udk *519.854*

ОТЫСКАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

©2000 г. А.И.Голиков, Ю.Г.Евтушенко

(117967 Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

Для общей задачи линейного программирования (ЛП), заданной в каноническом виде, рассматриваются четыре варианта необходимых и достаточных условий оптимальности, которые отличаются количеством переменных и ограничений типа равенств и неравенств. С помощью одного из этих условий находятся нормальное решение прямой задачи ЛП и нормальный вектор оптимальных невязок двойственной задачи ЛП в результате однократной безусловной максимизации вогнутой гладкой кусочно-квадратичной функции. Число переменных в этой задаче на единицу больше числа переменных прямой задачи ЛП. Показана связь задачи безусловной максимизации с методами регуляризации и квадратичного штрафа для задачи ЛП. Приводятся оценки для параметра регуляризации и коэффициента штрафа, начиная с которых решения, полученные с помощью этих методов, позволяют найти нормальное решение задачи ЛП.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теории и методам решения задач линейного программирования (ЛП) посвящено огромное количество исследований. Укажем лишь две последние опубликованные отечественные монографии [1],[2]. Первоначально исследования концентрировались в основном на симплекс-методе. Далее разрабатывались разнообразные итерационные методы, а после опубликования статей [3]-[7] внимание многих исследователей переключилось на методы внутренних точек. При этом возникли новые формулировки задач ЛП и появились новые формы задания необходимых и достаточных условий оптимальности (см. например, [8]-[10]). Укажем на специальный выпуск журнала Optimization Methods & Software [11], целиком посвященный методу внутренней точки, а также обзор [12]. В работах советских математиков в 70-х годах активно разрабатывался подход к задачам ЛП, основанный на использовании метода внешних штрафных функций [13]-[20]. Примерно в это же время в США близкие исследования проводились О.Мангасарьяном и его сотрудниками. В их работах [21]-[23] основное внимание уделялось нахождению нормальных решений в задачах ЛП, т.е. решений, обладающих минимальной евклидовой нормой.

Нахождение нормального решения тесно связано с методом регуляризации (см., например, [1],[2],[24],[25]) и методом квадратичной штрафной функции [26]. Повидимому, первой работой, в которой рассматривался вопрос о совпадении решения возмущенной задачи ЛП с решением исходной задачи была статья Х.Удзавы, опубликованная в 1958 г. (русский перевод в [27]). Исходная задача ЛП имела вид

$$\max_{x\in X} c^\top x, \quad X = \{x \ : \ Ax \le b\}, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-01186) и по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96080).

а возмущенная задача была представлена в виде

$$\max_{x \in X} \, (c^\top x - \varepsilon \|x\|^2/2). \tag{2}$$

При условии ограниченности множества X и существовании строго внутренней точки в [27] была доказана теорема о существовании положительного числа ε_* такого, что решение $x(\varepsilon)$ задачи (2) при всяком $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ совпадает с решением исходной задачи ЛП (1). Также была приведена оценка числа ε_*, существенно использовавшая предположения теоремы. В [25] условия на X были заменены условием существования решения задачи ЛП (1). В [28] и [21], [22] независимо от статьи [27] при условии существования решения задачи (1) было установлено совпадение решений возмущенной задачи (2) и исходной (1), приведены новые оценки величины ε. В [25], [22] было показано, что двойственной к регуляризованной задаче (2) является вспомогательная задача

$$\min_{u \geq 0} \, [b^\top u + \|c - A^\top u\|^2/(2\varepsilon)], \tag{3}$$

возникающая при применении квадратичного штрафа к двойственной задаче ЛП

$$\min_{u \in U} b^\top u, \quad U = \{u \ : \ A^\top u = c, u \geq 0\}.$$

Указана связь между решениями задач (2) и (3): $x(\varepsilon) = (c - A^\top u(\varepsilon))/\varepsilon$.

Основной аппарат в теории линейного программирования составляют условия оптимальности Куна-Таккера, использующие переменные прямой и двойственной задач ЛП. В разд. 2 данной статьи приводятся нетрадиционные способы задания задач ЛП, получены соответствующие необходимые и достаточные условия оптимальности. В качестве основных переменных использованы переменные прямой задачи и вектор невязок ограничений двойственной задачи. В этих переменных ставятся задачи ЛП в канонической форме (см. ниже задачи (P_x) и (C_v)). Для этих и ряда других задач, вытекающих из такого подхода, исследованы связи между множествами решений, оптимальными значениями целевых функций.

В разд. 3 дана геометрическая интерпретация некоторых результатов разд. 2. Исследовано влияние вектора c, определяющего целевую функцию прямой задачи ЛП, на множество решений. Показано, что в задаче ЛП, заданной в канонической форме, множество решений зависит только от проекции вектора c на нуль-пространство матрицы A, задающей ограничения типа равенств.

В разд. 4 в качестве примера использования новых формулировок задач и условий оптимальности рассмотрены задачи нахождения нормальных решений ЛП. С помощью теории двойственности задачи квадратичного программирования для нахождения нормального решения сводятся к задачам безусловной максимизации гладких вогнутых функций в пространствах меньшей размерности, чем размерность вектора прямых переменных.

В разд. 5 рассмотрены задачи, в которых проведена нетрадиционная регуляризация, отличная от регуляризации по А.Н.Тихонову. Указывается значение параметра регуляризации, начиная с которого решение регуляризованной задачи совпадает с решением исходной задачи ЛП. Показано, что минимальное значение этого параметра может быть равно нулю или быть отрицательным. Двойственная задача к нетрадиционной регуляризованной задаче приводит к новому варианту метода квадратичных штрафных функций для решения задачи ЛП.

Методы решения задач ЛП из разд. 4 и 5 требуют знаний либо оптимального значения целевой функции, либо значения ε_*, начиная с которого методы регуляризации и квадратичного штрафа позволяют найти нормальное решение. Предлагаемый метод в разд. 6 свободен от этих требований. Нормальное решение прямой задачи ЛП и нормальный вектор оптимальных невязок двойственной задачи ЛП вычисляются по простым формулам в результате однократного решения задачи безусловной максимизации гладкой вогнутой кусочно-квадратичной функции. Число переменных в этой задаче на единицу больше числа переменных прямой задачи ЛП. В качестве примера приведена простейшая задача, иллюстрирующая найденные свойства.

2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Пусть прямая задача ЛП задана в каноническом виде

$$f_* = \min_{x \in X} c^\top x, \;\; X = \{x \in R^n \; : \; Ax = b, \; x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

Здесь и ниже A — матрица $m \times n$ ранга m, $m < n$, векторы c, $x \in R^n$, $b \in R^m$, через 0_i обозначен нулевой i-мерный вектор.

Двойственная к (P) задача имеет вид

$$\max_{u \in U} b^\top u, \;\; U = \{u \in R^m \; : \; c - A^\top u \geq 0_n\}. \tag{D}$$

Предполагаем, что введенные задачи имеют решение. Множества решений задач (P) и (D) соответственно обозначим через X_* и U_*. Необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна-Таккера) для задач (P) и (D) имеют вид

$$Ax - b = 0_m, \quad c - A^\top u \geq 0_n, \quad D(x)(c - A^\top u) = 0_n, \quad x \geq 0_n. \tag{4}$$

Здесь и ниже через $D(z)$ обозначена диагональная матрица, у которой i-й диагональный элемент является i-й компонентой z^i вектора z.

Обозначим через $\ker H$ нуль-пространство (ядро) произвольной матрицы H размерности $m \times n$:

$$\ker H = \{x \in R^n \; : \; Hx = 0_m\}.$$

Через $\operatorname{im} H^\top$ обозначим пространство строк матрицы H (образ матрицы $H^\top$):

$$\operatorname{im} H^\top = \{\xi \in R^n \; : \; \xi = H^\top u, \; u \in R^m\}.$$

Для произвольной прямоугольной $m \times n$ матрицы H определим псевдообратную $n \times m$ матрицу H^+, $m \times m$ матрицу проектирования $H^\|$ на пространство столбцов матрицы H и матрицу проектирования $H^\perp$ на нуль-пространство матрицы $H^\top$. Если ранг H равен n, то $n \leq m$, столбцы матрицы H линейно независимы и

$$H^+ = (H^\top H)^{-1} H^\top, \quad H^\| = HH^+, \quad H^\perp = I_m - H^\|. \tag{5}$$

Здесь и ниже I_s обозначает единичную s-мерную матрицу. Если ранг H равен m, то $n \geq m$, строки H линейно независимы и

$$H^+ = H^\top (HH^\top)^{-1}, \quad (H^\top)^\| = H^+ H, \quad (H^\top)^\perp = I_n - (H^\top)^\|, \tag{6}$$

где $(H^\top)^\|$ есть $n \times n$ матрица проектирования на пространство столбцов матрицы $H^\top$, $(H^\top)^\perp$ — матрица проектирования на нуль-пространство матрицы H.

Размерность линейного пространства $\ker A$ равна ν — дефекту матрицы A, в случае задачи (P) имеем $\nu = n - m$. Нуль-пространство и пространство строк матрицы A являются ортогональными дополнениями друг к другу, пространство R^n разлагается в прямую сумму этих подпространств, т.е. $R^n = \operatorname{im} A^\top \oplus \ker A$

Помимо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности (4) для задач линейного программирования будем использовать иные. Для этого, следуя [9], введем матрицу K размера $\nu \times n$. Считаем, что строки матрицы K линейно независимы, принадлежат нуль-пространству матрицы A и поэтому натянутое на них пространство $\operatorname{im} K^\top$ совпадает с нуль-пространством (ядром) матрицы A. В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы A. Таким образом, $\operatorname{im} K^\top$ является ортогональным дополнением к пространству $\operatorname{im} A^\top$. Поэтому

$$\operatorname{im} K^\top = \ker A, \quad AK^\top = 0_{m\nu}, \quad R^n = \operatorname{im} A^\top \oplus \operatorname{im} K^\top. \tag{7}$$

Здесь через O_{ij} обозначена $i \times j$ матрица с нулевыми элементами.

Если матрицу A представить в блочном виде $A = [B \mid N]$, где B невырождена, то матрицу K можно записать в следующем виде $K = [-N^\top (B^{-1})^\top \mid I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса-Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m \mid N]$, тогда матрица K представима в виде $K = [-N^\top \mid I_\nu]$. В ряде случаев построение матрицы K упрощается. Например, пусть задача ЛП имеет ограничения типа неравенств $Nz \geq b$, где N — матрица $m \times \nu$, $z \in R^\nu_+$. Вводя дополнительные переменные $\xi \in R^m_+$, вектор $x \in R^n$ представим как объединение векторов z, ξ, т.е. $x^\top = [z^\top, \xi^\top]$. Тогда допустимое множество запишется в том же виде, что и в задаче (P), где матрица $A = [N \mid -I_m]$. Тогда $K = [I_\nu \mid N^\top]$.

Определим вектор $d \in R^\nu$ и вектор дополнительных переменных $v \in R^n$ соотношениями $d = Kc$ и

$$v = c - A^\top u. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение два аффинных множества

$$\bar{X} = \{x \in R^n \ : \ Ax = b\}, \quad \bar{V} = \{v \in R^n \ : \ Kv = d\}.$$

Всюду ниже через $\bar{x}$ и $\bar{v}$ обозначим произвольные фиксированные n-мерные векторы, удовлетворяющие соответственно условиям $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{v} \in \bar{V}$. Заметим, что некоторые компоненты векторов $\bar{x}$, $\bar{v}$ могут быть отрицательными. В простейшем варианте можно взять $\bar{v} = c$. В силу того, что матрица A имеет ранг m и $n > m$, всегда $\bar{X} \neq \emptyset$ и $\bar{V} \neq \emptyset$.

