ДАН, 2001, т. 381, No.4, с. 444–447

УДК 519.852.2

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

А.И. Голиков, член-корреспондент РАН Ю.Г. Евтушенко

Решению систем равенств и неравенств посвящена обширная литература. Сошлемся лишь на некоторые публикации [1, 2, 3]. Обычно эти задачи решаются путем редукции к безусловной минимизации невязок исходной системы. С каждой линейной системой связана альтернативная система такая, что разрешима одна и только одна из этих систем. Априори неизвестно, имеет ли данная система решения. Поэтому следует, во-первых, выяснить, разрешима ли заданная система и, во-вторых, если она разрешима, то найти ее решение.

В данной работе предлагается метод решения линейных систем на основе использования теорем об альтернативах [3]–[6]. Для заданной линейной системы строится альтернативная система, размерность переменных которой равна числу равенств и неравенств в исходной системе (исключая ограничения на знак переменных). Метод решения исходной разрешимой системы состоит в минимизации невязки альтернативной несовместной системы. По результатам этой минимизации определяется нормальное решение исходной системы (решение с минимальной евклидовой нормой). Обоснование метода проводится на основе теории двойственности.

Благодаря различию размерностей переменных альтернативных систем переход от исходной совместной системы к минимизации невязки альтернативной несовместной системы может оказаться весьма целесообразным. Эта редукция может привести к задаче минимизации по переменным меньшей размерности и дать возможность определить нормальное решение исходной системы.

Пусть A — матрица $m \times n$ — задана в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Здесь прямоугольные матрицы A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} имеют размерности $m_1 \times n_1$, $m_1 \times n_2$, $m_2 \times n_1$, $m_2 \times n_2$ сответственно. Пусть векторы $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ имеют разбиение $x^\top = [x_1^\top, x_2^\top]$, $u^\top = [u_1^\top, u_2^\top]$, $b^\top = [b_1^\top, b_2^\top]$, где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$, $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$. Введем два вспомогательных множества

$$\Pi_x = \{[x_1, x_2] : x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}_+,\ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}\}, \qquad \Pi_u = \{[u_1, u_2] : u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+,\ u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}\}.$$

Рассмотрим систему линейных равенств и неравенств

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \qquad x_1 \geq 0_{n_1}. \tag{I}$$

Определим *сопряженную систему* к (I)

$$A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2 \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top z_1 + A_{22}^\top z_2 = 0_{n_2}, \qquad z_1 \geq 0_{m_1}. \tag{I$'$}$$

Введем *альтернативную* к (I) систему

$$A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2 \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2 = 0_{n_2}, \qquad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho, \quad u_1 \geq 0_{m_1}. \tag{II}$$

Здесь $\rho > 0$ — произвольное фиксированное положительное число. Отметим, что требование положительности ρ автоматически предполагает выполнение условия $\|b\| \neq 0$.

Введем вектор $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, представимый в виде $w^\top = [w_1^\top, w_2^\top, w_3]$, где $w_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $w_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w_3 \in \mathbb{R}^1$, и вспомогательное множество $\Pi_w = \{[w_1, w_2, w_3] : w_1 \in \mathbb{R}^{n_1}_+,\ w_2 \in \mathbb{R}^{n_2},\ w_3 \in \mathbb{R}^1\}$.

Для системы (II) сопряженная система имеет вид

$$A_{11}w_1 + A_{12}w_2 - b_1 w_3 \geq 0_{m_1}, \quad A_{21}w_1 + A_{22}w_2 - b_2 w_3 = 0_{m_2}, \qquad w_1 \geq 0_{n_1}. \qquad (\mathrm{II}')$$

Множества решений систем (I), (I$'$), (II) и (II$'$) обозначим соответственно через X, Z, U и W. В отличие от (I) и (II) системы (I$'$) и (II$'$) всегда имеют решения, так как $0_m \in Z$ и $0_{n+1} \in W$.

Лемма 1. *Системы* (I) *и* (II) *не могут быть одновременно разрешимы.*

Ниже из теорем 2 и 4 будет следовать, что всегда имеет решение одна и только одна из систем: либо (I), либо (II). Поэтому эти системы являются альтернативными. Система, альтернативная к (II), сводится к исходной системе (I).

Через $\mathrm{pen}\,(x, X)$ обозначим штраф в точке $x \in \Pi_x$ за нарушение условия $x \in X$. В качестве штрафа будем использовать евклидову норму вектора невязок

$$\mathrm{pen}\,(x, X) = \left[\|(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2)_+\|^2 + \|b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2\|^2\right]^{1/2}.$$

Аналогично определим

$$\mathrm{pen}\,(u, U) = \left[\|(A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2)_+\|^2 + \|A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2\|^2 + (\rho - b_1^\top u_1 - b_2^\top u_2)^2\right]^{1/2}. \qquad (1)$$

Здесь и ниже a_+ есть неотрицательная часть вектора a, т.е. i-я компонента вектора a_+ совпадает с i-й компонентой вектора a, если она неотрицательна, и равна нулю в противном случае.

