ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 16, 1976, N° 2, с. 307–324 УДК 518:51:330.115

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю.Г. ЕВТУШЕНКО

(Москва)

(Пересмотрена 30 января 2004 г.)

Предлагаемые методы решения общей задачи нелинейного программирования можно разделить на две группы. В первой используется идея методов функций штрафа; в отличие от стандартных приемов здесь коэффициент функций штрафа изменяется непрерывно, что существенно упрощает расчеты. Во второй группе обобщается правило множителей Лагранжа на случай общей задачи нелинейного программирования; показано, как можно использовать метод Ньютона для решения таких задач. Методы используются для решения задач оптимального управления и отыскания седловых точек.

§1. Упрощенные варианты метода функций штрафа

Предложенный Курантом метод штрафных функций нашел широкое развитие и обобщение в многочисленных работах. Подробный обзор таких исследований дан в [1]. Поэтому сошлемся только на последние работы, наиболее близкие к излагаемым методам [2] – [5]. С вычислительной точки зрения метод штрафных функций имеет ряд существенных недостатков. Укажем на некоторые из них: громоздкость расчетов, связанная с необходимостью многократного решения задач безусловной минимизации; сложность решения этих задач, так как при больших коэффициентах штрафа минимизируемая функция носит овражный характер; нечетко обычно сформулировано правило изменения коэффициента штрафа; практическая невозможность решения задач с высокой точностью. В предлагаемых ниже методах коэффициент штрафа изменяется непрерывно, снимая в некоторой степени эти недостатки. Доказательства сходимости методов основаны на обобщении метода функций Ляпунова, разработанном в [6].

Рассмотрим общую задачу нелинейного программирования. Всюду считаем, что ее решение существует. Требуется найти

$$\min_{x\in X} F(x), \qquad X = \{x \in \mathbb{E}^n : g(x) = 0,\ \ h(x) \le 0\}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbb{E}^i$ есть i-мерное евклидово пространство; $F(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, задающие отображения $F(x) : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^1$, $g(x) : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^e$, $h(x) : \mathbb{E}^n \to \to \mathbb{E}^c$, $x = [x^1, \dots, x^n] \in \mathbb{E}^n$. Через X_* обозначим множество решений задачи (1.1), через X_0 — множество точек, внутренних относительно множества X:

$$X_* = \{x_* : \min_{x\in X} F(x) = F(x_*),\ \ x_* \in X\}, \qquad X_0 = \{x : g(x) = 0,\ \ h(x) < 0\}.$$

Всюду ниже x_* обозначает элемент множества X_*; расстояние от точки x до множества X_* обозначим через $\rho(x, X_*) = \min_{y\in X_*} \|x - y\|$. Составим функцию

$$P(x,t) = \mu(t)F(x) + \tau(t)S(x),$$

где $\mu(t)$, $\tau(t)$ — некоторые функции скалярного аргумента t, $S(x) = 0$, если $x \in X$, и $S(x) > 0$ в противном случае.

Будем говорить, что функция $S(x)$ сепарабельна, если она представима в виде

$$S(x) = \sum_{i=1}^{e} \varphi(g^i(x)) + \sum_{i=1}^{c} \varphi(h^i_+(x)); \tag{1.2}$$

здесь $h^i_+(x) = \max[0, h^i(x)]$. Функция скалярного аргумента $\varphi(y)$ и ее производные удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(y) > 0, \quad \varphi''(y) > 0 \qquad \forall y \neq 0. \tag{1.3}$$

Если функции $F(x)$ и $h(x)$ выпуклые, определенные всюду в $\mathbb{E}^n$, а вектор-функция $g(x)$ линейная, тогда (1.1) будем называть задачей выпуклого программирования, $S(x)$ при этом считается также выпуклой всюду в $\mathbb{E}^n$. Если выполнено обобщенное условие Слейтера ($X_0 \neq \emptyset$), то для $x_* \in X_*$ существуют множители $p_* \in \mathbb{E}^e$, $w_* \in \mathbb{E}^c$ такие, что

$$\begin{gathered} F_x(x_*) + \sum_{i=1}^{e} g^i_x(x_*)p^i_* + \sum_{i=1}^{c} h^i_x(x_*)w^i_* = 0, \\ g(x_*) = 0, \quad h^i(x_*) \leq 0, \quad w^i_* h^i(x_*) = 0, \quad w^i_* \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, c. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Для решения (1.1) предлагается ряд методов, обобщающих результаты работ [6] – [9]. Будем отыскивать предельные точки при $t \to \infty$ решений следующих задач Коши:

$$\dot{x} = -P_x(x,t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.5}$$

$$\dot{x} = -P^{-1}_{xx}(x,t)[P_x(x,t) + P_{xt}(x,t)], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.6}$$

где $P_x = \mu F_x + \tau S_x$, $P_{xx} = \mu F_{xx} + \tau S_{xx}$, $P_{xt} = \dot{\mu} F_x + \dot{\tau} S_x$. Здесь и всюду ниже точка над символом обозначает дифференцирование по независимой переменной t. Непрерывные функции $\mu(t)$, $\tau(t)$ удовлетворяют для всех $t \in [t_0, \infty)$ условиям

$$\tau(t) > 0, \qquad \mu(t) > 0, \qquad \int_{t_0}^{\infty} \mu(t)dt = \infty. \tag{1.7}$$

Определим множество $G(t)$ и векторы $p \in \mathbb{E}^e$, $w \in \mathbb{E}^c$ с координатами p^i и w^j соответственно:

$$\begin{gathered} G(t) = \{x \in \mathbb{E}^n : P(x,t) \leq \mu(t)F(x_*)\}, \\ p^i(x,t) = \frac{\tau(t)\varphi'(g^i(x))}{\mu(t)}, \qquad w^j(x,t) = \frac{\tau(t)\varphi'(h^j_+(x))}{\mu(t)}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Предполагаем, что (1.5), (1.6) и последующие непрерывные методы имеют единственное решение в окрестности t_0. Условие единственности можно не вводить, но тогда формулировки и доказательства теорем усложнятся.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$, $S(x)$ — выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции всюду в $\mathbb{E}^n$, множество $G(t_0)$ непусто, ограничено, непрерывные функции $\mu(t)$, $\tau(t)$ при всех $t \geq t_0$ удовлетворяют условиям* (1.7), *отношение $\tau(t)/\mu(t) \to \infty$ монотонно при $t \to \infty$. Тогда множество предельных (при $t \to \infty$) точек решения $x(x_0, t)$ системы* (1.5) *непусто и все предельные точки принадлежат X_* при любых начальных условиях x_0.*

Доказательство. Имеют место включения $X_* \subset G(t+\delta) \subset G(t)$ для всех $t \geq t_0$, $\delta \geq 0$. Поэтому X_* непусто, компактно. Продифференцируем функцию $v(x) = \rho^2(x, X_*)$ с учетом (1.5); используя выпуклость $P(x,t)$ по x, получим, что для всех $x(x_0,t) \notin G(t_0)$ выполняются неравенства

$$\dot{v}(x(x_0,t))/2 \leq \mu(t)F(x_*) - P(x(x_0,t),t) \leq 0.$$

Всюду на $G(t_0)$ функция $v(x)$ ограничена. Согласно полученному неравенству $v(x(x_0,t))$ — невозрастающая функция t всюду вне $G(t_0)$. А так как $v(x)$ — бесконечно большая функция, мы приходим к выводу, что система устойчива по Лагранжу, т.е. каждое решение $x(x_0,t)$ продолжимо вправо при $t \to \infty$ и ограничено.

