РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КАФЕДРА ФИЛОСОФИИ РАН

РЕФЕРАТ ПО ФИЛОСОФИИ

Интуиция в математике

Воронцов К. В.
Вычислительный центр РАН
Руководитель семинара
доц. Головин И. И.

Москва-1995 г.

1. Введение

Пожалуй, не найти в мире явления, столь часто и с пользой применяемого, и в то же время столь непонятного, как интуиция человека. История знает немало попыток дать определение интуиции. Это и прямое непосредственное усмотрение истины умом (рационалисты XVII века), и специфическая форма познавательного процесса, характеризующаяся неосознанностью, непосредственностью, внезапностью (В. Ф. Асмус, А. А. Налчаджян), и специфический способ взаимодействия чувственного и логического познания (А. Эйнштейн), и даже способность к неограниченно богатой фантазии, вырабатыванию “сумасшедших идей” (Д. И. Блохинцев). Понятие интуиции имеет широкий семантический диапазон: от случайного полуосознанного предчувствия, близкого к инстинкту, до высших форм творческого мышления в науке и искусстве.

Мы ограничим круг вопросов, связанных с проблемой интуиции, той ролью, которую интуиция играет в точных науках, в частности, математике. Чтобы не злоупотреблять игрой слов, будем различать три ситуации, в которых математика (и математики) вынуждена прибегать к интуиции. В соответствии с этим разделением один и тот же термин “интуиция” будет употребляться в трёх различных аспектах и иметь несколько различный смысл. Во-первых, под интуицией будем понимать тот источник непосредственного знания, который позволяет формулировать недоказываемые аксиомы и определения математических теорий. Именно этот аспект интуиции находился под наиболее пристальным вниманием философов и математиков античности и эпохи Возрождения. Во-вторых, интуицией будем называть тот, во многом неясный, механизм, который лежит в основе математического творчества и позволяет ставить задачи, получать новые результаты и создавать целые теории. Наконец, к интуиции будем относить способность выделять и понимать суть достаточно сложных логических построений уже существующих теорий, возможно, даже без детального знания самих этих построений. В то время как первый аспект интуиции традиционно относится к сфере философии и естествознания, последние два представляют гораздо больший практический и методологический интерес. Однако в силу логических закономерностей эволюции научного знания эти два аспекта имеют возрастающее значение, и, выходя за пределы психологии, часто оказываются в поле зрения философов.

Не претендуя ни на исчерпывающую классификацию, ни на новизну терминологии, а лишь на ясность обозначений, мы будем называть эти три аспекта интуиции соответственно фундаментальной интуицией, творческой интуицией и интуицией понимания.

2. Фундаментальная интуиция

Термин “фундаментальная интуиция” был впервые введён Е. Л. Фейнбергом и обозначает способность к пониманию основополагающих законов природы и формулированию их в виде аксиом. Это есть прямое усмотрение истины, не опирающееся на доказательства.

Когда-то математики были склонны доверять интуиции. Так, в древнеиндийских трактатах по геометрии в качестве доказательства приводили чертёж и писали только одно слово: “смотри”. Многие философы XVII века (Декарт, Лейбниц, Спиноза) видели в интуиции источник необходимости и всеобщности математического знания. Корифей сенсуалистической теории познания Локк (1632-1704) полагал даже, что с точки зрения достоверности, ясности и границ применимости интуитивное познание должно быть признано самым совершенным из всех видов знания.

Позже пришло понимание того, что интуиция может легко вводить в заблуждение, приводить к противоречиям и парадоксам. "Интуиция не может дать нам ни строгости, ни даже достоверности", - замечает Анри Пуанкаре. Выдающийся немецкий математик Феликс Клейн, объясняя обманчивость геометрических образов, основанных на чувственной интуиции, указывает, что прямая линия представляется нам скорее некоторой узкой полоской, чем абстрактной "длиной без ширины". При этом её конечная, интуитивно воспринимаемая ширина поглощает неуловимые тонкости строения идеализированного геометрического объекта.