В (8) при $n > m$ вектор u можно рассматривать как неявную функцию вектора большей размерности v. Система (8) переопределена и не при всяких векторах v и c разрешима относительно вектора u, однако всегда единственным образом определено псевдорешение

$$u(v) = (AA^\top)^{-1} A(c - v) = (A^\top)^+ (c - v). \tag{9}$$

Это псевдорешение является единственным решением системы (8) тогда и только тогда, когда вектор $c - v \in \operatorname{im} A^\top$, и, следовательно, согласно (7), матрица K ортогональна вектору $c - v$, т.е. в этом случае $Kv = Kc$. Учитывая, что $c \in \bar{V}$, можно утверждать, что система (8) однозначно разрешима относительно u тогда и только тогда, когда когда $v \in \bar{V}$.

В целевую функцию задачи (P) подставим $c = \bar{v} + A^\top u(\bar{v})$, тогда для любых $x \in \bar{X}$ имеем

$$c^\top x = \bar{v}^\top x + b^\top u(\bar{v}). \tag{10}$$

Исходную задачу (P) заменим следующей модифицированной задачей, зависящей от параметра $\bar{v}$

$$f_*^1(\bar{v}) = \min_{x \in X} \ \bar{v}^\top x, \ X = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0_n\}. \tag{P_x}$$

Множества решений задач (P) и (P_x) совпадают и не зависят от конкретного выбора вектора $\bar{v}$ из множества $\bar{V}$. Оптимальные значения целевых функций отличаются на константу, зависящую от выбора $\bar{v} \in \bar{V}$ и равную нулю, если $\bar{v} = c$ т.е. $f_* = f_*^1(c)$. Далее вместо задачи (P) будем в основном иметь дело с задачей (P_x).

Задачу (P_x), заданную в каноническом виде, представим в стандартном виде задачи ЛП, в которой присутствуют только ограничения типа неравенств. Запишем общее решение неоднородной системы линейных уравнений $Ax = b$ в виде

$$x = \bar{x} - K^\top y, \tag{11}$$

где $\bar{x}$ — частное решение системы, а $K^\top y$ — общее решение однородной системы $Ax = 0_m$ и $y \in R^\nu$. Определим множество

$$Y = \{y \in R^\nu \ : \ \bar{x} - K^\top y \geq 0_n\}. \tag{12}$$

Формулу (11) можно рассматривать как аффинное отображение из R^ν в R^n. При этом образом множества Y является множество X. Между X и Y существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, для любого $y \in Y$ по формуле (11) однозначно определяется $x \in X$. Для переопределенной системы (11) полного ранга, содержащей n линейных уравнений и ν неизвестных y, всегда определено псевдорешение

$$y(x) = (KK^\top)^{-1}K(\bar{x} - x) = (K^\top)^+(\bar{x} - x), \tag{13}$$

которое является единственным решением системы (11) тогда и только тогда, когда $\bar{x} - x \in \operatorname{im} K^\top$. Это включение имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \bar{X}$. Итак, для любого $x \in \bar{X}$ формула (13) определяет аффиное преобразование, обратное к (11). Поэтому можно записать

$$Y = (K^\top)^+(\bar{x} - X). \tag{14}$$

Выразим целевую функцию задачи (P_x) через переменные y. Выражение (11) подставим в целевую функцию задачи (P_x) и, используя равенство $\bar{v}^\top K^\top = c^\top K^\top = d^\top$, получаем

$$\bar{v}^\top x = \bar{v}^\top \bar{x} - \bar{v}^\top K^\top y = \bar{v}^\top \bar{x} - d^\top y, \tag{15}$$

где x — любое из $\bar{X}$.

Учитывая (15) и то, что (12) полностью определяет все те y, для которых x, вычисленный по формуле (11), принадлежит X, задачу (P_x) можно записать в виде стандартной задачи ЛП с ограничениями только типа неравенств

$$\max_{y \in Y} d^\top y, \; Y = \{y \in R^\nu \;:\; \bar{x} - K^\top y \geq 0_n\}. \qquad (P_y)$$

Между допустимыми множествами X и Y, множествами решений X_* и Y_* задач (P_x) и (P_y) существует взаимно однозначное соответствие, определяемое (11), (13). В частности для множеств решений X_*, Y_* это можно представить в виде

$$X_* = \bar{x} - K^\top Y_*, \quad Y_* = (K^\top)^+(\bar{x} - X_*). \qquad (16)$$

По существу (P_x) и (P_y) — это одна и та же задача. Внешнее отличие в записи связано с заменой переменных (11), позволившей иным способом записать целевую функцию и по формуле (14) преобразовать допустимое множество X в множество Y, являющееся пересечением n полупространств. Из условий, определяющих X, таким образом исключены m ограничений типа неравенств. Можно говорить, что (P), (P_x), (P_y) — эквивалентные задачи, в том смысле, что множества решений задач (P) и (P_x) совпадают, и между X_*, Y_* существует взаимно однозначное соответствие.

Для задачи (P_x) запишем двойственную задачу

$$\max_{w \in W} b^\top w, \; W = \{w \in R^m \;:\; \bar{v} - A^\top w \geq 0_n\}. \qquad (C_w)$$

Делая в (C_w) замену $w = u - u(\bar{v})$, где $u(\bar{v})$ определяется из (9), получим с учетом (10), что

$$\max_{w \in W} b^\top w = \max_{u \in U} b^\top u - b^\top u(\bar{v}). \qquad (17)$$

При всяком $\bar{v} \in \bar{V}$ между допустимыми множествами U и W задач (D) и (C_w) существует взаимно однозначное соответствие, определяемое как $U = u(\bar{v}) + W$, где $u(\bar{v})$ находится из (9). Множество решений задачи (C_w) обозначим через W_*. Аналогичная связь $U_* = u(\bar{v}) + W_*$ имеет место между множествами решений.

Заметим по аналогии с (11), что формула

$$v = \bar{v} - A^\top w \qquad (18)$$

определяет общее решение неоднородной системы линейных уравнений $Kv = d$, где $\bar{v}$ — частное решение системы, а $A^\top w$ — общее решение однородной системы $Kv = 0_\nu$. Между допустимым множеством W задачи (C_w) и множеством

$$V = \{v \in R^n \;:\; Kv = d, \; v \geq 0_n\}$$

существует взаимно однозначное соответствие, определяемое (18) и

$$w(v) = (AA^\top)^{-1}A(\bar{v} - v) = (A^\top)^+(\bar{v} - v). \qquad (19)$$

Связь между множествами решений V_* и W_* можно представить в виде

$$V_* = \bar{v} - A^\top W_*, \quad W_* = (A^\top)^+(\bar{v} - V_*). \qquad (20)$$

Целевую функцию задачи (C_w) выразим через переменные v. Для этого в целевую функцию задачи (C_w) подставим $b = A\bar{x}$ и с учетом (18) получим

$$b^\top w = \bar{x}^\top A^\top w = \bar{x}^\top \bar{v} - \bar{x}^\top v. \tag{21}$$

Таким образом, задача (C_w) приведена к каноническому виду

$$f_*^2(\bar{v}) = \min_{v \in V} \bar{x}^\top v, \; V = \{v \in R^n \; : \; Kv = d, \; v \geq 0_n\}. \tag{C_v}$$

Множество решений любой задачи из семейства (C_v) имеет одно и тоже множество решений V_*, которое не зависит от конкретного выбора вектора $\bar{x} \in \bar{X}$.

Формулы (18), (19) определяют взаимно однозначное соответствие между множествами решений V_* и W_* задач (C_v) и (C_w). Если в задаче (C_w) взять в качестве $\bar{v}$ вектор c, то (C_w) переходит в двойственную задачу (D). Поэтому задачи (C_v), (C_w), (D) можно назвать эквивалентными.

Существует симметрия между парой задач (P_x), (C_w) и парой (P_y), (C_v). В обеих парах задачи сформулированы одинаковым образом и отличие состоит лишь в конкретном наполнении матриц, векторов, чисел. Выразим эту симметрию с помощью символа $\Leftrightarrow$. Можно записать

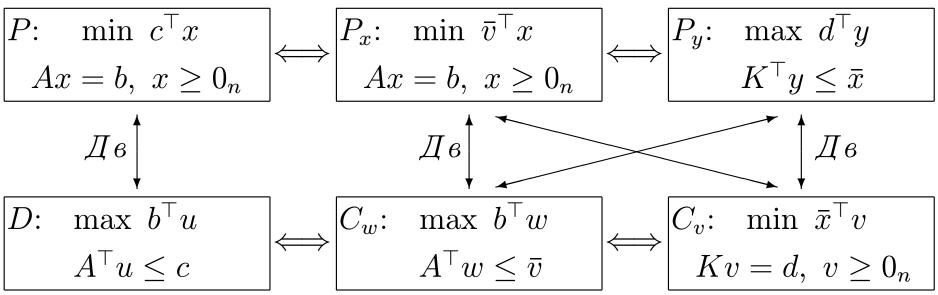
$$A \Leftrightarrow K, \; x \Leftrightarrow v, \; b \Leftrightarrow d, \; m \Leftrightarrow \nu, \; \bar{v} \Leftrightarrow \bar{x}, \; w \Leftrightarrow y,$$

$$X \Leftrightarrow V, \; W \Leftrightarrow Y, \; X_* \Leftrightarrow V_*, \; W_* \Leftrightarrow Y_*.$$

Здесь слева стоят символы, относящиеся к задачам (P_x) и (C_w), справа находятся их аналоги для соответственно задач (C_v) и (P_y).

Задачу (C_v) будем называть *сопряженной* к (P_x), а задачу (C_w) — *сопряженной* к (P_y). Естественно и обратное, поэтому пары (P_x) и (C_v), (P_y) и (C_w) можно назвать *взаимно сопряженными.*

Приведенные соотношения между задачами отражены на схеме (см. фигуру)



Запись $Q \Longleftrightarrow G$ обозначает, что задачи (Q) и (G) эквивалентны, вертикальные стрелки между задачами (Q) и (G) обозначают взаимную двойственность задач, а диагональные — взаимную сопряженность задач.

В задачах (P_x), (P_y), (C_v) и (C_w) входят в качестве произвольных параметров векторы $\bar{x}$ и $\bar{v}$ из множеств $\bar{X}$, $\bar{V}$, соответственно. Класс этих четырех задач весьма широк. Он содержит, в частности, исходные задачи (P) и (D). Действительно, взяв в качестве $\bar{v}$ вектор c, из семейства задач (P_x) выделяем задачу (P) и из семейства задач (C_w) — задачу (D).

Теорема 1 *Значения целевых функций в задачах (P_x), (P_y), (C_v), (C_w), вычисленные на соответствующих допустимых множествах X, Y, V, W, удовлетворяют неравенствам*

$$\bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v \geq \bar{x}^\top \bar{v} \geq d^\top y + b^\top w. \tag{22}$$

Доказательство. Применяя слабую теорему двойственности к задачам (P_x) и (C_w), получим, что при любых $x \in X$ и $w \in W$ выполнено неравенство $\bar{v}^\top x \geq b^\top w$. Отсюда, учитывая (21), получим $\bar{v}^\top x \geq b^\top w = \bar{x}^\top \bar{v} - \bar{x}^\top v$, что обеспечивает левое неравенство в (22).