Воспользуемся теоремой Т.1, приведенной в Приложении. Обозначим

$$X_*^\varepsilon = \{x : \rho(x, X_*) < \varepsilon\}, \qquad \Phi(t) = \min_{x \in \mathbb{E}^n \setminus X_*^\varepsilon} [P(x,t)/\mu(t) - F(x_*)].$$

Тогда для производной $v(x)$ в силу системы получим оценку

$$\sup_{x \in \mathbb{E}^n \setminus X_*^\varepsilon} \dot{v}(x) \leq -2\mu(t)\Phi(t).$$

Легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t(\varepsilon)$ такое, что $G(t) \subset X_*^\varepsilon$ для всех $t \geq t(\varepsilon)$, отсюда $\Phi(t) > 0$ для этих же значений t. Так как $\Phi(t)$ — возрастающая функция t, то для всех $t \geq t(\varepsilon)$ имеем

$$-\mu(t)\Phi(t) \leq -\mu(t)\Phi(t(\varepsilon)) < 0, \qquad -\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t(\varepsilon)}^{t} \mu(t)\Phi(t)dt \leq -\lim_{t\to\infty} \Phi(t(\varepsilon)) \int\limits_{t(\varepsilon)}^{t} \mu(t)dt = -\infty.$$

Все условия теоремы Т.1, таким образом, выполнены. Отсюда следует сходимость метода (1.5) ко множеству X_*. $\square$

Доказательство теоремы 1 дает возможность обобщить и по-новому обосновать метод штрафных функций. Пусть t — целочисленная переменная ($t = 0, 1, \ldots$), обозначающая номер шага. Первый алгоритм состоит в определении последовательности произвольных точек $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$P(x(t),t) \leq \varepsilon(t) + \min_{x \in \mathbb{E}^n} P(x,t); \tag{1.9}$$

здесь $\varepsilon(t) \geq 0$. В обычном методе штрафов точность решения задачи безусловной минимизации $\varepsilon(t) = 0$.

Определим последовательность множеств

$$G_\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{E}^n : P(x,t) \leq \mu(t)F(x_*) + \varepsilon(t)\}.$$

Теорема 2. *Пусть $F(x)$, $S(x)$ — непрерывные в $\mathbb{E}^n$ функции, $G_\varepsilon(0)$ — непустое компактное множество, для всех $t \geq 0$ выполнены условия*

$$\mu(t) > 0, \quad \tau(t) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\varepsilon(t)}{\mu(t)} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{\mu(t)} = \infty, \tag{1.10}$$

причем стремление к нулю и к бесконечности монотонно. Тогда множество предельных точек последовательности $\{x(t)\}$, $t \to \infty$, *непусто, каждая предельная точка принадлежит множеству* X_*,

$$\lim_{t\to\infty} F(x(t)) = F(x_*), \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)S(x(t))}{\mu(t)} = 0.$$

Эта теорема была сформулирована и доказана автором совместно с Н.И. Грачевым.

Проверить условие $x(t) \in G_\varepsilon(t)$ часто оказывается сложно. Вместо (1.9) можно предложить иной, легко реализуемый вариант метода. Процесс безусловной минимизации $P(x,t)$ по x будем прекращать, как только найдется точка $x(t)$, удовлетворяющая условию

$$\|P_x(x(t),t)\| \le \varepsilon(t). \tag{1.11}$$

Используя (1.8), определим

$$p^i(t) = p^i(x(t),t), \quad i = 1,2,\ldots,e, \qquad w^j(t) = w^j(x(t),t), \quad j = 1,2,\ldots,c.$$

Такая модификация существенно упрощает расчеты, несколько расширяет возможности метода, так как позволяет определить двойственные переменные.

Определение 1. *Ограничения* $g(x)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяют условию регулярности Эрроу–Гурвица–Удзавы в точке* $x \in \mathbb{E}^n$, *если* $g(x)$ *и* $h(x)$ *непрерывно дифференцируемы в точке* x, *векторы* $g_x^i(x)$, $i = 1,2,\ldots,e$, *линейно-независимые, существует вектор* $s \in \mathbb{E}^n$, *удовлетворяющий соотношениям*

$$\begin{aligned} &(s, g_x^i(x)) = 0, \qquad && i = 1,2,\ldots,e, \\ &(s, h^j(x)) < 0, \qquad && j \in B(x) = \{j : h^j(x) = 0, \ \ j = 1,2,\ldots,c\}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть* $F(x)$ *и* $S(x)$ — *непрерывно дифференцируемые в* $\mathbb{E}^n$ *функции,* $S(x)$ *сепарабелъна, имеют место условия* (1.3) *и* (1.10), *последовательность* $\{x(t)\}$ *ограничена, в каждой ее предельной точке* $\bar{x}$ *выполнены условия регулярности ограничений Эрроу–Гурвица–Удзавы (в случае задач выпуклого программирования это условие заменяется на обобщенное условие Слейтера). Тогда каждая предельная точка последовательности* $[x(t), p(t), w(t)]$, $t \to \infty$, *удовлетворяет необходимым, а в случае задач выпуклого программирования и достаточным условиям экстремума* (1.4).

Если (1.1) — задача выпуклого программирования, то из (1.11) следует оценка

$$P(x(t),t) - \mu(t)F(x_*) \le \varepsilon(t)\|x(t) - x_*\|.$$

Условие монотонного возрастания $\tau(t)/\mu(t)$ в ряде случаев несущественно (см., например, [8]). Требование стремить это отношение к бесконечности можно также не вводить, если заранее поставить задачу о приближенном решении (1.1).

Пусть $W(x,\tau) = F(x) + \tau S(x)$; для этого случая в [10, 11] доказана

Лемма 1. *Пусть* (1.1) — *задача выпуклого программирования,* $X_0 \ne \emptyset$, $X_* \ne \emptyset$ *и компактно,* $F(x)$ *и* $h(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{E}^n$, $S(x)$ — *дважды непрерывно дифференцируемая функция вида* (1.2), *выполнены условия* (1.3) *и* $\varphi''(y) \ge \sigma > 0$ *для всех*

$y \geq 0$. *Тогда для всех* $x \in \mathbb{E}^n$, $0 < \tau \leq T$ *верны оценки* $F(x_*) - \gamma/\tau \leq W(x,\tau) \leq W(x,T)$, *где* (см.(1.4))

$$\gamma = \frac{\left[\sum_{i=1}^{e}(p_*^i)^2 + \sum_{i=1}^{c}(w_*^i)^2\right]}{2\sigma}.$$