Введем следующие четыре задачи:

$$I_1 = \min_{x \in \Pi_x} [\mathrm{pen}\,(x, X)]^2/2, \qquad (2)$$

$$I_2 = \min_{u \in \Pi_u} [\mathrm{pen}\,(u, U)]^2/2, \qquad (3)$$

$$I_1^d = \max_{z \in Z} \{b^\top z - \|z\|^2/2\}, \qquad (4)$$

$$I_2^d = \max_{w \in W} \{\rho w_3 - \|w\|^2/2\}. \qquad (5)$$

Множества Z и W всегда непусты, так как содержат нулевые векторы. В отличие от систем (I), (II), которые могут быть разрешимы или неразрешимы, задачи (2) – (5) всегда имеют решения. При этом задачи (4) и (5) всегда имеют единственные решения, так как в них допустимые множества Z и W непусты и строго вогнутые квадратичные целевые функции ограничены сверху. Задачи (2) и (3) являются двойственными к задачам (4) и (5) соответственно.

Проекцией точки $\bar{x}$ на непустое замкнутое множество X назовем точку $x^* \in X$, ближайшую к точке $\bar{x}$, т.е. x^* является решением задачи $\min\limits_{x \in X} \|\bar{x} - x\|^2/2 = \|\bar{x} - x^*\|^2/2$. Будем писать $x^* = \mathrm{pr}\,(\bar{x}, X)$, расстояние от точки $\bar{x}$ до множества X обозначим $\mathrm{dist}\,(\bar{x}, X) = \|x^* - \bar{x}\|$.

Теорема 1. *Всякое решение x^* задачи* (2) *определяет единственное решение $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ задачи* (4) *по формулам*

$$z_1^* = (b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+, \qquad z_2^* = b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^* \qquad (6)$$

и справедливы следующие утверждения:

$$
\begin{gathered}
\|z^*\|^2 = b^\top z^*, \\
z^* \bot A x^*, \qquad z^* \bot (b - z^*), \\
z^* = \mathrm{pr}\,(b, Z), \qquad \|z^*\| = \mathrm{pen}\,(x^*, X), \qquad \|b - z^*\| = \mathrm{dist}\,(b, Z), \\
[\mathrm{pen}\,(x^*, X)]^2 + [\mathrm{dist}\,(b, Z)]^2 = \|b\|^2.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Соотношение (7) следует из равенства оптимальных значений целевых функций прямой (4) и двойственных задач (2). Это равенство в силу (6) выражено только через z^* — решение задачи (4).

Теорема 2. *Пусть* $x^{*\top} = [x_1^{*\top}, x_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (2), $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ *— единственное решение задачи* (4)*; тогда*

1. *Если* $\|z^*\| = 0$, *то* $I_1 = I_1^d = 0$, $\mathrm{dist}\,(b, Z) = \|b\|$, *система* (I) *разрешима, одним из ее решений является вектор* x^**; система* (II) *неразрешима;*

2. *Если* $\|z^*\| \neq 0$, *то* $I_1 = I_1^d > 0$, $\mathrm{dist}\,(b, Z) < \|b\|$, *и система* (I) *неразрешима; система* (II) *разрешима, и вектор* $u^* = \rho z^* / \|z^*\|^2$ *— ее нормальное решение.*

Введем матрицу $\bar{A} = [-A, b]$ размера $m \times (n+1)$ и вектор $r \in \mathbb{R}^{n+1}$, представимый в виде $r^\top = [0_n^\top, \rho]$.

Теорема 3. *Пусть* $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (3)*. Тогда решение* $w^{*\top} = [w_1^{*\top}, w_2^{*\top}, w_3^*]$ *задачи* (5) *выражается через решение* u^* *задачи* (3) *по формулам*

$$
w_1^* = (A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*)_+, \qquad w_2^* = A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*, \qquad w_3^* = \rho - b_1^\top u_1^* - b_2^\top u_2^* \tag{8}
$$

и справедливы следующие утверждения:

$$
\begin{gathered}
\|w^*\|^2 = \rho w_3^*; \\
w^* \bot \bar{A}^\top u^*, \qquad w^* \bot (r - w^*), \\
w^* = \mathrm{pr}\,(r, W), \qquad \|w^*\| = \mathrm{pen}\,(u^*, U), \qquad \|r - w^*\| = \mathrm{dist}\,(r, W), \\
[\mathrm{pen}\,(u^*, U)]^2 + [\mathrm{dist}\,(r, W)]^2 = \|r\|^2, \\
\|w^*\| \leq \rho, \quad 0 \leq w_3^* \leq \rho, \quad \|w_1^*\|^2 + \|w_2^*\|^2 \leq \rho^2/4.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Соотношение (9) следует из равенства оптимальных значений целевых функций прямой (5) и двойственной (3) задач. В силу (8) это равенство выражено только через w^* — решение задачи (5).