Применяя слабую теорему двойственности к задачам (C_v) и (P_y), получим, что для всех $v \in V$ и $y \in Y$ справедливо неравенство $d^\top y \leq \bar{x}^\top v$. С учетом (21) для допустимых v и w имеем $d^\top y \leq \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v} - b^\top w$, откуда следует правое неравенство в (22). Теорема доказана.

Через $\operatorname{opt} Q$ будем обозначать оптимальное значение целевой функции задачи (Q). При этом оптимальные значения всех целевых функций кроме задач (P) и (D) зависят либо от $\bar{v}$, либо от $\bar{x}$, как от параметра. Поэтому будем писать $\operatorname{opt} P_x(\bar{v})$, $\operatorname{opt} C_v(\bar{x})$, $\operatorname{opt} C_w(\bar{v})$, $\operatorname{opt} P_y(\bar{x})$.

Теорема 2 *Если существует решение хотя бы одной из шести рассмотренных задач ЛП, то существуют решения всех остальных пяти задач ЛП. Оптимальные значения целевых функций рассмотренных задач связаны между собой следующими сотношениями*

$$\operatorname{opt} P = \operatorname{opt} P_x(\bar{v}) + b^\top u(\bar{v}), \quad \operatorname{opt} D = \operatorname{opt} C_w(\bar{v}) + b^\top u(\bar{v}), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{opt} P_x(\bar{v}) + \operatorname{opt} C_v(\bar{x}) = \operatorname{opt} P_y(\bar{x}) + \operatorname{opt} C_w(\bar{v}) = \operatorname{opt} P_x(\bar{v}) + \operatorname{opt} P_y(\bar{x}) = \\ \operatorname{opt} C_v(\bar{x}) + \operatorname{opt} C_w(\bar{v}) = \bar{x}^\top \bar{v}. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Утверждение о существовании решений следует из эквивалентности задач внутри троек (P), (P_x), (P_y) и (D), (C_w), (C_v) и обычной теории двойственности, примененной к любой паре взаимно двойственных задач: (P), (D); (P_x), (C_w); (C_v), (P_y). Из (10) и (17) следуют формулы (23).

В соответствии с теоремой двойственности ЛП имеет место равенство целевых функций, вычисленных в решениях взаимно двойственных задач, что записывается в виде

$$\operatorname{opt} P = \operatorname{opt} D = f_*, \quad \operatorname{opt} P_x(\bar{v}) = \operatorname{opt} C_w(\bar{v}), \quad \operatorname{opt} P_y(\bar{x}) = \operatorname{opt} C_v(\bar{x}). \tag{25}$$

Поэтому из (15), (21) и (25) следует (24). Теорема доказана.

Будем говорить, что x и v удовлетворяют *условию дополняющей нежесткости (УДН)*, если $x^i v^i = 0$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Теорема 3 *Пусть векторы x, v являются допустимыми для задач (P_x), (C_v). Векторы x, v удовлетворяют УДН тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$\bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v}. \tag{26}$$

Доказательство. Из условий $x \in X \subset \bar{X}$, $v \in V \subset \bar{V}$ вытекает, что $\bar{x} - x \in \ker A = \operatorname{im} K^\top$, $\bar{v} - v \in \ker K = \operatorname{im} A^\top$. Из ортогональности векторов $\bar{x} - x$ и $\bar{v} - v$ получаем

$$(\bar{x} - x)^\top (\bar{v} - v) = \bar{x}^\top \bar{v} - \bar{v}^\top x - \bar{x}^\top v + x^\top v = 0. \tag{27}$$

При $x \geq 0_n$, $v \geq 0_n$ равенство $x^\top v = 0$ эквивалентно УДН. Поэтому из (27) следует, что для допустимых x и v имеет место УДН тогда и только тогда, когда выполнено (26). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любых x, $\bar{x}$, принадлежащих $\bar{X}$, и любых v, $\bar{v}$ из $\bar{V}$ справедлива формула* (27).

Следствие 2. *Для любых $x_* \in X_*$, $v_* \in V_*$ — решений задач* (P_x), (C_v) *справедливо* $x_*^\top v_* = 0$.

Утверждение этого следствия получается из (26), если взять x и $\bar{x}$ равными x_*, а v и $\bar{v}$ равными v_*.

Следствие 3. *Необходимые и достаточные условия оптимальности задачи* (P) *могут быть представлены в любом из следующих четырех вариантов:*

$$1) \quad Ax = b,\ x \geq 0_n,\ Kv = d,\ v \geq 0_n,\ \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v}, \tag{28}$$

$$2) \quad \bar{x} - K^\top y \geq 0_n,\ \bar{v} - A^\top w \geq 0_n,\ d^\top y + b^\top w = \bar{x}^\top \bar{v}, \tag{29}$$

$$3) \quad Ax = b,\ x \geq 0_n,\ \bar{v} - A^\top w \geq 0_n,\ \bar{v}^\top x - b^\top w = 0, \tag{30}$$

$$4) \quad \bar{x} - K^\top y \geq 0_n,\ Kv = d,\ v \geq 0_n,\ \bar{x}^\top v - d^\top y = 0. \tag{31}$$

Утверждения следствия 3 разъясним на примере условий (28). Если x и v удовлетворяют условию (28), то $x \in X_*$, $v \in V_*$ (достаточные условия экстремума). Если $x \in X_*$ и $v \in V_*$, то x и v удовлетворяют (28) (необходимые условия экстремума). Последнее утверждение можно усилить. Следуя стандартным рассуждениям, применяемым в теории ЛП [29], можно показать, что если $x \in X_*$, то существует такой вектор v, что имеет место (28). Аналогично, если $v \in V_*$, то существует такой x, что выполнены условия (28).

Отметим, что каждое из условий оптимальности (28)-(31) отличается количеством переменных и ограничений типа равенств и/или неравенств. Из этих условий наименьшее количество неизвестных (n) и наибольшее количество ограничений ($2n+1$) имеют условия оптимальности (29). С другой стороны, условие оптимальности (28) имеет наибольшее количество неизвестных, равное $2n$, и наименьшее количество ограничений-равенств, равное $n+1$.

Условия (30) и (31) являются обычными условиями Куна-Таккера для пар взаимно двойственных задач (P_x), (C_w) и (C_v), (P_y). В них УДН заменены эквивалентными условиями равенств целевых функций соответствующих задач. Условия (28), (29) являются условиями оптимальности для взаимно сопряженных задач (P_x), (C_v) и (P_y), (C_w).

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Будем использовать верхние индексы $\|$ и $\perp$ при n-мерных векторах для обозначения ортогональных проекций этих векторов на подпространство строк матрицы A и ядро матрицы A, соответственно. Например, $x^\| = (A^\top)^\| x$, $x^\perp = (A^\top)^\perp x$, где $(A^\top)^\|$, $(A^\top)^\perp$ определены в соответствие с формулами (6):

$$(A^\top)^\| = A^+ A = A^\top (AA^\top)^{-1} A, \quad (A^\top)^\perp = I_n - (A^\top)^\|. \tag{32}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что для любых векторов $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{v} \in \bar{V}$ справедливы соотношения

$$A\bar{x}^{\perp} = 0_m, \quad K\bar{v}^{\|} = 0_{\nu}, \quad A\bar{x}^{\|} = A\bar{x} = b, \quad K\bar{v}^{\perp} = K\bar{v} = d.$$

Через $\tilde{x}$, $\tilde{v}$ обозначим нормальные решенеия (решения с минимальной евклидовой нормой) систем $Ax = b$, $Kv = d$. Эти решения можно представить в различных формах записи:

$$\tilde{x} = A^{+}b = A^{\top}(AA^{\top})^{-1}b = (A^{\top})^{\|}\bar{x} = \bar{x}^{\|}, \tag{33}$$

$$\tilde{v} = K^{+}d = K^{\top}(KK^{\top})^{-1}d = (K^{\top})^{\|}\bar{v} = (A^{\top})^{\perp}\bar{v} = \bar{v}^{\perp}. \tag{34}$$

Если в равенстве (26) в качестве $\bar{x}$, x и $\bar{v}$, v взять соответствующие нормальные решения $\tilde{x}$, $\tilde{v}$, то $\tilde{x}^{\top}\tilde{v} = 0$, так как $\tilde{x} \in \operatorname{im} A^{\top}$, $\tilde{v} \in \operatorname{im} K^{\top}$. Т.е., если $\tilde{x} \geq 0_n$ и $\tilde{v} \geq 0_n$, то выполнены условия дополняющей нежесткости и справедлива

Теорема 4 *Если все компоненты нормальных решений систем $Ax = b$ и $Kv = d$ одновременно неотрицательны, то эти решения являются решениями задач (P_x) и (C_v), соответственно.*

Заметим, что ни в одно из условий экстремума (28)-(31) не входит вектор c. От выбора c зависит только вектор d, причем зависит лишь от $c^{\perp}$ — проекции c на нуль-пространство матрицы A. Действительно из (8) с учетом (7) следует

$$K(c^{\perp} + c^{\|}) = Kc^{\perp} + K(A^{\top})^{\|}c = Kc^{\perp} = d.$$

Вместе с тем оптимальное значение целевой функции $c^{\top}x_*$ зависит от выбора $c^{\|}$, так как для $x_* \in X_*$ имеем $c^{\top}x_* = (c^{\perp} + c^{\|})^{\top}x_*$. Согласно (23) оптимальные значения целевых функций отличаются на величину $b^{\top}u(\bar{v})$. Используя (9) и (33), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{opt} P - \operatorname{opt} P_x(\bar{v}) = f_* - f_*^1(\bar{v}) = b^{\top}u(\bar{v}) = b^{\top}(AA^{\top})^{-1}A(c - \bar{v}) = \tilde{x}^{\top}(c - \bar{v}) = \\ = (\bar{x}^{\|})^{\top}(c - \bar{v}) = (\bar{x}^{\|})^{\top}(c - \bar{v})^{\|}. \end{aligned} \tag{35}$$

Пусть $h, g \in R^n$. С помощью этих векторов в задачах (P_x) и (C_v) изменим векторы $\bar{v}$ и $\bar{x}$. Получим следующие две возмущенные задачи

$$\min_{x \in X} \, (\bar{v} + h)^{\top}x, \tag{P'_x}$$

$$\min_{v \in V} \, (\bar{x} + g)^{\top}v, \tag{C'_v}$$

Теорема 5 *Пусть векторы $h \in \operatorname{im} A^{\top}$, $g \in \ker A$. Тогда множество решений X_* задачи (P_x), совпадает с множеством решений задачи (P'_x), множество решений V_* задачи (C_v) совпадает с множеством решений задачи (C'_v).*

Доказательство. Учитывая, что $h \in \operatorname{im} A^{\top} = \ker K$, получаем $K(\bar{v} + h) = d$, т.е. вектор $\bar{v}+h \in \bar{V}$. Поэтому задача (P'_x) является одной из задач семейства (P_x), в котором по построению все задачи имеют одинаковое множество решений, а оптимальные значения целевых функций любых двух задач из этого семейства отличаются лишь на константу. Так как $g \in \ker A = \operatorname{im} K^{\top}$, то из симметрии задач (C_v) и (P_x) следует и второе утверждение теоремы.