Рассмотрим следующую максиминную задачу:

$$I = \sup_{\tau \leq T} \inf_{x \in \mathbb{E}^n} W(x,\tau), \tag{1.12}$$

где $T > 0$ — некоторое число. Введем множество

$$Z = \{z : \min_{x \in \mathbb{E}^n} W(x,T) = W(z,T)\}.$$

Если $\tilde{x} \in Z$, то $F(x_*) - \gamma/T \leq W(\tilde{x},T) \leq F(x_*)$. Если функция $F(x)$ ограничена снизу на Z : $F(x) \geq \delta$, то $S(\tilde{x}) \leq [F(x_*) - \delta]/T$. Зная верхние оценки для p_* и w_*, можно подобрать значение T так, чтобы решение задачи (1.12) (величина I) было как угодно близко к величине $F(x_*)$ и значение функции штрафа в точке решения (1.12) сколь угодно мало. В принципе для решения (1.12) достаточно найти $\min\limits_{x \in \mathbb{E}^n} W(x,T)$, однако при больших значениях T эта функция носит овражный характер и задачу минимизации решать сложно. Лучше для решения (1.12) применить итеративные методы отыскания максимина, в которых коэффициент штрафа τ изменяется непрерывным образом. Составим систему

$$\dot{x} = -W_x(x,\tau), \quad \dot{\tau} = S(x)\beta(\tau)\Theta(T-\tau), \qquad x(0) = x_0, \quad \tau(0) = \tau_0 > 0, \tag{1.13}$$

здесь $\Theta(y) = 1$, если $y > 0$, и $\Theta(y) = 0$ в противном случае. Функция $\beta(\tau)$ непрерывна и неотрицательна для всех $\tau_0 \leq \tau \leq T$ и удовлетворяет условию

$$\int_{\tau_0}^{T} \frac{T-\tau}{\beta(\tau)} d\tau < \infty. \tag{1.14}$$

Можно положить, например, $\beta(\tau) = T - \tau$, $\beta(\tau) = 1$, $\beta(\tau) = \tau$.

Возможны дискретные варианты предлагаемых методов. Для метода (1.13), например, используем простейшую аппроксимацию по схеме Эйлера

$$x_{s+1} = x_s - \alpha_s W_x(x_s,\tau_s), \qquad \tau_{s+1} = \tau_s + \alpha_s S(x_s)\beta(\tau_s)\Theta(T-\tau_s), \tag{1.15}$$

где переменный шаг α_s удовлетворяет условиям

$$0 < \alpha_s, \qquad \lim_{s\to\infty} \alpha_s = 0, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s \to \infty. \tag{1.16}$$

Введем множество $\sigma(\tau) = \{x : W(x,\tau) \leq F(x_*)\}$.

Теорема 4. *Если* $F(x)$, $S(x)$ *— выпуклые, непрерывно дифференцируемые всюду в* $\mathbb{E}^n$ *функции, множество* $\sigma(\tau_0)$ *компактно, выполнено условие* (1.14), *то при* $t \to \infty$ *решения* $x(x_0,t)$ *системы* (1.13) *сходятся к* Z *в целом (для любых* x_0*). Если ограничения несущественны, то* $x(x_0,t)$ *сходятся к* X_*. *Дискретный вариант* (1.15) *сходится в целом* *к Z, если α_s — монотонно убывающая последовательность, удовлетворяющая условиям* (1.16)*, и α_0 достаточно мало.*

Доказательство сходимости близко к доказательству теоремы Барбашина–Красовского. Сходимость дискретного варианта следует из результатов [6].

Перейдем к рассмотрению модификации метода Ньютона (1.6). Через $x(x_0,t)$ обозначим решение (1.6). Система (1.6) имеет первый интеграл

$$P_x(x(x_0,t),t) = P_x(x_0,t_0)e^{-t}.$$

Точки $x(x_0,t)$ удовлетворяют соотношению вида (1.11). Таким образом, решения системы (1.6) и последовательность $x(t)$, полученная из (1.11) совершенно иным путем, обладают общими свойствами. Поэтому теорема о сходимости метода (1.6) формулируется и доказывается аналогично теореме 3. Введем множество

$$R(t) = \{x : \|P_x(x,t)\| \le \|P_x(x_0,t_0)\|e^{-t}\}.$$

Теорема 5. *Пусть $\mathrm{P}(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по t при всех $t \ge t_0$, $S(\mathrm{x})$ сепарабельна, имеют место условия* (1.3) *и* (1.10)*, где $\varepsilon(t) = e^{-t}$, на компактном множестве $R(t_0)$ функция $\mathrm{P}(x,t)$ трижды непрерывно дифференцируема по x, $\|P_{xx}^{-1}(x,t)\| > 0$ и выполнены условия Эрроу–Гурвица–Удзавы (в случае задач выпуклого программирования это условие заменяется на обобщенное условие Слейтера). Тогда каждая предельная точка $[x(x_0,t), p(x(x_0,t),t), w(x(x_0,t),t)]$, $t \to \infty$, где p, w определяются из* (1.8)*, удовлетворяет необходимым, а в случае задач выпуклого программирования — достаточным условиям экстремума* (1.4).

§2. Методы внутренней точки

Составим функцию

$$H(x,t) = F(x) + \tau^{-1}\sum_{i=1}^{c}\xi(h^i(x)),$$

где $\tau = \tau(t)$, $\xi(y)$ — скалярные, непрерывно дифференцируемые функции, определенные для всех $t_0 \le t$ и $y < 0$ соответственно и удовлетворяющие для этих значений аргументов условиям

$$0 < \tau(t), \qquad 0 < \frac{\partial\tau}{\partial t}, \qquad 0 < \xi(y), \qquad \lim_{y\to -0}\xi(y) = \infty. \tag{2.1}$$

Для решения задачи (1.1) будем отыскивать предельные (при $t \to \infty$) точки решения задачи Коши для системы

$$\dot{x} = -NH_x(x,t) = -N\left[F_x(x) + \tau^{-1}\sum_{i=1}^{c}\xi'(h^i(x))h_x^i(x)\right]; \tag{2.2}$$

здесь $N = I - g_x(g_x^\top g_x)^{-1}g_x^\top$, I — единичная матрица $n \times n$, g_x — матрица, у которой на пересечении i-строки и j-столбца находится элемент $\partial g^j/\partial x^i$, $g_x^\top$ — матрица, транспонированная к g_x. Если ограничения типа равенства отсутствуют, тогда $N = I$ и (2.2) совпадает с методом, предложенным в [1].

Приведенный метод построен таким образом, что если начальная точка $x(0) \in X_0$, то и вся траектория $x(x_0,t)$ принадлежит допустимому множеству. Поэтому в соответствии с терминологией [1] его можно назвать методом внутренней точки. Считаем, что всюду на X ранг матрицы g_x максимальный. Обозначим

$$p(x,t) = -(g_x^\top g_x)^{-1} g_x^\top H_x, \qquad w^i(x,t) = \tau^{-1}\xi'(h^i(x)), \qquad i = 1,2,\ldots,c.$$

Теорема 6. *Пусть в задаче* (1.1) *функции* $F(x)$, $h(x)$ *непрерывно дифференцируемые, выпуклые на открытом покрытии множества* X, *функция* $g(x)$ *линейная,* $\xi(y)$ *— выпуклая при* $y < 0$, $X_0 \neq \emptyset$, $X_* \neq \emptyset$ *и компактно, выполнены условия* (2.1). *Тогда для любой начальной точки* $x_0 \in X_0$ *каждая предельная точка* $[x(x_0,t), p(x(x_0,t),t), t)w(x(x_0,t),t)]$, $t \to \infty$, *удовлетворяет достаточным условиям минимума* (1.4).