Первоначальные интуитивные представления о бесконечности вообще оказываются насквозь противоречивыми (именно первоначальные, так как интуитивные представления современного математика уже базируется на знаниях). Например, часть бесконечного множества может быть взаимно однозначно отождествлена со всем множеством. Это подрывает наши интуитивные представления о том, что часть всегда меньше целого. Ещё один пример даёт нам аксиома евклидовой геометрии, гласящая, что через одну точку можно провести только одну прямую, параллельную данной. Лобачевский и Риман предположили, соответственно, что параллельных может быть либо бесконечно много, либо вообще ни одной, и получили свои варианты геометрии. Оказалось, что оба эти варианта неевклидовой геометрии внутренне непротиворечивы, следовательно могут иметь место. Это подрывает нашу интуитивную убеждённость в том, что параллельная обязательно должна быть единственной. Заметим, что эта убеждённость также вытекает из вольного обращения нашей интуиции с бесконечностью. Параллельными называются прямые, которые никогда не пересекаются. Однако мы не можем сходить в бесконечность, чтобы проверить это, и вынуждены доверять интуиции, основанной на опыте обращения с одними лишь конечными материальными объектами.

В математике XIX века число строго доказанных утверждений, противоречащих непосредственным данным интуиции, ещё более увеличилось. Это открытие непрерывных функций, не имеющих производной (кривая Вейерштрасса, к которой нельзя провести касательную ни в одной точке); доказательство возможности изобразить кривую конечной длины на сплошной площадке (кривая Пеано, 1890 г.), и многие другие.

История математики свидетельствует о том, что в некоторый момент интуицию перестали считать действительным критерием истинности математических положений. Как это обычно бывает, признание существования некоторой проблемы вызвало желание решить её наиболее радикальным образом.

Уже Лейбниц наметил идею чисто логической разработки математики, полностью не зависимой от интуиции. В своём письме к Христиану Гюйгенсу он сообщает: "Я нашёл некоторые начала нового, совершенно отличного от алгебры символического языка, благодаря которому можно будет представить с большой пользой, точно и сообразно с делом, без фигур, в мыслях, всё то, что зависит от интуиции". На рубеже XIX - XX вв. почти одновременно появились исследования французского учёного Луи Кутюра и английского - Бертрана Рассела, посвящённые логике Лейбница. Подход логистиков состоял в том, чтобы не только довести до возможного минимума число основных положений математики, приобретаемых с помощью интуиции, но и полностью свести математику к логике. Чуть позже Пеано разработал специальный символический язык, названный сначала пасиграфией, то есть искусством писать математические трактаты, не употребляя ни единого слова из житейского словаря.

Наиболее убедительное обоснование невозможности окончательно избавиться от фундаментальной интуиции в основаниях математики приводит крупнейший французский учёный Анри Пуанкаре. Указывая на невозможность доказательства принципа полной индукции, он пишет: “Чтобы установить, что постулаты не содержат в себе противоречий, нужно рассмотреть все предложения, которые могут быть выведены из этих постулатов, как посылок, и показать, что среди этих предложений нет двух, противоречащих друг другу. Число этих предложений оказывается неограниченным, и прямая проверка уже невозможна. Тогда необходимо обратиться к таким способам доказательства, в которых вообще нельзя обойтись без применения полной индукции, то есть того принципа, который и надлежит проверить”. Логистики пытались решить эту проблему, объявив принцип полной индукции определением целого числа, то есть простым соглашением. Однако, как указывает Пуанкаре, всякое определение является в то же время скрытым постулатом: оно означает по меньшей мере то, что определяемый объект существует, то есть свободен от противоречий. Если принять такое определение, оно опять-таки будет заключать в себе непосредственное интуитивное усмотрение ума.

Подмеченная Пуанкаре причина несостоятельности логистики легла в основу фундаментальной теоремы Гёделя о неполноте арифметики. Согласно этой теореме, в каждой математической системе, для которой имеется доказательство её непротиворечивости и которая содержит арифметику, фигурируют положения, в этой системе недоказуемые, но доступные доказательству по принципу “интуиционизма”. Чисто формалистическое обоснование математики оказалось невозможным.