Теорема 4. *Пусть* $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (3), $w^{*\top} = [w_1^{*\top}, w_2^{*\top}, w_3^*]$ *— решение задачи* (5)*, определяемое по формулам* (8)*; тогда*

1. *Если* $\|w^*\| = 0$, *то* $I_2 = I_2^d = 0$, *система* (II) *разрешима, одним из ее решений является* u^**; система* (I) *неразрешима.*

2. *Если* $\|w^*\| \neq 0$, *то* $w_3^* > 0$, $I_1 = I_1^d > 0$, *система* (II) *неразрешима; система* (I) *разрешима, и вектор* x^* *с составляющими* $x_1^* = w_1^*/w_3^*$, $x_2^* = w_2^*/w_3^*$ *— ее решение с минимальной евклидовой нормой.*

Возможны различные варианты представления альтернативной системы (II). Как следует из приведенных теорем, система, альтернативная к (I), получается из сопряженной системы (I′) путем добавления условия, исключающего возможность тривиального решения системы (I′). Например, можно потребовать для решений сопряженной системы (I′) выполнения условия $b^\top u > 0$ (как в альтернативе Фаркаша), либо условия $b^\top u = 1$ (как в альтернативе Гейла), либо наложить нелинейное условие $\|u\|^2 = \rho$, где $\rho > 0$ — произвольная фиксированная величина, и т.д.

Применим приведенные выше результаты к задачам линейного программирования (ЛП). Пусть прямая задача ЛП задана в виде

$$\min_{x \in X} c^\top x, \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

Здесь A — матрица $m \times n$ ранга m, $m < n$, $\nu = n - m$ — дефект матрицы A, векторы c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Вместо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности для задач ЛП воспользуемся условиями из [7]. Для этого введем матрицу K размера $\nu \times n$ ранга ν и такую, что $\operatorname{im} K^\top = \ker A$, $AK^\top = 0$, $\mathbb{R}^n = \operatorname{im} A^\top \oplus \operatorname{im} K^\top$. Определим $d = Kc \in \mathbb{R}^{nu}$ и вектор невязок $v = c - A^\top u$. Введем два аффинных множества

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}, \qquad \bar{V} = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d\}.$$

Через $\bar{x}$ и $\bar{v}$ обозначим произвольные фиксированные n-мерные векторы, удовлетворяющие соответственно условиям $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{v} \in \bar{V}$.

Согласно [7] необходимые и достаточные условия минимума в задаче (P) имеют вид

$$\begin{bmatrix} A & 0_{mn} \\ 0_{\nu n} & K \\ \bar{v}^\top & \bar{x}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \\ \bar{x}^\top \bar{v} \end{bmatrix}, \qquad x \geq 0_n, \quad v \geq 0_n. \tag{10}$$

Если задача (P) имеет решение, то система (10) совместна; решая ее, находим решения задачи (P) и сопряженной задачи

$$\min_{v \in V} \bar{x}^\top v, \qquad V = \{v \in \mathbb{R}^n : Kv = d,\ v \geq 0_n\}. \tag{C}$$

Система (10) состоит из $n+1$ условий равенств, $2n$ неравенств и содержит $2n$ неизвестных. Альтернативная система имеет только $n+1$ неизвестных и состоит из $2n$ линейных неравенств и одного равенства:

$$\begin{bmatrix} A^\top & 0_{n\nu} & \bar{v} \\ 0_{nm} & K^\top & \bar{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ \alpha \end{bmatrix} \leq 0_{2n}, \qquad b^\top p + d^\top q + \bar{x}^\top \bar{v} \alpha = \rho, \tag{11}$$

где $\rho > 0$ — произвольная положительная константа.

Так как система (10) совместна, то альтернативная система (11) несовместна. Задача (3) в данном случае записывается в виде

$$\min_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{q \in \mathbb{R}^\nu} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^1} \frac{\left[\|(A^\top p + \bar{v}\alpha)_+\|^2 + \|(K^\top q + \bar{x}\alpha)_+\|^2 + (\rho - b^\top p - d^\top q - \bar{x}^\top \bar{v}\alpha)^2\right]}{2}.$$

В результате решения этой задачи находятся оптимальные векторы p^*, q^*, α^*, по которым вычисляются невязки несовместной системы (11)

$$w_x^* = (A^\top p^* + \bar{v}\alpha^*)_+, \qquad w_v^* = (K^\top q^* + \bar{x}\alpha^*)_+, \qquad w_3^* = \rho - b^\top p^* - d^\top q^* - \bar{x}^\top \bar{v}\alpha^*.$$

Согласно теореме 4 нормальные решения системы (10) определяются по формулам $\tilde{x}^* = w_x^*/w_3^*$, $\tilde{v}^* = w_v^*/w_3^*$ и одновременно они являются нормальными решениями задач (P) и (C).

Решение задачи ЛП, таким образом, свелось к однократной безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой кусочно-квадратичной функции от $n+1$ переменной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта N 01-01-00804, и по программе государственной поддержки ведущих научных школ, код проекта N 00-15-96080.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

2. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

3. *Разумихин Б.С.* Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. М.: Наука, 1975.

4. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

5. *Mangasarian O.L.* Nonlinear Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.

6. *Giannessi F.* // Encyclopedia of Optimization. Dordrecht; Boston; London: Kluwer academic publishers, 2001. V. 5. P. 437–444.

7. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. No.12. С. 1766–1786.