Если в задачах (P), (P_x), (C_v) векторы $c, \bar{v}, \bar{x}$ заменить соответственно на векторы $c - c^{\|}$, $\bar{v} - \bar{v}^{\|}$, $\bar{x} - \bar{x}^{\perp}$ и учесть, что $c^{\|}, \bar{v}^{\|} \in \operatorname{im} A^{\top}$, $\bar{x}^{\perp} \in \ker A$, то из результатов теоремы 5 следует

Теорема 6 *Множества решений задач (P), (P_x), (C_v) не зависят от проекций $c^{\|}$, $\bar{v}^{\|}$, $\bar{x}^{\perp}$.*

Таким образом, вместо векторов c, $\bar{v}$, входящих в целевую функцию задач (P), (P_x) можно взять любые векторы, проекция которых на ядро матрицы A равна $c^{\perp}$, $\bar{v}^{\perp}$. При этом множества решений задач (P), (P_x) совпадают. Аналогично в задаче (C_v) можно взять любой вектор, проекция которого на $\operatorname{im} A^{\top}$ равна $\bar{x}^{\|}$, при этом множество V_* не изменится.

Проекции $x_*^{\|}$ и $v_*^{\perp}$ оптимальных векторов x_* и v_* в задачах (P), (P_x), (C_v) определяются непосредственно по формулам (33)-(34), так как с учетом того, что $x_* \in \bar{X}$, $v_* \in \bar{V}$, имеем

$$x_*^{\|} = \tilde{x} = \tilde{x}^{\|} = \bar{x}^{\|}, \quad v_*^{\perp} = \tilde{v} = \tilde{v}^{\perp} = \bar{v}^{\perp} = c^{\perp}. \tag{36}$$

Поэтому решение задач (P), (P_x), (C_v) сводится к нахождению двух ортогональных векторов $x_*^{\perp} \in \ker A$ и $v_*^{\|} \in \operatorname{im} A^{\top}$, таких, что $x_* = \bar{x} + x_*^{\perp} \geq 0_n$, $v_* = \bar{v} + v_*^{\|} \geq 0_n$ и $x_*^{\top} v_* = 0$. Искомые векторы представимы в виде $x_*^{\perp} = -K^{\top} y$, $v_*^{\|} = -A^{\top} w$, где $y \in R^{\nu}$, $w \in R^m$, таким образом, речь идет об отыскании векторов y и w, удовлетворяющих (29).

В задачах (D) и (C_w) оптимальные значения целевых функций выражаются через проекции векторов на пространство строк матрицы A

$$\operatorname{opt} D = b^{\top} u_* = b^{\top}(AA^{\top})^{-1} A(c - v_*) = (\bar{x}^{\|})^{\top}(c - v_*)^{\|},$$
$$\operatorname{opt} C_w(\bar{v}) = b^{\top} w_* = b^{\top}(AA^{\top})^{-1} A(\bar{v} - v_*) = (\bar{x}^{\|})^{\top}(\bar{v} - v_*)^{\|}.$$

В задаче (C_v) оптимальное значение целевой функции выражается через проекции векторов на нуль-пространство матрицы A

$$\operatorname{opt} C_v(\bar{x}) = d^{\top} y_* = d^{\top}(K^{\top})^{+}(\bar{x} - x_*) = (\bar{v}^{\perp})^{\top}(\bar{x} - x_*)^{\perp}.$$

Рассмотрим два случая задач ЛП, когда нахождение их решений существенно упрощается.

Случай 1. Пусть $c^{\perp} = 0_n$, т.е. вектор c принадлежит пространству строк матрицы A. Тогда согласно (36) имеем $v_*^{\perp} = \tilde{v} = \tilde{v}^{\perp} = \bar{v}^{\perp} = 0_n$, $\bar{v} \in \operatorname{im} A^{\top}$ и $d = 0_{\nu}$. Справедливы представления

$$\operatorname{opt} P = c^{\top} x_* = (c^{\|})^{\top} x_*^{\|} = (c^{\|})^{\top} \bar{x}^{\|} = c^{\top} \bar{x}^{\|} = c^{\top} \bar{x},$$
$$\operatorname{opt} P_x(\bar{v}) = \bar{v}^{\top} x_* = (\bar{v}^{\|})^{\top} x_*^{\|} = (\bar{v}^{\|})^{\top} \bar{x}^{\|} = \bar{v}^{\top} \bar{x}^{\|} = \bar{v}^{\top} \bar{x}.$$

То есть целевые функции задач (P) и (P_x) принимают одни и те же значения при любых $x \in \bar{X}$. Учитывая условия неотрицательности оптимального вектора, получаем, что $X_* = \bar{X} \cap R_+^n$, т.е. каждый вектор $x \in \bar{X}$, имеющий неотрицательные компоненты, принадлежит X_*. Из $d = 0_{\nu}$ следует, что в задаче (P_y) допустимое множество Y совпадает с множеством решений Y_*, а задача (C_w) в соответствии с условиями оптимальности (29) сводится к решению системы $A^{\top} w \leq \bar{v}$, $b^{\top} w = \bar{x}^{\top} \bar{v}$. После нахождения W_* множество V_* определяется из первой формулы в (20).

Случай 2. Пусть $\bar{x}^{\|} = 0_n$, т.е. вектор $\bar{x}$ принадлежит нуль-пространству матрицы A. Тогда $b = 0_m$, $x_*^{\|} = \tilde{x} = \bar{x} = \bar{x}^{\|} = 0_n$, $\operatorname{opt} C_v(\bar{x}) = \bar{x}^{\top} v_* = (\bar{x}^{\perp})^{\top} v_*^{\perp} = (\bar{x}^{\perp})^{\top} \bar{v}^{\perp} =$

$\bar{x}^\top \bar{v}^\perp = \bar{x}^\top \bar{v}$, $V_* = \bar{V} \cap R^n_+$, $W_* = W$. Следовательно, нахождение точек $v_* \in V_*$ сводится к отысканию неотрицательных решений системы линейных уравнений $Kv = d$, что эквивалентно решению системы линейных неравенств $A^\top w \leq \bar{v}$.

4. НОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В общем случае условия оптимальности (28)-(31) можно расщепить, вводя дополнительно в рассмотрение оптимальные значения целевых функций. Допустим, что известно оптимальное значение целевой функции исходной задачи (P). Тогда из (23), (24) определяются оптимальные значения целевых функций $f^1_*(\bar{v}) = \operatorname{opt} P_x(\bar{v})$ и $f^2_*(\bar{x}) = \operatorname{opt} C_v(\bar{x})$. Условие (26) можно заменить следующими $\bar{v}^\top x = f^1_*(\bar{v})$, $\bar{x}^\top v = f^2_*(\bar{x})$. На допустимых множествах, очевидно, имеем $\bar{v}^\top x \geq f^1_*(\bar{v})$, $\bar{x}^\top v \geq f^2_*(\bar{x})$. При этом необходимые и достаточные условия оптимальности (28) распадаются на две независимые группы условий, записанные в разных пространствах:

$$\begin{aligned} Ax = b, \quad \bar{v}^\top x = f^1_*(\bar{v}), \quad x \geq 0_n, \\ Kv = d, \quad \bar{x}^\top v = f^2_*(\bar{x}), \quad v \geq 0_n. \end{aligned}$$

Условие (29) распадается на следующие:

$$\begin{aligned} \bar{x} - K^\top y \geq 0_n, \quad d^\top y = f^2_*(\bar{x}), \\ \bar{v} - A^\top w \geq 0_n, \quad b^\top w = f^1_*(\bar{v}), \end{aligned}$$

где $\operatorname{opt} P_y(\bar{x}) = f^2_*(\bar{x})$ и $\operatorname{opt} C_w(\bar{v}) = f^1_*(\bar{v})$. Аналогично распадаются условия (30), (31).

Множества решений задач (P_x) и (C_v) запишем в виде

$$\begin{aligned} X_* = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \ \bar{v}^\top x = f^1_*(\bar{v}), \ x \geq 0_n\}, \\ V_* = \{v \in R^n \ : \ Kv = d, \ \bar{x}^\top v = f^2_*(\bar{x}), \ v \geq 0_n\}. \end{aligned}$$

Заметим, что в этих определениях условия $\bar{v}^\top x = f^1_*(\bar{v})$, $\bar{x}^\top v = f^2_*(\bar{x})$ можно заменить одним условием (26).

Обозначим через $\tilde{x}$, $\tilde{x}'$, $\tilde{x}_*$, $\tilde{v}$, $\tilde{v}'$, $\tilde{v}_*$ — проекции начала координат на множества $\bar{X}$, X, X_*, $\bar{V}$, V, V_*, соответственно. Векторы $\tilde{x}$ и $\tilde{v}$ совпадают с нормальными решениями, задаваемыми формулами (33), (34). Проекции $\tilde{x}_*$, $\tilde{v}_*$ называются нормальными решениями задач (P_x) и (C_v), соответственно. Их свойствам, методам их нахождения будет уделено основное внимание ниже. Так как $X_* \subseteq X \subseteq \bar{X}$, $V_* \subseteq V \subseteq \bar{V}$, то имеем неравенства

$$\|\tilde{x}\| \leq \|\tilde{x}'\| \leq \|\tilde{x}_*\|, \quad \|\tilde{v}\| \leq \|\tilde{v}'\| \leq \|\tilde{v}_*\|.$$

Наиболее просто вычисляются векторы $\tilde{x}$, $\tilde{v}$. Наиболее сложно — векторы $\tilde{x}_*$, $\tilde{v}_*$. Трудоемкость вычисления $\tilde{x}'$, $\tilde{v}'$ занимает промежуточное место. Интересны случаи, когда легко вычисляемые векторы совпадают с более трудно вычислимыми. Например, если окажется, что $\tilde{x} \geq 0_n$, $\tilde{v} \geq 0_n$, то $\tilde{x} = x_*$, $\tilde{v} = v_*$ согласно теореме 4. Если $\tilde{x} \in X$, то $\tilde{x} = \tilde{x}'$. Если $\tilde{x} \in X_*$, то $\tilde{x} = \tilde{x}' = \tilde{x}_*$.

Все задачи отыскания проекций ставятся как задачи квадратичного программирования, в которых ищется минимум функций $\|x\|^2/2$ и $\|v\|^2/2$ на соответствующих множествах. Таким образом, приходим к следующим шести задачам отыскания решений с минимальной евклидовой нормой (нормальные решения):

$$\|\tilde{x}_*\|^2/2 = \min_{x \in X_*} \|x\|^2/2, \qquad (P_{x_*})$$

$$\|\tilde{v}_*\|^2/2 = \min_{v \in V_*} \|v\|^2/2, \tag{D_{v_*}}$$

$$\|\tilde{x}'\|^2/2 = \min_{x \in X} \|x\|^2/2, \tag{$P_{x'}$}$$

$$\|\tilde{v}'\|^2/2 = \min_{v \in V} \|v\|^2/2, \tag{$D_{\tilde{v}'}$}$$

$$\|\tilde{x}\|^2/2 = \min_{x \in \bar{X}} \|x\|^2/2, \tag{$P_{\tilde{x}}$}$$

$$\|\tilde{v}\|^2/2 = \min_{v \in \bar{V}} \|v\|^2/2. \tag{$D_{\tilde{v}}$}$$

Все эти задачи имеют единственные решения, причем, как будет видно из дальнейшего, двойственные к ним есть задачи безусловной минимизации дифференцируемых функций в пространствах меньших размерностей: $m+1$, $\nu+1$, m, ν.