Кроме того, сама логика, как выяснилось, является типичной аксиоматической системой, происхождение основных постулатов которой уже никак не может считаться логическим (поскольку именно логика и подлежит определению). Например, основное правило вывода modus ponens (если A истинно и из A следует B, то B также истинно) есть ничто иное, как прямое интуитивное усмотрение. По существу оно означает, что с помощью логики можно изучать только те миры, в которых никогда не нарушаются причинно-следственные связи. То, что наш мир именно такой - эмпирический опытный факт, подобный тем, на основе которых формулировались фундаментальные законы физики. Как к любому опытному факту, к нему следует относиться лишь с некоторой долей уверенности, другое дело, что эта уверенность может быть очень велика.

Аксиоматический подход к построению теоретической науки только сегодня кажется естественным и почти единственно возможным. Приведённые выше отрывки из многовекового спора о значении логики и интуиции говорят о том, с какими усилиями эта точка зрения доказывала свой приоритет. Она представляет собой наиболее разумный компромисс между безграничным доверием к интуиции и желанием абсолютно всё подчинить строгой логике. В аксиоматическом подходе интуитивные представления о некоторых объектах и их взаимосвязях формализуются в виде определений и постулатов. Только на этом этапе в теорию может быть внесена ошибка или неточность. Результатам теории можно доверять ровно в той же степени, что и исходным интуитивным положениям и способу их формализации.

Такой взгляд, как легко видеть, отвергает тезис о всеобщем и необходимом характере математического знания, господствовавший в умах математиков и философов XVII века. Современные философы придерживаются более реалистичной точки зрения. Например, К.Поппер полагает, что задача точных наук сводится к тому, чтобы предлагать строгие методы для работы с нестрогими исходными предположениями. "Эмпирический базис науки - не "абсолют", наука не строится на гранитном основании. Смелые конструкции её теорий возвышаются над болотом и опираются на сваи, которые уходят в топь, но никогда не достигают основания". Исходные предположения поставляются интуицией, они описывают реальность лишь с некоторой точностью, их истинность всегда остаётся в той или иной степени делом веры. "Теория - сеть, которую мы забрасываем, чтобы уловить "мир", чтобы рационализировать, объяснить его и господствовать над ним. Мы трудимся для того, чтобы сделать ячейки сети всё более мелкими", - утверждает К. Поппер.

Фундаментальная интуиция как раз и является тем инструментом, который позволяет с каждым шагом всё глубже проникать в тонкости устройства мира, "делать ячейки сети всё более мелкими". Ещё одна важная особенность этого типа интуиции усматривается из следующего наблюдения.

Наиболее удивительным кажется то, что абстрактные математические конструкции, изобретённые изначально только затем, чтобы продемонстрировать гибкость ума, очень часто становятся исключительно плодотворными в естественных науках, в частности, физике. Стоит упомянуть комплексные числа, используемые почти повсеместно; кватернионы, нашедшие применение для описания механики твёрдых тел; гильбертовы пространства, на языке которых говорит вся квантовая механика.

В этих примерах фундаментальная интуиция не была настроена на получение того или иного формализма. Случилось обратное - готовая математическая теория оказалась пригодной для описания некоторого реального явления. Многие учёные считают это своего рода чудом, необъяснимым феноменом. Вот мнение группы французских математиков, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки: "То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь - это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого, и, быть может, мы их никогда и не узнаем". Известный американский физик Е. Вигнер в статье "Непостижимая эффективность математики в естественных науках" отмечает: "...математическая формулировка получаемых физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений". Пытаясь дать объяснение этому факту, Вигнер указывает на общую черту математических и физических теорий - а именно, обладать содержательностью и известным изяществом. Каким образом это приводит к "непостижимой эффективности математики", станет ясно чуть ниже. Сейчас же обратим внимание на важное свойство фундаментальной интуиции.

Фундаментальная интуиция позволяет чувствовать не только сущность того или иного явления, но и содержательность, изящество аксиоматической теории самой по себе. Приведём ещё одно высказывание Вигнера. "Новые понятия математик вводит именно так, чтобы над ними можно было производить хитроумные логические операции, которые импонируют нашему чувству прекрасного сами по себе и по получаемым с их помощью результатам, обладающим большой простотой и общностью". Общезначимым для всей математики является тот факт, что интересные результаты (красивые по своей простоте и разнообразные по сути) можно получить лишь тогда, когда на введённые абстрактные объекты наложено в некотором смысле оптимальное количество ограничений. Слишком слабые ограничения приводят к чрезмерной общности, при которой "ещё почти ничего нельзя сказать". Слишком сильные ограничения заставляют эти объекты вырождаться, приобретать малоинтересные патологические формы, либо вообще приводят к противоречиям.