Доказательство проводится по схемам [1, 6]. □

Легко показать, что модификации, аналогичные (1.6), (1.9), (1.11), можно выполнить и для метода внутренней точки. Результаты также переносятся на случай комбинированных методов. Составим, например, функцию

$$W(x,t) = F(x) + \tau(t)\sum_{i=1}^{e}\varphi^i(g(x)) + \tau^{-1}(t)\sum_{i=1}^{c}\xi(h^i(x)).$$

Здесь ограничения типа равенств учтены с помощью внешнего штрафа, ограничения типа неравенств — с помощью внутреннего штрафа. Системы (1.5) и (1.6) приводят к следующим методам:

$$\dot{x} = -W_x(x,t), \qquad \dot{x} = -W_{xx}^{-1}(W_x + W_{xt}).$$

Можно отыскивать последовательность точек $\{x(t)\}$, приближенно минимизирующих функцию $W(x,t)$ по x, прекращая процесс, как только найдется точка $x(t)$, удовлетворяющая условию

$$\|W_x(x,t)\| \leq \varepsilon(t). \tag{2.3}$$

Теоремы о сходимости указанных модификаций формулируются аналогично приведенным выше. Поэтому ограничимся рассмотрением только метода (2.3). Обозначим

$$\begin{aligned} p^i(t) &= \tau(t)\varphi'(g^i(x(t))), && i = 1,2,\ldots,e,\\ w^j(t) &= \tau^{-1}(t)\xi'(h^j(x(t))), && j = 1,2,\ldots,c. \end{aligned}$$

Теорема 7. *Пусть* $F(x)$, $g(x)$, $h(x)$ *непрерывно дифференцируемы в* $\mathbb{E}^n$, $\varphi(y)$ *дважды непрерывно дифференцируема в* $\mathbb{E}^1$, $\xi(y)$ *непрерывно дифференцируема при* $y < 0$, *множество* X_0 *непусто, выполнены условия* (1.3), (1.10) *и* (2.1), *последовательность точек* $\{x(t)\}$, *удовлетворяющих* (2.3), *ограничена, в каждой предельной точке этой последовательности выполнены условия Эрроу–Гурвица–Удзавы. Тогда каждая предельная точка последовательности* $[x(t), p(t), w(t)]$, $t \to \infty$, *удовлетворяет необходимым, а в случае задач выпуклого программирования — достаточным условиям экстремума* (1.4).

Предложенные методы можно обобщить на случай, когда функции F, S, ξ выпуклые, недифференцируемые. Тогда вместо, например, системы (1.5) можно использовать дифференциальное включение

$$\dot{x} \in q(x,t), \tag{2.4}$$

где $q(x,t)$ — множество обобщенных градиентов функции $P(x,t)$ в точке (x,t):

$$q(x,t) = \{y \in \mathbb{E}^n : (y, z - x) \leq P(z,t) - P(x,t) \ \ \forall z \in \mathbb{E}^n\}.$$

Дискретный вариант метода имеет вид

$$x_{s+1} \in x_s + \alpha_s q(x_s, t_s). \tag{2.5}$$

В случае если (1.1) — задача безусловной минимизации, (2.5) переходит в метод обобщенного градиента. Недифференцируемые функции штрафа для решения задачи (1.1) использовались в [3]. Если непрерывная функция $\varphi(y)$ недифференцируема в $y = 0$, то правые части системы (2.4) претерпевают разрывы на поверхностях $h^i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, c$, на которых могут возникнуть скользящие режимы. Обобщение теоремы 1 на этот случай мы приведем в отдельной работе.

§3. Решение систем равенств и неравенств

Пусть $d(x)$ осуществляет отображение $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^k$. Обозначим

$$Z = \{x : x \in X,\ \ d(x) \le 0\}, \qquad Z_0 = \{x : x \in X,\ \ d(x) < 0\},$$

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^{e} \varphi(g^i(x)) + \sum_{i=1}^{c} \varphi(h^i_+(x)) + \tau^{-1} \sum_{i=1}^{k} \xi(d^i(x)).$$

Функции φ, ξ, τ определены в предыдущих параграфах. Ставится задача об отыскании точки $x \in Z$. Методы (1.5) и (2.2) приводят к схеме

$$\dot{x} = -V_x(x,t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

Теорема 8. *Пусть функции $g(x)$ линейные, $h(x)$, $d(x)$ — выпуклые, непрерывно дифференцируемые, $Z_0 \ne \emptyset$, Z компактное, выполнены условия* (1.3), (2.1). *Тогда метод* (3.1) *сходится к Z при любых $x_0 \in Z_0$.*

В качестве функции Ляпунова можно взять $V(x,t)$. Ее производная в силу (3.1) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} = -\|V_x\|^2 - \tau^{-2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \sum_{i=1}^{k} \xi(d^i(x)) \le 0.$$

В том случае, если V — строго выпуклая функция x, можно использовать метод Ньютона. В некоторых частных случаях (3.1) переходит в методы, предложенные в [12, 13].

§4. Методы решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, заданную в стандартной форме: найти

$$\min_{x \in X} C^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{E}^n : Ax = b,\ \ x \ge 0\}, \tag{4.1}$$

где $x, C \in \mathbb{E}^n$, $b \in \mathbb{E}^m$, A — матрица $m \times n$. Двойственная к (4.1) задача состоит в отыскании

$$\max_{p \in P} b^\top p, \qquad P = \{p \in \mathbb{E}^m : A^\top p \le C\}. \tag{4.2}$$

Через X_* и P_* будем обозначать множества решений задач (4.1) и (4.2) соответственно. Всюду ниже $x_* \in X_*$, $p_* \in P_*$. Для того чтобы векторы x_* и p_* были решениями (4.1) и (4.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$0 \le x_*, \qquad Ax_* = b, \qquad A^\top p_* \le c, \qquad C^\top x_* = b^\top p_*.$$

Составим внешние функции штрафа, положив для простоты $\varphi(y) = y^2/2$:

$$P(x,\tau) = C^\top x + \frac{\tau[\|Ax-b\|^2 + \|x_-\|^2]}{2}, \qquad G(p,s) = \frac{b^\top p - s\|w_-\|^2}{2},$$
$$w = C - A^\top p, \qquad z^i_- = \max[0, -z^i] \ge 0, \qquad z_- = [z^1_-, \dots, z^n_-].$$

Для решения прямой и двойственной задачи применим, например, метод (1.13), положив $\beta(\tau) = \tau$. Получим системы

$$\dot{x} = -P_x(x,\tau) = -C - \tau[A^\top(Ax-b) + x_-], \qquad \dot{\tau} = \tau P_\tau \Theta(T-\tau), \tag{4.3}$$

$$\dot{p} = G_p(x,s) = b - sAw_-, \qquad \dot{s} = -sG_s(p,s)\Theta(T-s). \tag{4.4}$$

Несложно вывести следующие верхние и нижние оценки:

$$G(p,s) - \frac{1}{2s}\|x_*\|^2 \le C^\top x_* = b^\top p_* \le P(x,\tau) + \frac{1}{2\tau}[\|p_*\|^2 + \|w_*\|^2].$$

Взяв T достаточно большим, можно получить сколь угодно точное решение задач (4.1) и (4.2). Сходимость этих методов и их дискретных вариантов следует из теоремы 4. Итеративные схемы, вытекающие из (1.5) и (1.13), отличаются исключительной простотой, их целесообразно использовать для решения задач высокой размерности. Однако возникают вычислительные трудности при решении задач с высокой точностью. Поэтому применение предложенных методов целесообразно для грубых, приближенных расчетов. Более точные вычисления следует проводить с использованием либо симплекс-метода, либо с помощью градиентных схем.