Выведем двойственные задачи для (P_{x_*}) и (D_{v_*}). Запишем функции Лагранжа для задач (P_{x_*}) и (D_{v_*}).

$$L(x,p,\beta) = \|x\|^2/2 + p^\top(b - Ax) + \beta(\bar{v}^\top x - f_*^1(\bar{v})), \tag{37}$$
$$L(v,q,\gamma) = \|v\|^2/2 + q^\top(d - Kv) + \gamma(\bar{x}^\top v - f_*^2(\bar{x})). \tag{38}$$

Здесь $p \in R^m$, $q \in R^\nu$, $\beta \in R^1$, $\gamma \in R^1$ — множители Лагранжа.

Будем искать седловые точки функций Лагранжа $L(x,p,\beta)$ и $L(v,q,\gamma)$, решая, соответственно, следующие задачи

$$\max_{p \in R^n} \max_{\beta \in R^1} \min_{x \in R^n_+} L(x,p,\beta), \tag{39}$$

$$\max_{q \in R^n} \max_{\gamma \in R^1} \min_{v \in R^n_+} L(v,q,\gamma). \tag{40}$$

Внутренние задачи минимизации решаются аналитически, внешние задачи сводятся к решению задач безусловной максимизации вогнутой дифференцированной кусочно-квадратичной функции. Необходимые и достаточные условия минимума функций Лагранжа по $x \in R^n_+$ и $v \in R^n_+$ имеют вид

$$L_x(x,p,\beta) = x - A^\top p + \beta\bar{v} \ge 0_n,\ x \ge 0_n,\ D(x)L_x(x,p,\beta) = 0_n, \tag{41}$$
$$L_v(v,q,\gamma) = v - K^\top q + \gamma\bar{x} \ge 0_n,\ v \ge 0_n,\ D(v)L_v(v,q,\gamma) = 0_n. \tag{42}$$

Разрешая соотношения (41) относительно x и (42) относительно v, получаем

$$x = (A^\top p - \beta\bar{v})_+, \tag{43}$$
$$v = (K^\top q - \gamma\bar{x})_+. \tag{44}$$

Здесь и ниже через $(a)_+$ обозначается вектор из R^n с компонентами $a^i_+ = \max[a^i, 0]$, $i = 1, ..., n$, где a^i есть i-я компонента вектора a.

Подставляя решения (43), (44), соответственно, в выражения для функций Лагранжа (37), (38), получаем двойственные функции

$$\tilde{L}(p,\beta) = b^\top p - \beta f_*^1(\bar{v}) - \|(A^\top p - \beta\bar{v})_+\|^2/2, \tag{45}$$
$$\tilde{L}(q,\gamma) = d^\top q - \gamma f_*^2(\bar{x}) - \|(K^\top q - \gamma\bar{x})_+\|^2/2. \tag{46}$$

Эти функции дифференцируемы, вогнуты. Задача, двойственная к (P_{x_*}), является задачей безусловной максимизации в $(m+1)$-мерном пространстве и состоит в отыскании

$$\max_{p\in R^m}\max_{\beta\in R^1}\ \tilde{L}(p,\beta). \qquad (D_p)$$

Необходимые и достаточные условия максимума задачи (D_p) имеют вид

$$\tilde{L}_p(p,\beta) = b - A(A^\top p - \beta\bar{v})_+ = 0_m,\quad \tilde{L}_\beta(p,\beta) = -f^1_*(\bar{v}) + \bar{v}^\top(A^\top p - \beta\bar{v})_+ = 0. \qquad (47)$$

Если тройка $[x,p,\beta]$ — решение задачи (39), то x — решение задачи (P_{x_*}), а пара $[p,\beta]$ — решение задачи (D_p). Для рассматриваемой задачи квадратичного программирования (P_{x_*}) справедливо и обратное утверждение: если пара $[p,\beta]$ — решение задачи (D_p), то, подставляя эту пару в формулу (43), получим решение x задачи (P_{x_*}) и тройку $[x,p,\beta]$, являющуюся решением задачи (39). Аналогично двойственной к (D_{v_*}) является задача безусловной максимизации в $(\nu+1)$-мерном пространстве

$$\max_{q\in R^\nu}\max_{\gamma\in R^1}\ \tilde{L}(q,\gamma). \qquad (D_q)$$

Необходимые и достаточные условия максимума задачи (D_q) имеют вид

$$\tilde{L}_q(q,\gamma) = q - K(K^\top q - \gamma\bar{x})_+ = 0_\nu,\quad \tilde{L}_\gamma(q,\gamma) = -f^2_*(\bar{x}) + \bar{x}^\top(K^\top q - \gamma\bar{x})_+ = 0. \qquad (48)$$

Отметим две особенности задач квадратичного программирования (P_{x_*}), (D_{v_*}) и двойственных к ним задач соответственно (D_p), (D_q):

1. переменные прямых задач не входят в постановку двойственных;
2. двойственные задачи являются задачами безусловной максимизации вогнутых кусочно-квадратичных функций в пространствах размерности $m+1$ и $\nu+1$.

Поэтому вместо решения задач на условный экстремум (P_{x_*}) или (D_{v_*}) целесообразно решать задачи на безусловной экстремум (D_p) или (D_q), имеющие меньшие размерности. Тогда решения исходных задач находятся по простым формулам (43) или (44), соответственно.

Без ограничения общности можно считать, что первые l компонент нормального решения $\tilde{x}_*$ задачи (P_x) и последние r компонент нормального решения $\tilde{v}_*$ задачи (C_v) строго больше нуля. В соответствии с этим предположением представим векторы $\tilde{x}_*$, $\bar{x}$, $\tilde{v}_*$, $\bar{v}$ и матрицы A, K в виде

$$\tilde{x}_*^\top = [[\tilde{x}^l_*]^\top, [\tilde{x}^s_*]^\top, [\tilde{x}^r_*]^\top],\ \bar{x}^\top = [[\bar{x}^l]^\top, [\bar{x}^s]^\top, [\bar{x}^r]^\top],$$

$$\tilde{v}_*^\top = [[\tilde{v}^l_*]^\top, [\tilde{v}^s_*]^\top, [\tilde{v}^r_*]^\top],\ \bar{v}^\top = [[\bar{v}^l]^\top, [\bar{v}^s]^\top, [\bar{v}^r]^\top], \qquad (49)$$

$$A = [A_l \mid A_s \mid A_r],\ K = [K_l \mid K_s \mid K_r],$$

где $\tilde{x}^l_* > 0_l$, $\tilde{x}^s_* = 0_s$, $\tilde{x}^r_* = 0_r$, $\tilde{v}^l_* = 0_l$, $\tilde{v}^s_* = 0_s$, $\tilde{v}^r_* > 0_r$, $l, s, m \geq 0$ и $l+s+r = n$.

С учетом эквивалентности (41) и (43) и разбиения вектора $\tilde{x}_*$ необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна-Таккера) задачи (P_{x_*}) можно переписать в развернутом виде

$$\tilde{x}_*^l = A_l^\top p - \beta \bar{v}^l > 0_l, \tag{50}$$

$$\tilde{x}_*^s = 0_s, \ A_s^\top p - \beta \bar{v}^s \leq 0_s, \tag{51}$$

$$\tilde{x}_*^r = 0_r, \ A_r^\top p - \beta \bar{v}^r \leq 0_r, \tag{52}$$

$$A_l \tilde{x}_*^l = b, \quad (\bar{v}^l)^\top \tilde{x}_*^l = f_*^1(\bar{v}). \tag{53}$$

Вектор $\tilde{v}_*$ является нормальным решением задачи (C_v) и, согласно формуле (19), однозначно определяет решение $w_* = w(\tilde{v}_*)$ задачи (C_w). С учетом введенных разбиений векторов $\tilde{x}_*$ и $\tilde{v}_*$ запишем развернутые условия Куна-Таккера для (P_x) и (C_w) в точке $[\tilde{x}_*, \tilde{v}_*, w_*]$:

$$\tilde{x}_*^l > 0_l, \quad \tilde{v}_*^l = \bar{v}^l - A_l^\top w_* = 0_l, \tag{54}$$

$$\tilde{x}_*^s = 0_s, \quad \tilde{v}_*^s = \bar{v}^s - A_s^\top w_* = 0_s, \tag{55}$$

$$\tilde{x}_*^r = 0_r, \quad \tilde{v}_*^r = \bar{v}^r - A_r^\top w_* > 0_r, \tag{56}$$

$$A_l \tilde{x}_*^l = b. \tag{57}$$

Аналогично записываются развернутые условия Куна-Таккера для задачи (D_{v_*}):

$$\tilde{v}_*^l = 0_l, \ K_l^\top q - \gamma \bar{x}^l \leq 0_l, \tag{58}$$

$$\tilde{v}_*^s = 0_s, \ K_s^\top q - \gamma \bar{x}^s \leq 0_s, \tag{59}$$

$$\tilde{v}_*^r = K_r^\top q - \gamma \bar{x}^r > 0_r, \tag{60}$$

$$K_r \tilde{v}_*^r = d, \quad (\bar{x}^r)^\top \tilde{v}_*^r = f_*^2(\bar{x}), \tag{61}$$

а также развернутые условия Куна-Таккера для (C_v) и (P_y):

$$\tilde{v}_*^l = 0_l, \quad \tilde{x}_*^l = \bar{x}^l - K_l^\top y_* > 0_l, \tag{62}$$

$$\tilde{v}_*^s = 0_s, \quad \tilde{x}_*^s = \bar{x}^s - K_s^\top y_* = 0_s, \tag{63}$$

$$\tilde{v}_*^r > 0_r, \quad \tilde{x}_*^r = \bar{x}^r - K_r^\top y_* = 0_r, \tag{64}$$

$$K_l \tilde{v}_*^r = d, \tag{65}$$

вычисленные в точке $[\tilde{v}_*, \tilde{x}_*, y_*]$, где $y_* = y(\tilde{x}_*)$ определяется согласно формуле (13).

Нормальное решение $\tilde{x}_*$ прямой задачи (P_x) назовем *невырожденным*, если оно содержит не менее, чем m ненулевых компонент. Аналогично нормальное решение $\tilde{v}_*$ двойственной задачи (C_v) назовем *невырожденным*, если оно содержит не менее, чем ν ненулевых компонент.

В принятых выше обозначениях нормальные решения $\tilde{x}_*$ и $\tilde{v}_*$ невырождены, если $l \geq m$ и $r \geq \nu$. Заметим, что случай одновременного выполнения неравенств $l > m$ и $r > \nu$ невозможен. Так если $m < l$, то из неравенства $l + r \leq n$ имеем $m + r < n$ и, следовательно, $r < \nu$. Если $\nu < r$, то $l + r \leq n < r + m$ и, следовательно, $l < m$.

Аналогично п.2 будем применять операторы ортогонального проектирования на столбцы матрицы $A_l^\top$ и на ортогональное дополнение. Формулы будут иметь вид (32) с заменой A на "урезанную" $m \times l$ матрицу A_l.