Набор ограничений должен представлять собой некий компромисс, чтобы в итоге получились содержательные результаты. И вот, оказывается, что таких наборов, приводящих к существенно разным результатам, бывает, как правило, не так уж много. Это опытный факт, подтверждаемый всем развитием математической науки. Именно отсюда и вытекает то, что для физических теорий очень часто “случайно” находят их математический эквивалент или в худшем случае ряд полезных конструкций. Просто по-настоящему содержательных аксиоматических логических конструкций существует не так уж много (то есть их всё же много, но могло бы быть гораздо больше), и кое-какие из них нам уже известны.

Тонкая и не сразу заметная роль фундаментальной интуиции в математике заключается в умении почувствовать, какую оптимальную совокупность ограничений следует наложить на данные абстрактные объекты, чтобы получить наиболее интересные результаты.

3. Творческая интуиция

По остроумному замечанию Д. Прайса, творчество проявляется тогда, когда со словом “чёрное” вопреки привычной ассоциации связывают не слово “белое”, а слово “икра”.

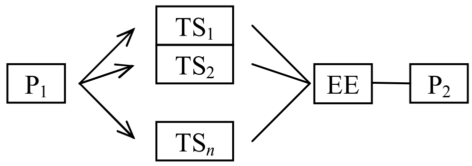
Творчество - это прежде всего умение найти нечто принципиально новое, отличающееся от всего того, что уже было. Знание - хороший помощник в этой работе. Оно поможет избежать повторений, даст некоторые аналогии, натолкнёт на мысль. Но этого не достаточно. По замечанию Ф. Клейна “усвоение дедуктивной логики построения теорий не может помочь в получении новых результатов”. А. Пуанкаре утверждает, что “...для того, чтобы создать геометрию или какую бы то ни было науку, нужно нечто другое, чем чистая логика. Для обозначения этого другого у нас нет иного слова, кроме слова “интуиция””. Известный математик и замечательный педагог Джордж Пойя также считает, что в царстве чистой логики при создании новых идей определяющей оказывается всё-таки интуиция: “Вы должны догадаться о математической теореме, прежде чем вы её докажете; вы должны догадаться об идее доказательства, прежде чем вы его проведёте в деталях ... доказательство открывается ... с помощью догадки”.

Попытка раскрытия тайн творческого мышления привела американских исследователей Д. Маклейланда и У. Уайта к выводу о первостепенной значимости профессиональной компетентности учёного, его общей и научной эрудиции. Другие склонны полагать, что творчество предопределяется случаем, и именно “случайные” открытия составляют истинный прогресс в науке. Это мнение обычно подкрепляют доводом, что в сознании, не фиксированном на устоявшихся концепциях и принятых догмах, с большей вероятностью могут родиться действительно новые идеи. В то же время Ж. Адамар считает: “предположить, что открытия в науке есть дело случая равносильно предположению о том, что обезьяна, постукивающая по клавишам пишущей машинки может “случайно” воспроизвести текст американской Декларации о независимости”.

Каков же на самом деле механизм творческого мышления, мнения о котором столь противоречивы, даже у людей, регулярно этот механизм использующих? Как взаимодействуют при этом логика и интуиция? Возможно ли, хотя бы в общих чертах, понять его сущность и заставить работать более эффективно?

Адамар не совсем прав. Продолжая его образную аналогию, можно сказать, что если мы посадим десять тысяч обезьян за пишущие машинки и в течение года некий оракул будет отбирать из всей их печатной продукции наиболее осмысленные строчки, то вполне вероятно, что полученные полстраницы будут напоминать связный текст. Несмотря на это он будет оставаться текстом, напечатанным обезьянами. Нечто подобное происходит и в научном творчестве.