§5. Двойственные методы

Перейдем к рассмотрению другого класса методов, основанных на применении идеи множителей Лагранжа. Обозначим

$$I = \max_{p\in\mathbb{E}^e} \max_{w\in\mathbb{E}^c} \min_{x\in\mathbb{E}^n} H(x,p,w), \tag{5.1}$$

где

$$H(x,p,w) = F(x) + \sum_{i=1}^{e} p^i g^i(x) + \sum_{i=1}^{c} (w^i)^2 h^i(x).$$

Лемма 2. *Если $(\bar{x},\bar{p},\bar{w})$ — седловая точка функции $H(x,p,w)$, то $\bar{x}$ является решением задачи* (1.1), *причем $F(\bar{x}) = H(\bar{x},\bar{p},\bar{w})$.*

Лемма 3. *Для того чтобы точка $\bar{x} \in X$ была решением* (1.1), *достаточно, чтобы нашлись $\bar{p}$, $\bar{w}$ такие, что*

$$H(\bar{x},\bar{p},\bar{w}) = \inf_{x\in\mathbb{E}^n} H(x,\bar{p},\bar{w}), \qquad \bar{w}^i h^i(\bar{x}) = 0, \qquad i = 1,2,\dots,c.$$

Лемма 4. *Если точка* $\bar{x} \in X$*, то* $F(\bar{x}) = \sup\limits_{p \in \mathbb{E}^e} \sup\limits_{w \in \mathbb{E}^c} H(\bar{x}, p, w)$.

Обычно вместо (5.1) рассматривается задача

$$\max_{p \in \mathbb{E}^e} \max_{w \in T} \min_{x \in \mathbb{E}^n} \left[F(x) + \sum_{i=1}^{e} p^i g^i(x) + \sum_{i=1}^{c} w^i h^i(x) \right], \qquad T = \{w \in \mathbb{E}^c : w \geq 0\}. \tag{5.2}$$

Такой подход оправдан, если отсутствуют ограничения типа неравенств, так как в этом случае (1.1) можно заменить задачей отыскания безусловного седла функции Лагранжа. Общепринятое обобщение этого приема (5.2) для задач с ограничениями типа неравенств представляется неудачным, так как при такой редукции не получена задача на безусловное седло. Эта идея, однако, реализована в задаче (5.1). Теперь к задаче (5.1) (но не к (5.2)) можно применить существующие численные методы нахождения безусловного седла. Леммы 2–4 близки к аналогичным утверждениям относительно задачи (5.2), поэтому их доказательство приводить не будем.

Используем для решения (5.1) простейший градиентный метод, в котором движение по p и w производится в направлении градиентов H_p и H_w, по x — в направлении антиградиента $(-H_x)$:

$$\dot{x} = -H_x, \quad \dot{p} = H_p, \quad \dot{w} = H_w, \qquad x(0) = x_0, \quad p(0) = p_0, \quad w(0) = w_0. \tag{5.3}$$

В [14, 15] предложен ряд методов отыскания локального максимина. Применив два из них для решения (5.1), получим

$$\dot{x} = -H_x, \quad \dot{p} = g - g_x^\top H_{xx}^{-1} H_x, \quad \dot{w} = 2D(w)[h - -h_x^\top H_{xx}^{-1} H_x], \tag{5.4}$$

$$\dot{x} = -H_x - H_{xx}^{-1}(g_x g + 4h_x D(w) D(w) h), \quad \dot{p} = g, \quad \dot{w} = 2D(w)h. \tag{5.5}$$

Здесь $D(y)$ — диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент есть i-координата вектора y, размер матрицы $D(y)$ определяется размерностью y.

Необходимые условия максимина в задаче (5.1) будут

$$H_x(x, p, w) = O_{n1}, \qquad H_p(x, p, w) = O_{e1}, \qquad H_w(x, p, w) = O_{c1}. \tag{5.6}$$

Здесь символ O_{ij} обозначает матрицу $i \times j$, все элементы которой равны нулю. Для решения системы (5.6) применим метод Ньютона, получим следующую систему из $n+e+c$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$H_{xx}\dot{x} + H_{xp}\dot{p} + H_{xw}\dot{w} = -H_x, \quad H_{px}\dot{x} = -H_p, \quad H_{wx}\dot{x} + H_{ww}\dot{w} = -H_w. \tag{5.7}$$

Все производные функции H вычислены в точке $(x(t), p(t), w(t))$.

Используя обозначение $z = (x, p, w) \in \mathbb{E}^{n+e+c}$, метод (5.7) и его дискретный аналог можно записать в сжатой форме:

$$\begin{gathered} H_{zz}(z)\dot{z} = -H_z(z), \qquad z(0) = z_0, \\ z_{s+1} = z_s - H_{zz}^{-1}(z_s) H_z(z_s), \qquad s = 0, 1, \ldots . \end{gathered} \tag{5.8}$$

При отсутствии в задаче (1.1) ограничений типа неравенств метод (5.3) изучался в [16, 17], методы (5.4), (5.5) — в [15], метод (5.7) — в [18, 19]. Приведенные ниже теоремы и их доказательства обобщают результаты этих работ.

Через $z_* = (x_*, p_*, w_*)$ будем обозначать точки, в которых выполнены условия (5.6). Такие точки назовем стационарными. Введем индексное множество

$$B(x) = \{i : h^i(x) = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, c\}.$$

Определение 2. *Ограничения $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условию регулярности в точке $x \in \mathbb{E}^n$, если $g(x)$ и $h(x)$ непрерывно дифференцируемы в точке x, векторы $g^j_x(x)$, $j = 1, 2, \ldots, e$, и все векторы $h^i_x(x)$ такие, что $i \in B(x)$, являются линейно-независимыми.*

Определение 3. *В стационарной точке z_* выполнено условие строгой дополняющей нежесткости, если для всех $i = 1, 2, \ldots, c$ из условия $h^i(x_*) = 0$ следует, что $w^i_* > 0$.*

Лемма 5. *Пусть F, g, h дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности x_*, в стационарной точке z_* выполнено условие строгой дополняющей нежесткости и регулярности ограничений, $h(x_*) \leq 0$, матрица вторых производных $H_{xx}(z_*)$ положительно-определенная. Тогда матрица*

$$N(z_*) = \|H_{xp} \; H_{xw}\|^\top H^{-1}_{xx} \|H_{xp} \; H_{xw}\| - \left\| \begin{array}{cc} H_{pp} & H_{pw} \\ H_{wp} & H_{ww} \end{array} \right\|$$

положительно-определенная, точка z_* является локальной изолированной седловой точкой функции $H(z)$, точка x_* — локальным решением задачи (1.1). Матрица $H_{zz}(z_*)$ неособая.