Теорема 7 *Пусть множества X_* и V_* непусты. Тогда решения задач (P_{x_*}), (D_{v_*}) существуют и единственны и, если столбцы матрицы A, соответствующие ненулевым компонентам вектора $\tilde{x}_*$, образуют матрицу A_l максимального ранга, то компоненты решения $\tilde{x}_*$ представимы в виде*

$$\tilde{x}_*^l = A_l^+ b, \;\; \tilde{x}_*^s = 0_s, \;\; \tilde{x}_*^r = 0_r. \tag{66}$$

Если столбцы матрицы K, соответствующие ненулевым компонентам вектора $\tilde{v}_*$, образуют матрицу K_r максимального ранга, то компоненты решения $\tilde{v}_*$ представимы в виде

$$\tilde{v}_*^l = 0_l, \;\; \tilde{v}_*^s = 0_s, \;\; \tilde{v}_*^r = K_r^+ d. \tag{67}$$

Доказательство. В задачах квадратичного программирования (P_{x_*}) и (D_{v_*}) целевые функции строго выпуклы, множества X_* и V_* непусты. Поэтому обе задачи имеют единственные решения $\tilde{x}_*$ и $\tilde{v}_*$ и существуют такие множители Лагранжа p, β и q, γ, что выполнены условия оптимальности (41), (47) и (42), (48), а также соответствующие условия Куна-Таккера (50)-(53) и (58)-(61).

С учетом разбиения (49) условия $\tilde{x}_* \in X$, $\tilde{v}_* \in V$ можно записать в виде

$$A_l \tilde{x}_*^l = b, \quad K_r \tilde{v}_*^r = d. \tag{68}$$

Если $l \leq m$, то по условию теоремы ранг матрицы A_l равен l. Тогда первое уравнение в (68) имеет единственное решение $\tilde{x}_*^l$, задаваемое формулой в (66), где $A_l^+ = (A_l^\top A_l)^{-1} A_l^\top$ согласно (5). В этом случае вектор b принадлежит пространству столбцов матрицы A_l и поэтому его проекция на это пространство есть $A_l^\| b = A_l A_l^+ b = b$, вектор $\tilde{x}_*$ является вершиной многогранного допустимого множества. Аналогично, если $\nu \geq r$, то единственное решение $\tilde{v}_*^r$ второго уравнения в (68) задается формулой в (67), где $K_r^+ = (K_r^\top K_r)^{-1} K_r^\top$.

Рассмотрим теперь случай невырожденного решения $\tilde{x}_*$, когда $l \geq m$. По условию теоремы ранг A_l равен m. Тогда системы уравнений (50) и (54) имеют единственные решения, которые с учетом (53) представим в виде

$$p = (A_l A_l^\top)^{-1} b + \beta (A_l^\top)^+ \bar{v}^l, \quad w_* = (A_l^\top)^+ \bar{v}^l, \tag{69}$$

где $(A_l^\top)^+ = (A_l A_l^\top)^{-1} A_l$. Подставляя в (50) найденное решение для вектора p, получим

$$\tilde{x}_*^l = A_l^\top (A_l A_l^\top)^{-1} b + \beta (A_l^\top)^\| \bar{v}^l - \beta \bar{v}^l = A_l^\top (A_l A_l^\top)^{-1} b - \beta (A_l^\top)^\perp \bar{v}^l = A_l^\top (A_l A_l^\top)^{-1} b. \tag{70}$$

Здесь использовано свойство $(A_l^\top)^\perp \bar{v}^l = 0_m$, которое следует из формулы (54), показывающей что вектор $\bar{v}^l$ лежит в пространстве столбцов матрицы $A_l^\top$. Таким образом, пришли к первой формуле (66), в которой $A_l^+ = A_l^\top (A_l A_l^\top)^{-1} b$.

Аналогично доказывается последняя формула в (67) в случае, когда $r \geq \nu$. При этом используются развернутые условия Куна-Таккера (58)-(61) для задачи (D_{v_*}) и развернутые условия Куна-Таккера (62)-(65) для (C_v) и (P_y). Аналогом формул (69) и (70) являются следующие

$$q = (K_r K_r^\top)^{-1} d + \gamma y_*, \quad y_* = (K_r^\top)^+ \bar{x}^r,$$
$$\tilde{v}_*^r = K_r^\top (K_r K_r^\top)^{-1} d + \gamma K_r^\top (K_r^\top)^+ \bar{x}^r - \gamma \bar{x}^r = K_r^+ d.$$

Здесь $(K_r^\top)^+ = (K_r K_r^\top)^{-1} K_r$ и $K_r^+ = K_r^\top (K_r K_r^\top)^{-1}$. Теорема доказана.

Доказанная теорема утверждает, что при достаточно естественных предположениях ненулевые компоненты решений задач (P_{x_*}), (D_{v_*}) совпадают с нормальным решением соответствующих систем уравнений (68).

Заметим, что в отличие от задачи (P_{x_*}), двойственная к ней задача (D_p) имеет неединственное решение. Естественно возникает вопрос о нахождении среди всех решений задачи (D_p) минимального значения β_* множителя Лагранжа β. Тогда в двойственной задаче (D_p) можно зафиксировать $\beta \geq \beta_*$ и решать задачу максимизации двойственной функции $\tilde{L}(p, \beta)$ только по переменным p. При этом пара $[p, \beta]$ является решением задачи (D_p), тройка $[\tilde{x}_*, p, \beta]$ — решением задачи (39) и нормальное решение $\tilde{x}_*$ задачи (P_x) определится по формуле (43).

Для нахождения минимального β обратимся к условиям Куна-Таккера для задачи (P_{x_*}). Среди решений системы (50)-(53) найдем такие множители Лагранжа $[p, \beta]$, что β является минимальным, т.е. приходим к задаче линейного программирования

$$\beta_* = \inf_{\beta \in R^1} \inf_{p \in R^m} \{ \ \beta \ : \ A_l^\top p - \beta \bar{v}^l = \tilde{x}_*^l, \ A_s^\top p - \beta \bar{v}^s \leq 0_s, \ A_r^\top p - \beta \bar{v}^r \leq 0_r \}. \tag{71}$$

Целевая функция в этой задаче может быть неограничена снизу. В этом случае $\beta_* = -\infty$. Это означает, что для любого фиксированного значения β существует решение p задачи $\max_{p \in R^m} \tilde{L}(p, \beta)$ и тройка $[\tilde{x}_*, p, \beta]$ есть решение задачи (39).

Аналогичная ситуация и в задаче (D_q), которая имеет неединственное решение в отличие от задачи (D_{v_*}). Также возникает вопрос о нахождении минимального значения γ_* множителя Лагранжа γ. Тогда зафиксировав $\gamma \geq \gamma_*$, можно решать задачу максимизации двойственной функции $\tilde{L}(q, \gamma)$ только по переменным q. Минимальный множитель Лагранжа γ находится из условий Куна-Таккера (58)-(61) для задачи (D_{v_*}). То есть требуется найти такую пару $[q, \gamma]$, что множитель γ является минимальным:

$$\gamma_* = \inf_{\gamma \in R^1} \inf_{q \in R^\nu} \{ \ \gamma \ : \ K_l^\top q - \gamma \bar{x}^l \leq 0_l, \ K_s^\top q - \gamma \bar{x}^s \leq 0_s, \ K_r^\top q - \gamma \bar{x}^r = \tilde{v}_*^r \}. \tag{72}$$

Для этой задачи также возможен случай $\gamma_* = -\infty$. Тогда в задаче (D_q) можно зафиксировать любое значение γ.

Итак, пришли к результату, который сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8 *Пусть задача (P_x) разрешима. Тогда существуют такие β_* и γ_*, определяемые в (71) и (72), что имеют место следующие утверждения:*

1. *при любом фиксированном $\beta \geq \beta_*$ пара $[p, \beta]$, где p — решение задачи*
$$\max_{p \in R^m} \tilde{L}(p, \beta), \tag{73}$$
определяет нормальное решение $\tilde{x}_*$ задачи (P_x) по формуле
$$\tilde{x}_* = (A^\top p - \beta \bar{v})_+;$$
2. *при любом фиксированном $\gamma \geq \gamma_*$ пара $[q, \gamma]$, где q — решение задачи*
$$\max_{q \in R^\nu} \tilde{L}(q, \gamma), \tag{74}$$
определяет нормальное решение $\tilde{v}_*$ задачи (C_v) по формуле
$$\tilde{v}_* = (K^\top q - \gamma \bar{x})_+.$$

Определим значение β_* по формуле

$$\beta_* = \begin{cases} \max\limits_{l+s+1 \le i \le n} \frac{[A_r^\top (A_l^\top)^+ \tilde{x}_*^l]^i}{[\tilde{v}_*^r]^i}; \\ -\infty, \qquad \text{если } \|\tilde{v}_*\| = 0. \end{cases} \tag{75}$$

Теорема 9 *Пусть нормальное решение $\tilde{x}_*$ задачи (P_x) невырождено и ранг матрицы A_l равен m. Тогда тройка $[x, p, \beta]$, где*

$$x = \tilde{x}_*, \quad p = (A_l A_l^\top)^{-1} b + \beta w_*, \quad \beta \ge \beta_*, \tag{76}$$

является седловой точкой функции Лагранжа $L(x, p, \beta)$ для задачи (P_{x_*}), при этом пара $[p, \beta]$ является решением двойственной задачи (D_p) и выполнены неравенства

$$A_s^\top (A_l^\top)^+ \tilde{x}_*^l \le 0_s, \tag{77}$$

$$A_r^\top (A_l^\top)^+ \tilde{x}_*^l \le \beta \tilde{v}_*^r. \tag{78}$$

Доказательство. Из (54)-(56) определим $\bar{v}^l$, $\bar{v}^s$, $\bar{v}^r$ подставим соответственно в (50)-(52). В результате получим

$$\tilde{x}_*^l = A_l^\top (p - \beta w_*), \tag{79}$$

$$A_s^\top (p - \beta w_*) \le 0_s, \tag{80}$$

$$A_r^\top (p - \beta w_*) \le 0_r. \tag{81}$$

Из (79) однозначно определяется вектор p, который с учетом условия $A_l \tilde{x}_*^l = b$, представим в виде

$$p = (A_l A_l^\top)^{-1} b + \beta w_*, \tag{82}$$

Подставляя это выражение для p в (80) и (81), приходим к неравенствам (77) и (78). Итак, условия Куна-Таккера (50)-(53) для задачи (P_{x_*}) сводятся к (77), (78), (53), где $\tilde{x}_*^l > 0_l$, $\tilde{x}_*^s = 0_s$, $\tilde{x}_*^r = 0_r$ и множители Лагранжа p выражаются формулой (82) и линейно зависят от β. Из (78) следует, что при любом $\beta \ge \beta_*$, где β_* задается формулой (75), тройка $[x, p, \beta]$, определяемая в (76), удовлетворяет условиям Куна-Таккера для задачи (P_{x_*}) и, следовательно, является седловой точкой функции Лагранжа для задачи (P_{x_*}). Тогда пара $[p, \beta]$ является решением двойственной задачи (D_p) к задаче (P_{x_*}). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 9 следует, что задача (71) нахождения β_* может быть разрешена явно, если $l \ge m$ и ранг матрицы A_l равен m. При выполнении условий теоремы 9 оптимальное значение целевой функции выражается формулой (75), а оптимальный вектор p определяется формулой из (76).