Наибольшее развитие эта идея получила в неодарвинистской доктрине К. Поппера, предложившего для описания творческого процесса следующую структуру. Пусть имеется некоторая исходная проблема P_1. Исследователь начинает выдвигать гипотезы, или предположительные решения, стремясь разрешить проблему. Поппер отказывается подробно рассматривать процесс выдвижения гипотез, считая его случайным, недетерминированным. Раскрытие его механизмов он считает задачей эмпирической психологии, “наука здесь бессильна” - говорит он.



Затем полученные предположительные теории $TS_1,...,TS_n$ начинают сравниваться и проверяться на непротиворечивость. Эту процедуру он называет элиминацией ошибок EE или естественным отбором. В то время как механизмы порождения гипотез интуитивны и до конца не ясны, элиминация ошибок основывается только на логических рассуждениях и состоит, как правило, в целенаправленном поиске противоречий и слабых мест предполагаемых решений. Как правило, гипотеза, прошедшая через стадию отбора, всё же не идеальна. Поэтому она приводит к возникновению новой проблемы P_2, но уже на более высоком уровне, и к ней должна быть применена та же самая схема (см. рис.). Изобретая теорию, исследователь движется по кругу или, вернее сказать, по спирали.

Легко усмотреть в описанном процессе аналогию со случайными мутациями и естественным отбором в теории Дарвина. Сам же Поппер отмечает: “Рост знания - не процесс упражнения и накопления, а процесс элиминации заблуждений. Это скорее дарвиновский отбор, чем ламаркистское упражнение”. Наиболее отчётливо идея естественного отбора гипотез звучит в следующем изречении А.Эйнштейна: “В течение двух лет, предшествовавших 1916 г., когда появилась общая теория относительности, у меня в среднем возникала одна идея каждые две минуты и, конечно, я отвергал эти идеи”.

Излагая свою концепцию, Поппер говорит о “проблемах” и “теориях”, предназначенных для их решения, и может сложиться ощущение, что предлагаемая схема годится только для описания крупных, глобальных шагов в науке, связанных со сменой одних теорий другими. Но конструкция Поппера гораздо более универсальна. Её ценность заключается в том, что она воплощает в себе идею самоорганизации. Она применима к творческому процессу создания как всей теории, так и любой её части, одной теоремы, и даже отдельных шагов доказательства. Каждое частное решение TS_i имеет тенденцию раскрываться вглубь по той же самой схеме, если только оно уже не сводится к простым логическим шагам и действительно содержит в себе какие-то новые (только уже более “мелкие”) проблемы. Таким образом, в схеме Поппера усматривается ещё и скрытая иерархичность творческого процесса.

А. Пуанкаре также признаёт исключительную роль отбора в творческой деятельности, но пытается глубже разобраться в том, как именно происходит генерация идей и предположений. “Математическое творчество заключается не в создании новых комбинаций с помощью уже известных математических объектов. Это может сделать мало ли кто; но число комбинаций, которые можно найти этим путём, было бы бесконечно ... Творчество состоит как раз в том, чтобы не создавать бесполезных комбинаций, а строить такие, которые могут оказаться полезными; а их ничтожное меньшинство. Творить - это отличать, выбирать”. Пуанкаре считает, что подавляющая часть возможных комбинаций отвергается мгновенно за счёт того, что они просто не генерируются. “Бесплодные комбинации даже и не представляются уму изобретателя”.

Пуанкаре отводит особую роль в процессе порождения полезных комбинаций скрытой подсознательной работе. Непременным условием её продуктивности является предшествующий ей и следующий за ней период сознательной деятельности. Сначала исследователь пытается целенаправленно решить возникшую проблему. Как правило, такие попытки требуют определённых усилий воли и заканчиваются неудачей. Однако они, по мнению Пуанкаре, позволяют почувствовать задачу, обозначить приблизительный круг вопросов, имеющих к ней хоть какое-то отношение, и, наконец, “пустить в ход машину бессознательного”. Подсознание начинает работать автономно, исследователь может даже вовсе отвлечься от интересовавшей его проблемы. Во время этой скрытой работы генерируется огромное число комбинаций, однако большая их часть не привлекает наше внимание и даже не переходит в сознание. Нужное решение приходит внезапно, иногда подсказанное какой-то случайной аналогией. Оно обычно характеризуется краткостью, внезапностью и непосредственной убеждённостью в его истинности. Однако зачастую оно оказывается неверным. Идеи, порождённые подсознанием, всегда требуют проверки; эта проверка и составляет заключительный сознательный этап творческой деятельности.