Матрица N выражена через матрицы, вычисленные в точке $z = z_*$.

Доказательство. Покажем вначале, что матрица $H_{zz}(z_*)$ неособая. Для этого достаточно показать, что не существует ненулевого решения системы $H_{zz}(z_*)\bar{z} = 0$. Опуская аргументы функций, запишем эту систему подробно:

$$H_{xx}\bar{x} + g_x\bar{p} + 2h_x D(w_*)\bar{w} = O_{n1}, \tag{5.9}$$

$$g^\top_x \bar{x} = O_{e1}, \qquad D(w_*)h^\top_x \bar{x} + D(h)\bar{w} = O_{c1}. \tag{5.10}$$

Из (5.10) следует, что для всех $i \in B(x_*)$ выполнены условия $h^i(x_*) = 0$, $w^i_* > 0$, $\bar{x}^\top h^i_x(x_*) = 0$ и для $i \notin B(x_*)$ имеем $h^i(x_*) < 0$, $w^i_* = 0$, $\bar{w}^i = 0$. Поэтому в обоих случаях $h^i(x_*)\bar{w}^i = 0$ и $D(w_*)h^\top_x \bar{x} = O_{c1}$. Пусть $\|\bar{x}\| \neq 0$, тогда, умножая (5.9) слева на $\bar{x}^\top$ и учитывая (5.10), получим $\bar{x}^\top H_{xx}(z_*)\bar{x} = 0$, что противоречит положительной определенности матрицы $H_{xx}(z_*)$. Рассмотрим случай, когда $\bar{x} = 0$. Из (5.9), (5.10) следует

$$g_x(x_*)\bar{p} + 2\sum_{i \in B(x_*)} h^i_x(x_*) w^i_* \bar{w}^i = O_{n1}, \qquad h^i(x_*)\bar{w}^i = 0.$$

Все $w^i_* > 0$ для $i \in B(x_*)$; учитывая условие регулярности ограничений, приходим к выводу, что $\bar{p} = 0$ и $\bar{w}^i = 0$, если $i \in B(x_*)$, но выше мы получили, что $\bar{w}^i = 0$, если $i \notin B(x_*)$. Поэтому все векторы $\bar{x}$, $\bar{p}$, $\bar{w}$, удовлетворяющие системе (5.9), (5.10), нулевые, матрица $H_{zz}(z_*)$ неособая.

Не нарушая общности, можно считать, что $h^i(x_*) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, s$ и $h^i(x_*) < 0$ для $i = s+1, \ldots, c$. Введем векторы $v = [p^1, \ldots, p^e, w^1, \ldots, w^s] \in \mathbb{E}^k$, $k = e + s$, и $\tilde{h} = [h^{s+1}, \ldots, h^c] \in \mathbb{E}^r$, $r = c - s - 1$. Матрицу $N(z_*)$ можно представить следующим образом:

$$N(z_*) = \|H_{xv} \; O_{nr}\|^\top H^{-1}_{xx} \|H_{xv} \; O_{nr}\| - 2\left\| \begin{array}{cc} O_{ee} & O_{ec} \\ O_{ce} & D(h) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} H_{vx}H^{-1}_{xx}H_{xv} & O_{kr} \\ O_{rk} & -2D(\tilde{h}) \end{array} \right\|.$$

Но в силу условия строгой дополняющей нежесткости все $w_*^i > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, s$, поэтому из условия регулярности ограничений получаем, что столбцы матрицы H_{xv} линейно-независимы и ранг этой матрицы максимальный, равный k. Следовательно, матрица $H_{vx}H_{xx}^{-1}H_{xv}$ положительно-определенная. Диагональная матрица $-D(\tilde{h})$ также по условию положительно-определенная. Отсюда следует положительная определенность матрицы $N(z_*)$.

Согласно достаточным условиям [14] точка z_* является изолированной точкой локального максимина в задаче (5.1). Учитывая, что точка x_* допустимая, получим

$$F(x_*) = H(z_*) = \max_{p \in P} \max_{w \in W} \min_{x \in R} H(z);$$

здесь P, W, R — некоторые окрестности точек p_*, w_*, x_* соответственно. Принимая во внимание лемму 4, получим, что для всех $x \in R$, $p \in \mathbb{E}^e$, $w \in \mathbb{E}^c$ выполняются неравенства

$$H(x_*, p, w) \le H(x_*, p_*, w_*) \le H(x, p_*, w_*),$$

т.е. точка z_* является локальным по x, глобальным по p и w седлом функции $H(z)$. $\square$

Возможны дискретные варианты методов (5.3) – (5.5). Для (5.3), например, имеем

$$x_{s+1} = x_s - \alpha H_x(x_s, p_s, w_s), \;\; p_{s+1} = p_s + \alpha H_p(x_s, p_s, w_s), \;\; w_{s+1} = w_s + \alpha H_w(x_s, p_s, w_s), \quad (5.11)$$

где $0 < \alpha < d$, величина d зависит от корней характеристического уравнения в отклонениях.

Теорема 9. *Пусть в точке z_* выполнены условия леммы* 5. *Тогда методы* (5.3) – (5.5) *локально экспоненциально сходятся к точке z_*, их дискретные варианты вида* (5.11) *локально сходятся к z_* при α достаточно малом со скоростью геометрической прогрессии. Если, кроме того, $H_{zz}(z)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки z_*, тогда метод* (5.8) *локально сходится к z_*, причем $\|z(t) - z_*\| \le C(\varepsilon)e^{-t}$, если $\|z_0 - z_*\| \le \varepsilon$, дискретный вариант метода Ньютона локально сходится к z_* с квадратичной скоростью.*

Доказательство. Для доказательства составим уравнения в вариациях. Обозначим через $\delta x = x(t) - x_*$, $\delta p = p(t) - p_*$, $\delta w = w(t) - w_*$, $\delta z = (\delta x, \delta p, \delta w)$. Отбрасывая члены второго порядка малости для системы (5.3), получаем

$$\delta \dot{z}(t) = M \delta z(t), \quad \text{где} \quad M = \left\| \begin{array}{ccc} -H_{xx} & -g_x & -2h_x D(w) \\ g_x^\top & O_{ee} & O_{ec} \\ 2D(w)h_x^\top & O_{ce} & 2D(h) \end{array} \right\|.$$

Все элементы блочной матрицы M вычислены в точке z_*. Теорема будет доказана если удастся показать, что характеристическое уравнение матрицы M имеет корни только с отрицательными действительными частями. Пусть $Mz = \lambda z$, $z = (x, p, w)$, вектор $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{w})$ комплексно-сопряжен вектору z. Считаем, что модуль $|z| \neq 0$, тогда

$$\operatorname{Re} \bar{z}^\top M z = \operatorname{Re} \lambda |z|^2 = \operatorname{Re} [-\bar{x}^\top H_{xx}(z_*) x + 2\bar{w}^\top D(h(x_*)) w] \le 0.$$