Значение γ_* определим следующей формулой

$$\gamma_* = \begin{cases} \max\limits_{1 \le i \le l} \frac{[K_l^\top (K_r^\top)^+ \tilde{v}_*^r]^i}{[\tilde{x}_*^l]^i}; \\ -\infty, \qquad \text{если } \|\tilde{x}_*\| = 0. \end{cases} \tag{83}$$

Аналогом теоремы 9 в случае задачи (D_q) будет следующая

Теорема 10 *Пусть нормальное решение $\tilde{v}_*$ задачи (C_v) невырождено и ранг матрицы K_r равен ν. Тогда тройка $[v, q, \gamma]$, где*

$$v = \tilde{v}_*, \quad q = (K_r K_r^\top)^{-1} d + \gamma y_*, \quad \gamma \geq \gamma_*, \tag{84}$$

является седловой точкой функции Лагранжа $L(v, q, \gamma)$ для задачи (D_{v_*}), при этом пара $[q, \gamma]$ является решением двойственной задачи (D_q) и выполнены неравенства

$$\begin{aligned} K_l^\top (K_r^\top)^+ \tilde{v}_*^r &\leq \gamma \tilde{x}_*^l, \\ K_s^\top (K_r^\top)^+ \tilde{v}_*^r &\leq 0_s. \end{aligned}$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 9 и основано на использовании развернутых условий Куна-Таккера (58)-(61) для задачи (D_{v_*}) и развернутых условий Куна-Таккера (62)-(65) для задач (C_v) и (P_y).

При выполнении условий теоремы 10 задача (72) нахождения γ_* может быть явно разрешена. При этом γ_* определяется формулой (83), а оптимальный вектор q находится из (84).

В простейшем случае, когда A_l и K_r — квадратные невырожденные матрицы, $l = m$, $s = 0$, $r = \nu$, нормальные решения $\tilde{x}_*$ и $\tilde{v}_*$ являются невырожденными базисными решениями. Формулы (75) и (83) при этом упрощаются:

$$\beta_* = \max_{m+1 \leq i \leq n} \frac{[A_r^\top (A_l^\top)^{-1} \tilde{x}_*^l]^i}{[\tilde{v}_*^r]^i}, \quad \gamma_* = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{[K_l^\top (K_r^\top)^{-1} \tilde{v}_*^r]^i}{[\tilde{x}_*^l]^i}. \tag{85}$$

5. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для задач линейного программирования (P_x) и (C_v) введем регуляризованные задачи

$$\min_{x \in X} [\beta \bar{v}^\top x + \|x\|^2/2], \ X = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0_n\}. \tag{$P_x(\beta)$}$$

$$\min_{v \in V} [\gamma \bar{x}^\top v + \|v\|^2/2], \ V = \{v \in R^n \ : \ Kv = d, \ v \geq 0_n\}. \tag{$D_v(\gamma)$}$$

Здесь $\beta, \ \gamma \in R^1$ - некоторые параметры. В отличие от регуляризации по А.Н.Тихонову (см., например, [24], [1], [2]) здесь параметры регуляризации β и γ умножаются на целевые функции и в ряде случаев они могут принимать нулевые или отрицательные значения.

Задачи $(P_x(\beta))$, $(D_v(\gamma))$ можно представить, соответственно, в виде

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} [\|x + \beta \bar{v}\|^2 - \beta^2 \|\bar{v}\|^2]/2, \\ &\min_{v \in V} [\|v + \gamma \bar{x}\|^2 - \gamma^2 \|\bar{x}\|^2]/2. \end{aligned}$$

Выведем двойственную задачу к $(P_x(\beta))$. Для этого выпишем функцию Лагранжа задачи $(P_x(\beta))$

$$L(x, p) = \beta \bar{v}^\top x + \|x\|^2/2 + p^\top (b - Ax), \tag{86}$$

где $p \in R^m$ — множители Лагранжа.

Отметим, что функция Лагранжа $L(x,p)$ отличается от определенной в (37) для задачи (P_{x_*}) функции Лагранжа $L(x,p,\beta)$ на величину $-\beta f_*^1(\bar{v})$, являющуюся константой при фиксированном β. Необходимые и достаточные условия минимума по $x \in R_+^n$ функции Лагранжа $L(x,p)$ имеют вид, полностью совпадающий с (41). Следовательно и формула для определения точки минимимума совпадает с (43). Подставляя ее в функцию Лагранжа (86), получим двойственную функцию

$$\tilde{L}(p) = b^\top p - \|(A^\top p - \beta\bar{v})_+\|^2/2. \tag{87}$$

Эта функция дифференцируема, вогнута по p. Двойственная к $(P_x(\beta))$ задача является задачей безусловной максимизации и состоит в отыскании

$$\max_{p \in R^m} \tilde{L}(p). \tag{$D_p(\beta)$}$$

Необходимые и достаточные условия максимума в этой задаче имеют вид

$$\tilde{L}_p(p) = b - A(A^\top p - \beta\bar{v})_+ = 0_m.$$

Аналогично выводится двойственная к $(D_v(\gamma))$ задача, являющаяся задачей безусловной максимизации в ν-мерном пространстве:

$$\max_{q \in R^\nu} \tilde{L}(q), \tag{$D_q(\gamma)$}$$

где двойственная функция $\tilde{L}(q)$ содержит параметр γ и имеет вид

$$\tilde{L}(q) = d^\top q - \|(K^\top q - \gamma\bar{x})_+\|^2/2.$$

Сравнивая $\tilde{L}(p)$ в (87) с $\tilde{L}(p,\beta)$ в (45), замечаем, что задачи $(D_p(\beta))$ и (D_p) отличаются на величину $-\beta f_*^1(\bar{v})$. Следовательно, при фиксированном β решения задач $(D_p(\beta))$ и (73) совпадают. Аналогичный факт справедлив и для задач $(D_p(\gamma))$ и (74): их решения при фиксированных γ совпадают. Поэтому следующая важная теорема является простой переформулировкой теоремы 8.

Теорема 11 *Пусть задача (P_x) разрешима. Тогда существуют такие β_* и γ_*, определяемые в (71) и (72), что имеют место следующие утверждения:*

1. *при любом фиксированном $\beta \geq \beta_*$ решение $p(\beta)$ задачи $(D_p(\beta))$ определяет нормальное решение $\tilde{x}_*$ задачи (P_x) по формуле*

$$\tilde{x}_* = [A^\top p(\beta) - \beta\bar{v}]_+; \tag{88}$$

2. *при любом фиксированном $\gamma \geq \gamma_*$ решение $q(\gamma)$ задачи $(D_q(\gamma))$ определяет нормальное решение $\tilde{v}_*$ задачи (C_v) по формуле*

$$\tilde{v}_* = [K^\top q(\gamma) - \gamma\bar{x}]_+. \tag{89}$$

Если нормальное решение $\tilde{x}_*$ невырождено и ранг матрицы A_l равен m или если нормальное решение $\tilde{v}_*$ невырождено и ранг матрицы K_r равен ν, то формулировку теоремы 11 можно уточнить аналогично тому, как это было сделано в теоремах 9 и 10. Простым следствием теоремы 9 является следующая

Теорема 12 *Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда при любом фиксированном $\beta \geq \beta_*$, где β_* находится по формуле (75), решение $p(\beta)$ задачи $(D_p(\beta))$ определяет нормальные решения задач (P_x) и (C_v) соответственно по формулам (88) и*

$$\tilde{v}_* = \bar{v} - A^\top w_*,$$

где $w_* = [p(\beta) - (A_l A_l^\top)^{-1} b]/\beta$.

Следствием теоремы 10 является

Теорема 13 *Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда при любом фиксированном $\gamma \geq \gamma_*$, где γ_* находится по формуле (83), решение $q(\gamma)$ задачи $(D_q(\gamma))$ определяет нормальные решения задач (C_v) и (P_x) соответственно по формулам (89) и*

$$\tilde{x}_* = \bar{x} - K^\top y_*,$$

где $y_* = [q(\gamma) - (K_r K_r^\top)^{-1} d]/\gamma$.

Обозначим через $\mathrm{pr}(z, Z)$ проекцию вектора z множество Z. Из теорем 11-13 следует, что для любого $\beta \geq \beta_*$, $\gamma \geq \gamma_*$ справедливы равенства

$$\tilde{x}_* = \mathrm{pr}(-\beta\bar{v}, X) = [A^\top p(\beta) - \beta\bar{v}]_+ = \mathrm{pr}(0_n, X_*),$$
$$\tilde{v}_* = \mathrm{pr}(-\gamma\bar{x}, V) = [K^\top q(\gamma) - \gamma\bar{x}]_+ = \mathrm{pr}(0_n, V_*).$$

Из этих формул сделаем следующее заключение: при $\beta \geq \beta_*$, $\gamma \geq \gamma_*$ нормальные решения задач ЛП (P_x) и (C_v) совпадают с решениями регуляризованных задач $(P_x(\beta))$ и $(D_v(\gamma))$ и совпадают с проекциями начала координат на множества решений X_*, V_* и проекциями $-\beta\bar{v}$ и $-\gamma\bar{x}$ на X и V, соответственно. Все эти задачи являются задачами квадратичного программирования, двойственные к которым являются задачами безусловной максимизаци в различных пространствах. Между множествами решений этих задач существует связь, выражаемая простыми формулами. Отметим, что двойственная к (P_{x_*}) задача безусловной максимизации (D_p) имеет на единицу большую размерность, чем двойственная задача $(D_p(\beta))$. Неизвестный параметр β в $(D_p(\beta))$ является переменной (множителем Лагранжа) в задаче (D_p).

Рассмотрим важный частный случай задачи (P_x), для которой $\beta_* \leq 0$. Согласно формуле (75) этот случай имеет место, если выполнены условия теоремы 9, т.е. нормальное решение $\tilde{x}_*$ задачи (P_x) невырождено и ранг матрицы A_l равен m, и если $\|\tilde{v}_*\| = 0$ или $A_r^\top (A_l^\top)^+ \tilde{x}_*^l \leq 0_r$. Положим $\beta = 0$, тогда регуляризованная задача $(P_x(\beta))$ превращается в задачу нахождения наименьшего по норме вектора $\tilde{x}_*$ из допустимого множества X. Согласно теореме 12 этот вектор одновременно является решением задачи $(P_x(\beta))$ при любом $\beta \geq \beta_*$ и нормальным решением задач (P_x), (P), а также решением задачи (P_{x_*}).

Рассмотрим случай, когда $\beta \geq \beta_*$ и $\beta > 0$. В задаче $(D_p(\beta))$ сделаем замену переменных, положив $w = p/\beta$. тогда

$$\tilde{L}(p) = \beta[b^\top w - \beta\|(A^\top w - \bar{v})_+\|^2/2]$$

и задача $(D_p(\beta))$ заменяется эквивалентной задачей

$$\max_{w \in R^m} \; [b^\top w - \beta\|(A^\top w - \bar{v})_+\|^2/2]. \tag{90}$$

То есть приходим к методу внешнего квадратичного штрафа, примененному к задаче (C_w). В этом случае из теоремы 11 следует, что вектор $w(\beta)$, полученный в результате максимизации дифференцируемой внешней штрафной функции, определяет по формуле $\tilde{x}_* = \beta[A^\top w(\beta) - \bar{v}]_+$ нормальное решение задачи (P_x) при $\beta > \beta_*$. Из хорошо известных свойств метода внешнего квадратичного штрафа [26] имеем $w(\beta) = p(\beta)/\beta \to w_*$ при $\beta \to +\infty$.

Таким образом, полученные выше соотношения для β_* дают оценки коэффициента штрафа для классического метода внешнего квадратичного штрафа, примененного к задаче (C_w), т.е. к задаче ЛП с ограничениями типа неравенств. Если $\beta_* \le 0$, то при любом положительном β, и, если $\beta_* > 0$, то при любом $\beta \ge \beta_*$ с помощью решения $w(\beta)$ задачи (90) получаем нормальное решение $\tilde{x}_*$ задачи (P_x).