Пытаясь понять, почему в подсознании выделяются только наиболее плодотворные идеи, Пуанкаре высказывает следующее предположение. Он считает, что привилегированными в подсознании становятся те явления, которые способны оказать наибольшее воздействие на нашу способность к восприятию. Только в этом случае они смогут проникнуть в сознание. Поэтому активизироваться будут лишь те комбинации, те математические предметы, которые способны вызвать своего рода эстетические эмоции, подействовать на наше чувство изящного. “Это те предметы, элементы которых расположены так гармонично, что ум без труда может охватить целое, проникая в то же время и в детали”. Косвенное подтверждение такой точке зрения Пуанкаре видит в том факте, что в случае ошибки “почти всегда ложная идея, будь она верна, была бы приятна нашему естественному инстинкту математического изящества”.

Приведём в этой связи объяснение, которое даёт Сальвадор Дали своему творческому методу “параноидно-критической деятельности”. “Вот уже более тридцати лет, как я изобрёл его и применяю с неизменным успехом, хотя и по сей день так и не смог понять, в чём же этот метод заключается. В общем и целом его можно было бы определить как строжайшую логическую систематизацию самых что ни на есть бредовых и безумных явлений и материй с целью придать осязаемо творческий характер самым моим опасным навязчивым идеям”.

Примечательно, что математик и художник указывают по существу на один и тот же механизм творчества, причём замечают, что им самим он ещё до конца не ясен. Он заключается в том, что каким-то образом (в сознании или подсознании - в конечном счёте не так уж важно) генерируются идеи, которые способны наиболее сильно воздействовать на наше восприятие. Первоначальный отбор этих идей происходит по критериям красоты, гармоничности, неожиданности, простоты, нетривиальности или каким-либо иным в этом роде. Отбор происходит мгновенно за счёт того, что все остальные идеи или комбинации просто не возникают. Они отсеиваются автоматически уже на этом первом этапе. Затем происходит строгая логическая систематизация и проверка истинности полученных идей, в результате которой отбраковываются ложные идеи. Этот второй этап в точности соответствует схеме К. Поппера.

Своеобразное подтверждение бессознательной основы творческого мышления дают ещё и такие два довода.

Некоторые учёные, например Пуанкаре и Гельмгольц, утверждают, что наибольшее число идей приходит им в голову утром во время пробуждения, когда они пребывают в полусонном состоянии. Эти идеи, как правило, наиболее неожиданны, и в то же время гораздо чаще оказываются ложными. В полусознательном состоянии идеи начинают генерироваться активнее, но их “качество” не становится выше - они даже в большей степени нуждаются в проверке. Использование такого состояния имеет свои за и против. С одной стороны, частично снимается контроль сознания со всеми его догмами и стереотипами, с другой, порождается слишком много “бредовых” идей.

Второй довод принадлежит А. А. Налчаджяну, указавшему на аналогию творческой деятельности с некоторыми видами психических заболеваний, при которых подсознание существенно вытесняет сознание: “Имеется нечто общее в механизмах творческого подъёма и эпилептического разряда. При творческом порыве и во время эпилептического разряда возбуждение одновременно охватывает достаточно широкие корковые и подкорковые образования. Это является основой творческого синтеза... Вероятно, наиболее близка к творчеству по своим физиологическим механизмам такая разновидность эпилептического припадка, как дремотное (иллюзорное) состояние”.

Ещё один подход к проблеме творческой интуиции предлагает Дж. Пойя. В целом он стоит на тех же позициях неоспоримой роли самоорганизации, что Пуанкаре и Поппер: “В типичном случае исследование состоит в создании многих предположений, опровержении большей части из них и сохранения нескольких”. Однако он не склонен списывать на подсознание загадочный процесс, состоящий в возникновении новых идей. Вместо этого он на огромном числе примеров показывает, как отыскивать решения математических проблем с помощью правдоподобных (нестрогих) рассуждений. Он предлагает методику, состоящую из ряда схем правдоподобных рассуждений, чем-то напоминающих обычные правила вывода в логике. Но в отличие от последних такие рассуждения служат не для доказательства, а для целенаправленного поиска и подкрепления субъективной уверенности исследователя в тех или иных гипотезах.