Последнее неравенство следует из положительной определенности $H_{xx}(z_*)$ и из того, что $h(x_*) \le 0$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda = 0$, тогда $\operatorname{Re} [-\bar{x}^\top H_{xx}(z_*) x + 2\bar{w}^\top D(h(x_*)) w] = 0$ только в том случае, если $x = 0$ и $w^i = 0$ для i таких, что $h^i(x_*) \neq 0$. Из системы $Mz = \lambda z$ получим уравнение

$$g_x(x_*) p + 2 \sum_{i \in B(x_*)} h_x^i(x_*) w_*^i w^i = O_{n1},$$

которое имеет место только если $p = O_{e1}$ и $w^i = 0$ для всех $i \in B(x_*)$, поэтому $w = O_{c1}$ и $z = O_{n+e+c}$, что противоречит исходному предположению $|z| \neq 0$. Таким образом, случай $\operatorname{Re}\lambda = 0$ невозможен и $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Сходимость методов (5.4) и (5.5) следует из анализа характеристических уравнений. Их характеристические числа оказываются действительными, и это существенно упрощает доказательство. Несложно показать, что для обоих методов характеристические уравнения совпадают и имеют вид

$$|H_{xx}(z_*) + \lambda I_n|\,|N(z_*) + \lambda I_{c+e}| = 0; \tag{5.12}$$

здесь I_s — единичная матрица размера $s \times s$.

Матрицы $N(z_*)$, $H_{xx}(z_*)$ положительно-определенные, поэтому корни уравнения (5.12) отрицательные.

Доказательство сходимости дискретных вариантов просто следует из доказательства сходимости непрерывных методов, подобно тому как это было показано в [15, 17]. Дискретные варианты методов (5.3) – (5.5) локально сходятся со скоростью геометрической прогрессии. Требование положительной определенности матрицы $H_{xx}(z_*)$ в методе Ньютона можно ослабить, заменив его следующим: для каждого ненулевого вектора s, для которого $s^\top g_x(x_*) = 0$ и $s^\top h_x^j(x_*) = 0$ при $j \in B(x_*)$, справедливо неравенство $s^\top H_{zz}(z_*)s \neq 0$. В методе (5.3), помимо этого условия, следует потребовать, чтобы матрица $H_{xx}(z_*)$ была положительно-определенная и матрица $H_{xx}(z_*)H_{xv}(z_*)$ имела максимальный ранг, равный k. $\square$

Для решения задачи (1.1) могут быть применены многие другие методы отыскания минимакса и седла. Приведем два метода из [15]. Для простоты выпишем только непрерывные варианты методов:

$$\dot p = g(x(p,w)), \qquad \dot w = 2D(w)h(x(p,w)),$$
$$H(x(p,w),p,w) = \min_{x \in \mathbb{E}^n} H(x,p,w),$$
$$\dot x = -H_{xx}^{-1}H_x, \qquad \dot p = g + g_x^\top \dot x, \qquad \dot w = 2D(w)[h + h_x^\top \dot x].$$

Для сходимости этих методов следует потребовать, чтобы матрица $H_{xx}(z_*)$ была неособой, $N(z_*)$ — положительно-определенной.

Для расширения области сходимости оказывается полезным введение функций штрафа. Учтем таким образом ограничения типа равенств. Метод (5.3) будет иметь вид

$$\dot x = -\Gamma_x, \qquad \dot p = \Gamma_p, \qquad \dot w = \Gamma_w, \qquad \Gamma = H + a\sum_{i=1}^{e}[g^i(x)]^2;$$

здесь $a \geq 0$ — некоторая постоянная. Аналогично модифицируются остальные методы.

Методы настоящего параграфа обладают существенно более высокой скоростью сходимости, чем из § 1 и § 2. Однако область сходимости здесь существенно меньше, чем в методах штрафов. Для практических расчетов целесообразно использовать не один отдельный метод, а их набор. Начальные, грубые расчеты удобно проводить с помощью методов штрафов, более точное решение следует искать с помощью быстро сходящихся алгоритмов.

§6. Численные методы решения многошаговых задач

Пусть k-шаговый процесс описывается рекуррентными соотношениями

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{6.1}$$

Здесь $x_i \in \mathbb{E}^n$, $u_i \in \mathbb{E}^r$. Задача состоит в отыскании управления $u_1, \ldots, u_k$, которое минимизирует функцию $\sum_{i=1}^{k} F(x_i, u_i)$ при наличии ограничений общего вида

$$h_i^j(x_i, u_i) \le 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, c.$$

Задание всех управлений u_i однозначно определяет все x_i, поэтому (6.1) является частным специальным случаем задачи (1.1). Таким образом, для решения поставленной задачи можно использовать предложенные выше методы. Следуя, например, § 1, составим внешнюю функцию штрафа:

$$W(z, \tau) = \sum_{i=1}^{k} \left[F_i(x_i(z), u_i) + \tau \sum_{j=1}^{c} S(h_i^j(x_i(z), u_i)) \right];$$

здесь $x = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{E}^{k \times r}$, $x_i(z)$ — значение вектора x_i, соответствующее управлению z в силу системы (6.1); $S(y) = 0$, если $y \le 0$, и $S(y) > 0$ в противном случае.

Если f_i, F_i, S_i, h_i — дифференцируемые функции своих аргументов, то несложно получить следующие формулы для вычисления производных:

$$\frac{dW}{du_i} = \frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{\partial f_i}{\partial u_i} p_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1;$$

если $i = k$, то $dW/du_k = \partial W/\partial u_k$, векторы $p_i \in \mathbb{E}^n$ определяются из соотношений

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial x_k}, \qquad p_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} p_{i+1} + \frac{\partial W}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1; \tag{6.2}$$

здесь $\partial f_i/\partial u_i$ и $\partial f_i/\partial x_i$ — матрицы $r \times n$ и $n \times m$, у которых на пересечении s-строки и j-столбца стоят соответственно $\partial f_i^j/\partial u_i^s$ и $\partial f_i^j/\partial x_i^s$.

Метод (1.13) в данном случае приводит к системе

$$\dot{u}_i = -\frac{dW}{du_i}, \qquad \dot{\tau} = \tau\theta(T - \tau) \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{c} S(h_i^j), \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{6.3}$$

Для реализации метода следует просчитать “слева направо” (6.1) и “справа налево” (6.2), изменяя при этом, согласно дискретной аппроксимации системы (6.3), управления u_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Таким же образом двойственный метод (5.3) приводит к схеме $\dot{u}_i = -dH/du_i$, $\dot{w}_i^j = 2w_i^j h_i^j$. Здесь

$$H = \sum_{i=1}^{k} \left[F_i + \sum_{j=1}^{c} (w_i^j)^2 h_i^j \right].$$

Достаточные условия сходимости формулируются аналогично приведенным выше.