Итак, задачу $(D_p(\beta))$ можно рассматривать как нестандартную реализацию метода внешнего квадратичного штрафа для решения задачи линейного программирорвания (C_w). Заметим, что задача (90) является двойственной к задаче регуляризации

$$\min_{x \in X} \, [\bar{v}^\top x + \|x\|^2/(2\beta)].$$

Полагая $\varepsilon_* = 1/\beta_*$, если $\beta_* > 0$, и $\varepsilon_* = +\infty$, если $\beta_* \le 0$, где β_* определяется приведенными выше соотношениями, получаем оценку для параметра регуляризации в классической задаче регуляризации

$$\min_{x \in X} \, [\bar{v}^\top x + \varepsilon\|x\|^2/2]. \tag{91}$$

При $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$ решения задач (91) и (P_x) совпадают.

6. ОТЫСКАНИЕ НОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Будем искать нормальное решение системы (28), т.е. рассмотрим следующую задачу квадратичного программирования

$$\min_{x \in R^n_+} \min_{v \in R^n_+} [(\|x\|^2 + \|v\|^2)/2 \; : \; Ax = b, \; Kv = d, \; \bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v = \bar{x}^\top \bar{v}]. \tag{92}$$

Для этой задачи выпишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x, v, p, q, \alpha) = [\|x\|^2 + \|v\|^2]/2 + p^\top(b - Ax) + q^\top(d - Kv) + \\ + \alpha(\bar{v}^\top x + \bar{x}^\top v - \bar{x}^\top \bar{v}), \end{aligned} \tag{93}$$

где введены множители Лагранжа $p \in R^m$, $q \in R^\nu$, $\alpha \in R^1$.

Необходимые и достаточные условия минимума функции Лагранжа по $x \in R^n_+$ и $v \in R^n_+$ имеют вид:

$$\begin{aligned} L_x(x, v, p, q, \alpha) = x - A^\top p + \alpha\bar{v} \ge 0_n, \; x \ge 0_n, \; D(x)L_x = 0_n, \\ L_v(x, v, p, q, \alpha) = v - K^\top q + \alpha\bar{x} \ge 0_n, \; v \ge 0_n, \; D(v)L_v = 0_n. \end{aligned}$$

Разрешая эти соотношения относительно x и v, получим

$$x \;\; = \;\; (A^\top p - \alpha\bar{v})_+, \;\; v = (K^\top q - \alpha\bar{x})_+. \tag{94}$$

Подставляя решения (94) в выражение для функции Лагранжа (93), получаем двойственную функцию

$$\tilde{L}(p, q, \alpha) = b^\top p + d^\top q - \alpha\bar{x}^\top\bar{v} - [\|(A^\top p - \alpha\bar{v})_+\|^2 + \|(K^\top q - \alpha\bar{x})_+\|^2]/2.$$

Двойственная к (92) задача является задачей безусловной максимизации и состоит в отыскании

$$\max_{p \in R^m} \max_{q \in R^\nu} \max_{\alpha \in R^1} \tilde{L}(p, q, \alpha). \tag{95}$$

Итак, решение исходной задачи ЛП свелось к решению задачи безусловной максимизации кусочно квадратичной функции $n+1$ переменных. В отличие от классического метода внешнего квадратичного штрафа, примененного к задаче (P_x), в задаче (95) отсутствует стремящийся к бесконечности коэффициент штрафа.

Из теоремы двойственности, примененной к задачам (92), (95), и условий оптимальности (28) получаем следующий результат.

Теорема 14 *Задача (P_x) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача безусловной максимизации (95). Для каждого решения $[p, q, \alpha]$ задачи (95) пара $[\tilde{x}_*, \tilde{v}_*]$, определяемая по формулам*

$$\tilde{x}_* = (A^\top p - \alpha \bar{v})_+, \tag{96}$$

$$\tilde{v}_* = (K^\top q - \alpha \bar{x})_+, \tag{97}$$

является единственным решением задачи (92), векторы $\tilde{x}_*$ и $\tilde{v}_*$ являются нормальными решениями соответственно задач (P_x) и (C_v).

Если в функции $\tilde{L}(p, q, \alpha)$ зафиксировать скаляр α и вместо задачи (95) рассмотреть упрощенную задачу

$$\max_{p \in R^m} \max_{q \in R^\nu} \tilde{L}(p, q, \alpha), \tag{98}$$

то последняя распадается на две независимые задачи $(D_p(\beta))$ и $(D_q(\gamma))$, в которых $\beta = \gamma = \alpha$. Тогда из теоремы 11 следует

Теорема 15 *Пусть задача (P_x) разрешима. Тогда существует такой скаляр $\alpha_* = \max[\beta_*, \gamma_*]$, где β_* и γ_* определяются из (71) и (72), что при любом фиксированном $\alpha \geq \alpha_*$ решение $[p(\alpha), q(\alpha)]$ задачи (98) определяет нормальные решения задач (P_x) и (C_v) соответственно по формулам*

$$\tilde{x}_* = [A^\top p(\alpha) - \alpha \bar{v}]_+, \quad \tilde{v}_* = [K^\top q(\alpha) - \alpha \bar{x}]_+.$$

Аналогично (92) можно ставить задачи о нахождении нормального решения систем (29)-(31), переходя к двойственным задачам безусловной максимизации. Однако размерности соответствуюших двойственных задач будут больше, чем размерность задачи (95). Близкий подход к нахождению нормального решения с помощью редукции к задаче безусловной оптимизации был предложен в [23].

ПРИМЕР. В качестве простейшей иллюстрации полученных результатов возьмем пример из [9]. Пусть в задаче (P) $c^\top = [-2, 1]$, $A = [1\ 1]$, $b = 1$, $m = \nu = 1$, $n = 2$. Вобьмем $K = [1\ \ -1]$, $\bar{x}^\top = [0.5, 0.5]$, $\bar{v} = c$. Тогда $d = -3$,

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \ A^{\|} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \ A^{\perp} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{v} = c^{\perp} = \bar{v}^{\|} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \ \tilde{x} = \tilde{x}' = \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \ x_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{v}' = v_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$w_* = u_* = -2$, $y_* = -0.5$, $u(c) = 0$, $\operatorname{opt} P = \operatorname{opt} D = \operatorname{opt} P_x(c) = -2$, $\operatorname{opt} C_v(\bar{x}) = \operatorname{opt} P_y(\bar{x}) = -1.5$, $\bar{x}^\top \bar{v} = 0$, $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{x}'\| = 1/\sqrt{2}$, $\|x_*\| = 1$, $\|\tilde{v}\| = 3/\sqrt{2}$, $\|\tilde{v}'\| = \|v_*\| = 3$. Из (85) и теоремы 15 получим $\alpha_* = \beta_* = 1/3, \gamma_* = -3$. Решением задачи (95) является вектор $[p, q, \alpha]$, в котором $p = 1 - 2\alpha$, $q = -3 - \alpha/2$, $\alpha \geq 1/3$. Подставляя этот вектор в выражения (96), (97), получим приведенные выше векторы x_*, v_* — решения задач (P_x), (C_v).

Согласно результатам п. 2 можно существенно изменить оптимальное значение f_* целевой функции исходной задачи (P), не меняя множество решений. Так взяв, например, вместо вектора c вектор $\hat{c} = (-13, -10)$, получим $\hat{c}^{\perp} = c^{\perp}$, $\hat{f}_* = \hat{c}^\top x_* = -13$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. *Линейное программирование.* М.: Факториал, 1998.

2. Еремин И. И. *Теория линейной оптимизации.* Екатеринбург, УрО РАН, 1998.

3. Дикин И. И. *Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования* // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. N. 4. С. 745-747.

4. Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г. *Численные методы решения некоторых задач исследования операций* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. N. 3. С. 583-597.

5. Евтушенко Ю. Г. *Два численных метода решения задач нелинейного программирования* // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. N. 1. С. 38-40.

6. Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г. *Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. N. 4. С. 890-904.

7. Karmarcar N. *A new polinomial-time algorithm for linear programming* // Combinatorica. 1984. N 4. P. 373-395.

8. Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph. *Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach.* Chichester: John Wiley & Sons, 1997.

9. Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г. *Барьерно-проективные и барьерно-ньтоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования)* . М.: ВЦ РАН, 1992.

10. Evtushenko Yu. G., Moretti A., Zhadan V. G. *Newton's steepest descent for linear programming* // Dynamics of non-homogeneous systems. Proceedings of ISA RAS. V. 2. M.: Editorial URSS. 1999. P. 86-108.

11. *Special issue on interior point methods* // Optimizat. Methods & Software. 1999. V. 11. N 1-4. P. 1-690.

12. Evtushenko Yu. G., Zhadan V. G. *Space-transformation technique: the state of the art.* // Nonlinear Optimization and Applications (Edited by G. DI Pillo, F. Giannessi). Kluwer Acad. Publis. 1996. P. 101-123.

13. Вильчевский Н. О. *О выборе коэффициента штрафа в задачах линейного программирования* // Автомат. и телемехан. 1970. N 4. С. 121-126.

14. Кутанов А. Т. *Об уточнении решения задачи линейного программирования в методе штрафных функций* // Автомат. и телемехан. 1970. N 4. С. 127-132.

15. Пропой А. И., Ядыкин А. Б. *Параметрическое квадратичное программирование и линейное программирование I, II* // Автомат. и телемехан. 1978. N 2. С. 102-112, N 4. С. 135-143.

16. Разумихин Б. С. *Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике.* М.: Наука, 1975.

17. Разумихин Б. С. *О двух методах условной оптимизации II. Метод годографа для задач линейного программирования*// Модели и методы оптимизации. Тр. ВНИИСИ. N 3. М.: ВНИИСИ, 1980. С. 37-53.

18. Рапопорт Л. Б. *Модифицированый метод годографа для задач линейного программирования* // Модели и методы оптимизации. Тр. ВНИИСИ. N 3. М.: ВНИИСИ, 1980. С. 82-93.

19. Чеботарев С. П. *Об изменении коэффициента штрафа в задачах линейного программирования* // Автомат. и телемехан. 1974. N 3. С. 102-107.

20. Ядыкин А. Б. *О параметризации в вырожденных задачах квадратичного программирования* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. N 3. С. 634-648.

21. Mangasarian O. L., Meyer R. R. *Nonlinear perturbation of linear programs*// SIAM J. Control and Optimizat. 1979. V. 17. N 6. P. 745-752.

22. Mangasarian O. L. *Normal solutions of linear programs* // Math. Program. Study. 1984. V. 22. P. 206-216.

23. Mangasarian O. L. *Least-norm linear programming solution as an unconstrained minimization problem* // J. Math. Analysis and Applic. 1983. V. 92. P. 240-251.

24. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* М.: Наука, 1979.

25. Поляк Б. Т. *Введение в оптимизацию.* М.: Наука, 1983.

26. Фиакко А., Мак-Кормик Г. *Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации.* М.: Мир, 1972.

27. Удзава Х. *Итерационные методы вогнутого программирования* // К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 228-245.

28. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. *Введение в теорию линейного и выпуклого программирования*. М.: Наука, 1976.

29. Mangasarian O. L. *Nonlinear Programming*. New York: McCrow-Hill, 1969.