Перечислим вкратце несколько основных разновидностей правдоподобных рассуждений. Согласно Дж. Пойя некоторое утверждение становится более правдоподобным, если:

a) верно его следствие, особенно, если это следствие само по себе, то есть без данной посылки, маловероятно;
b) верно аналогичное утверждение;
c) верны все его известные частные случаи;
d) не верно соперничающее утверждение, то есть такое, которое может и не быть отрицанием данного, но предназначаться для альтернативного объяснения того же явления.

По существу сама книга Пойя “Математика и правдоподобные рассуждения”, а также некоторые другие его работы, дают ответ на вопрос, каким образом можно научиться продуктивной творческой работе. Ответ, типичный для опытного педагога - на многочисленных примерах и упражнениях, поскольку невозможно в двух словах объяснить, что такое математическая аналогия, как её найти, и как выбирать направление, в котором следует вести цепочку правдоподобных рассуждений. Пойя - практик, его интересуют не столько теоретические объяснения механизмов интуиции, сколько выработка практических навыков. Он пытается ответить на вопрос “как это использовать?”, а не “что это такое?”

В концепции Пойя творческая интуиция состоит в умении правильно находить аналогию, выбирать направление нестрогих рассуждений и оценивать их правдоподобность. Эти умения можно выработать только путём многократных упражнений.

Интересную современную методику активизации творческой деятельности предлагает А. А. Зенкин. Суть её заключается в использовании быстродействия компьютера для выполнения рутинной работы по генерированию большого количества зрительных образов, отражающих самую суть исследуемой математической проблемы. Такой подход получил название “когнитивной интерактивной компьютерной графики” (когнитивной ИКГ). Замечая, что “графический образ является инструментом прямого воздействия на интуицию человека”, Зенкин утверждает: “... чтобы ИКГ-язык стал эффективным средством общения человека с исследуемой научной проблемой (а не только с ЭВМ, как мы к тому уже привыкли), необходимо, чтобы наш ИКГ-язык был способен *выражать содержание, смысл, суть* - именно абстрактно-математическую суть - такой проблемы, и при том в максимально наглядной графической форме”.

Для наглядной демонстрации этого общего принципа Зенкин применяет ИКГ при исследовании ряда задач теории чисел, в частности, классической проблемы Варинга. Предложенное им правило построения графического образа натурального ряда замечательно своей простотой, и в то же время может служить образцом эффективности ИКГ. Оно состоит в том, чтобы разбить натуральный ряд на отрезки равной длины L, расположить их друг под другом и вывести на экран компьютера в виде таблицы. Но в ячейках таблицы показываются не сами числа, а красный или зелёный квадратик - в зависимости от того, обладает данное число некоторым свойством или нет. Исследователь имеет возможность наблюдать, как изменяется эта картинка при изменении длины L или варьировании самого свойства.

Это кажется удивительным, но ИКГ-подход оказался необыкновенно продуктивным и помог не только обнаружить многие новые закономерности, но и привёл к существенным неклассическим обобщениям проблемы Варинга, сама постановка которых раньше просто не приходила в голову. Он также привёл к открытию ряда неизвестных ранее числовых множеств и позволил, наблюдая эти множества, сначала увидеть, а затем и строго доказать некоторые их интересные свойства.

Объясняя причину такой продуктивности, Зенкин замечает, что описанное правило построения графического образа, несмотря на свою простоту, отражает суть огромного большинства проблем, возникающих в теории чисел, а именно - соотношение между аддитивными и мультипликативными свойствами целых чисел. Но фундаментальную причину плодотворности когнитивной графики Зенкин видит в том, что она активизирует творческую интуицию, выполняя функцию генератора наглядных образов. “Часто только уверенность в конечном успехе дела позволяет исследователю преодолеть такие интеллектуальные и многие другие преграды, которые без соответствующего психологического настроя, порождаемого именно созерцанием предполагаемой закономерности, представляются просто непреодолимыми, и поэтому действительно не преодолеваются”.