§7. Нахождение седловых точек

Все приведенные выше методы очевидным образом обобщаются для решения задачи отыскания седловых точек функций на несвязанных множествах. Пусть отыскивается

$$\begin{gathered} \min_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y), \\ X = \{x \in \mathbb{E}^n : g(x) = 0, \ \ h(x) \le 0\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{E}^m : G(y) = 0, \ \ H(y) \le 0\}, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где $G \in \mathbb{E}^\tau$, $H \in \mathbb{E}^r$. Введем векторы $P \in \mathbb{E}^\tau$, $W \in \mathbb{E}^r$ и обозначим

$$\Phi(x,y,p,w,P,W) = F(x,y) + \sum_{i=1}^{e} p^i g^i(x) + \sum_{i=1}^{c} (w^i)^2 h^i(x) - \sum_{i=1}^{\tau} P^i G^i(y) - \sum_{i=1}^{r} (W^i)^2 H^i.$$

Имеет место следующее утверждение, аналогичное результатам [20, 21].

Лемма 6. *Если $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{w}, \bar{P}, \bar{W})$ — седловая точка в задаче*

$$\max_{y \in \mathbb{E}^m} \max_{p \in \mathbb{E}^e} \max_{w \in \mathbb{E}^c} \min_{x \in \mathbb{E}^n} \min_{P \in \mathbb{E}^\tau} \min_{W \in \mathbb{E}^r} \Phi(x,y,p,w,P,W), \tag{7.2}$$

тогда $(\bar{x}, \bar{y})$ — седловая точка в задаче (7.1).

Для решения задачи (7.2) применим, например, простейший из предложенных методов (5.3); получим

$$\dot{x} = -\Phi_x, \quad \dot{p} = \Phi_p, \quad \dot{w} = \Phi_w, \quad \dot{y} = \Phi_y, \quad \dot{P} = -\Phi_P, \quad \dot{W} = -\Phi_W. \tag{7.3}$$

Те точки z_*, в которых правые части системы (7.3) обращаются в нуль, будем называть стационарными.

Теорема 10. *Пусть в стационарной допустимой точке z_* матрицы $\Phi_{xx}(z_*)$ и $-\Phi_{yy}(z_*)$ положительно-определенные, ограничения g, h и G, H удовлетворяют условиям регулярности, выполнены условия строгой дополняющей нежесткости. Тогда метод* (7.3) *локально экспоненциально сходится к точке z_*.*

Доказательство проводится так же, как и в теореме 9. Аналогично обобщаются и все остальные методы.

Приложение

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{П.1}$$

где $f(x,t) \in C^{10}_{xt}(\mathbb{E}^n \times J)$, $J = \{t_0 \le t < \infty\}$. Исследуется сходимость решений $x(x_0,t)$ системы (П.1) к компактному множеству X_*.

Теорема Т.1. *Пусть решения* (П.1) *продолжимы при $t \to \infty$; существует скалярная функция $v(x) \in C^1_x(\mathbb{E}^n)$ такая, что $v(x) = 0$, если $x \in X_*$, $v(x) > 0$, если $x \notin X_*$; производная $\dot{v}(x)$ в силу системы* (П.1) *удовлетворяет условиям: для любого $\delta > 0$ существует $t(\delta)$ такое, что для всех $t \ge t(\delta)$ выполнены условия*

$$p(t) = \sup_{x \in \mathbb{E}^n \setminus X_*^\delta} \dot{v}(x) \le 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \int_{t(\delta)}^{t} p(t)dt = -\infty, \qquad X_*^\delta = \{x : \rho(x, X_*) < \delta\}.$$

Тогда каждая предельная точка решения (П.1) *принадлежит множеству X_* при любых x_0.*

Доказательство проводится обычными рассуждениями теории устойчивости.

Замечание. В [22, 23] даны результаты численных расчетов по некоторым изложенным схемам. Близкий к § 1 подход использован в [24, 25].

Цитированная литература

1. *А. Фиакко, Г. Мак-Кормик.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972.

2. *В.И. Венец.* Седловая точка функции Лагранжа и негладкие штрафные функции. Автоматика и телемеханика, 1974, N° 8, 109–118.

3. *Н.З. Шор.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Дисс. докт. физ.-матем. наук, Киев, ИК АН УССР, 1970.

4. *Б.С. Разумихин.* Задачи об оптимальном распределении ресурсов. Автоматика и телемеханика, 1967, N° 1, 62–74.

5. *Б.Т. Поляк.* О скорости сходимости метода штрафных функций. ЖВМ и МФ, 1971, **11**, N° 1, 3–11.

6. *Ю.Г. Евтушенко, В.Г. Жадан.* Применение метода функций Ляпунова для исследования сходимости численных методов. ЖВМ и МФ, 1975, **15**, N° 1, 101–112.

7. *Yu.G. Evtushenko.* Algorithms for solving nonlimear programming problems. Proc. 1974. Optimization Techniques IFIP Techn. Conf. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975, 308–313.

8. *Ю.Г. Евтушенко.* Численные методы нелинейного программирования. ДАН СССР, 1975, **221**, N° 5, 1016–1019.

9. *Ю.Г. Евтушенко.* Два численных метода решения задач нелинейного программирования. ДАН СССР, 1974, **215**, N° 1, 38–40.

10. *И.И. Ерёмин.* О методе “штрафов” в выпуклом программировании. Кибернетика, 1967, N° 4, 63–67.

11. *В.Д. Скарин.* О методе штрафных функций для задач нелинейного программирования. ЖВМ и МФ, 1973, **13**, N° 5, 1186–1199.

12. *Б.Т. Поляк.* Градиентные методы решения уравнений и неравенств. ЖВМ и МФ, 1964, **4**, N° 6, 995–1005.

13. *М.В. Рыбашов, Е.Е. Дудников.* Градиентные методы решения линейных равенств, неравенств и задач линейного программирования на аналоговых вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1970.

14. *Ю.Г. Евтушенко.* Некоторые локальные свойства минимаксных задач. ЖВМ и МФ, 1974, **14**, N° 3, 669–679.

15. *Ю.Г. Евтушенко.* Итеративные методы решения минимаксных задач. ЖВМ и МФ, 1974, **14**, N° 5, 1138–1149.

16. *К.Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава.* Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во ин. лит., 1954.

17. *Б.Т. Поляк.* Итерационные методы, использующие множители Лагранжа, для решения экстремальных задач с ограничениями типа равенства. ЖВМ и МФ, 1970, **10**, N° 5, 1098–1108.

18. *Э.Л. Аким, Т.М. Энеев.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. Космические исследования, 1963, **1**, N° 1, 5–28.

19. *М.К. Гавурин.* Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв. ВУЗов. Сер. матем., 1958, **6**, N° 5, 18–31.

20. *Ю.Б. Гермейер.* К задаче отыскания максимина с ограничениями. ЖВМ и МФ, 1970, **10**, N° 1, 39–54.

21. *В.В. Хоменюк.* Методы оптимизации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973.

22. *Yu.G. Evtushenko.* Generalized Lagrange multiplier technique for nonlinear programming. Internat. Inst. Appl. Systems Analysis. Wienna, 1975, RR.

23. *Yu. Evtushenko, R.D. MacKinnon.* Nonlinear programming approach to national settlement system planning. Internat. Inst. Appl. System Analysis. Wienna, 1975, RR.

24. *М.А. Шепилов.* Непрерывные аналоги метода штрафов для задач выпуклого программирования. Экономика и матем. методы, 1975, **11**, N° 1, 130–140.

25. *А.И. Казьмин, М.В. Рыбашов.* Непрерывный алгоритм в методе штрафных функций. Автоматика и телемеханика, 1975, N° 5, 38–45.