y \in E_m,\ \forall x \in E_n,\ \|x\| \neq 0,\ \|y\| \neq 0,$

$$y^{\top}K_{yy}(z_*)y > 0, \qquad x^{\top}N(z_*, \lambda_*)x > 0; \tag{12}$$

здесь λ_* определяется из условия

$$H_x(z_*, \lambda_*) = 0.$$

Приведем три метода решения (10):

$$\dot{x} = -\varepsilon[F_x(x, y) - B^{\top}(x, y)F_y(x, y)] = -\varepsilon\varphi(x, y), \qquad \dot{y} = -K_y(x, y); \tag{13}$$

$$\dot{x} = -\varphi(x, y(x)), \qquad K(x, y(x)) = \min_{y \in E_m} K(x, y); \tag{14}$$

$$\dot{x} = -\varepsilon\varphi(x, y), \qquad \dot{y} = -K_{yy}^{-1}(x, y)K_y(x, y). \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $F(z)$, $K(z)$ *дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* z_*, *в ней выполнены условия* (11), (12). *Тогда методы* (13), (14), (15) *и их дискретные варианты вида* (5), (8), (9) *локально сходятся к точке* z_*.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Применим изложенный подход к решению задач нелинейного программирования:

$$\min_{x \in X} F(x), \qquad X = \{x \in E_n : g(x) = 0,\ \ h(x) \leq 0\}; \tag{16}$$

здесь $x \in E_n$, $g \in E_c$, $h \in E_m$. Следуя [8, 9], составим модифицированную функцию Лагранжа

$$L(x, p, w) = F(x) + \sum_{i=1}^{c} p^i g^i(x) + \sum_{i=1}^{m} (w^i)^2 h^i(x).$$

Будем отыскивать

$$\max_{p \in E_c} \max_{w \in E_m} \min_{x \in E_n} L(x, p, w).$$

Приведенные выше методы дают три схемы решения задачи (16):

$$\dot{p} = \varepsilon L_p(x, p, w), \qquad \dot{w} = \varepsilon L_w(x, p, w), \qquad \dot{x} = -L_x(x, p, w); \tag{17}$$

$$\dot{p} = L_p(x(p, w), p, w), \quad \dot{w} = L_w(x(p, w), p, w), \quad L(x(p, w), p, w) = \min_{x \in E_n} L(x, p, w); \tag{18}$$

$$\dot{p} = L_p(x, p, w), \quad \dot{w} = L_w(x, p, w), \quad \dot{x} = -L_{xx}^{-1}(x, p, w)L_x(x, p, w). \tag{19}$$

Предполагаем, что существует решение задачи (16) — точка x_*, в ней выполнено условие регулярности ограничений (у.р.о.), т.е. все векторы $g_x^i(x_*)$ и векторы $h_x^j(x_*)$ такие, что $h^j(x_*) = 0$, линейно независимые. Кроме того, в стационарной точке $z_* = (x_*, p_*, w_*)$ (такой, что в ней $L_x = L_p = L_w = 0$) выполнено условие строгой дополняющей нежесткости (у.с.д.н.), т.е. из $h^j(x_*) = 0$ следует, что $w^j \neq 0$.

Теорема 3. *Пусть функция $L(x,p,w)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности допустимой стационарной точки z_*, матрица $L_{xx}(z_*)$ — положительно определенная, выполнены у.р.о. и у.с.д.н. Тогда существуют достаточно малые числа $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\alpha}$ такие, что при $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ методы* (17), (18), (19) *и их дискретные варианты вида* (5), (8), (9) *локально (экспоненциально и со скоростью геометрической прогрессии соответственно) сходятся к точке z_*.*

Сходимость (17) доказана в [9] для случая $\varepsilon = 1$. Введение малого параметра ε улучшает сходимость, приближая метод к более трудоемкому, но практически более быстро сходящемуся методу (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю.Г. Евтушенко*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т.14, No.3 (1974).
2. *Ю.Г. Евтушенко*, там же, т.14, No.5 (1974).
3. *А.Н. Тихонов*, Матем. сб., т.31 (73), No.3 (1952).
4. *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., “Наука”, 1973.
5. *Ю.Г. Гермейер, Н.Н. Моисеев*, В сб.: Проблемы прикладной математики и механики, М., “Наука”, 1971.
6. *И.И. Еремин*, В сб.: Нестационарные процессы математического программирования, Свердловск, 1974.
7. *Н.И. Грачев, Ю.Г. Евтушенко*, В сб.: Исследование операций, в.4, М., Изд. ВЦ АН СССР, 1974.
8. *Ю.Г. Евтушенко*, ДАН, т.221, No.5 (1975).
9. *Ю.Г. Евтушенко*, Журн. вычислит, матем. и матем. физ., т.15, No.2 (1975).