Взгляды различных исследователей на творческую интуицию сходны в одном. Все они так или иначе указывают на наличие самоорганизации, при которой функцию естественного отбора выполняет логика. Однако не существует единого мнения о том, каким образом выдвигаются идеи-претенденты. Можно предполагать, что это случайный недетерминированный процесс; сознательное или подсознательное порождение ассоциаций, удовлетворяющих критериям изящества или неожиданности; наконец, специальные методики типа правдоподобных рассуждений или когнитивной графики. Во всех случаях в работу включается творческая интуиция, сущность которой до конца не ясна, но которая становится действенным инструментом в руках учёного.

4. Интуиция понимания

Проблема понимания существующих теорий ещё два-три века назад не представлялась хоть сколько-нибудь серьёзной в философском плане, её справедливо считали индивидуальной проблемой тех, кто решил заниматься наукой. В современной математике картина коренным образом изменилась. Огромное количество различных разделов и глубоко проработанных теорий делают невозможным для одного человека детально изучить весь этот объём знаний. Однако практика требует дальнейших исследований, для которых знание уже полученных результатов, их взаимосвязей и техники вывода просто необходимо. Многие учёные склонны находить в этом противоречии наступивший предел в научных исследованиях. “Возрастающее понимание того, что ограниченная ёмкость нашего разума устанавливает пределы в сфере науки, наиболее отчётливо проявляется в вопросах, которые нам приходится слышать ежедневно: “стоит ли проводить то или иное исследование?”” - отмечает Е.Вигнер. Подобный пессимизм вряд ли оправдан. Человеческий разум сам находит выход из этой ситуации, прибегая к интуиции.

Интересная особенность современного этапа развития точных наук заключается в том, что от исследователя гораздо чаще требуется понимание, чем точное знание тех или иных фактов. Банальной истиной звучит высказывание, что знание ещё не есть понимание, но, оказывается, в доскональном знании часто и нет необходимости. “Поверхностные” представления о тех или иных теориях на уровне основных идей представляются скорее рациональным отношением к собственным времени и памяти, чем невежеством. Зачастую достаточно, не вникая в детали логических цепочек, выделять основные идеи, понимать содержательную суть решаемых проблем и скрытые “движущие пружины” предлагаемых решений. Умение довести при необходимости эти идеи до строгих логических построений считается уже чем-то само собой разумеющимся, однако далеко не всегда такая необходимость действительно возникает.

Невозможно сказать точно, что именно следует понимать под математическими идеями, “скрытыми пружинами” теории или отдельного доказательства. Совершенно ясно, что они не имеют никакого отношения к миру идей Платона. Здесь это понятие лишено идеалистической окраски, оно становится конструктивным и даже почти объективным, поскольку мнение математиков о том, что “в данном доказательстве заложены такие-то идеи”, бывает, как правило, единогласным. Раскрыть их порой довольно трудно. Стоит привести высказывание Пуанкаре по поводу доказательства известной теоремы Гильберта-Варинга из теории чисел: “если когда-нибудь будут поняты основные движущие пружины этого доказательства, то, вероятно, арифметические результаты большого значения посыплются как из рога изобилия”. Действительно, решение Гильберта послужило отправной точкой для создания математического аппарата современной аналитической теории чисел и в конечном итоге метода тригонометрических сумм академика И. М. Виноградова. Однако это произошло лишь через 10-15 лет спустя опубликования работы Гильберта.

По наблюдению Пуанкаре нет ничего удивительного в том, что подавляющее большинство людей не способны к математическому творчеству и автоматическому запоминанию доказательств. Однако, удивительно, что “не всякий может понимать математическое рассуждение в тот момент, когда ему его излагают”. Корень зла, по мнению Пуанкаре, заключается в несовершенстве человеческой памяти. “Между моментом, когда мы в первый раз встретили какое-нибудь предложение, и тем моментом, когда мы вновь с ним встречаемся как с посылкой некоторого силлогизма, иногда проходит много времени, в течение которого были развёрнуты многочисленные звенья цепи; и вот может случиться, что за это время мы либо вовсе забыли это предложение, либо, что ещё хуже, забыли его смысл... Специальная способность к математике должна обусловливаться очень верной памятью или скорее необычайной напряжённостью внимания”. Однако сам же Пуанкаре признаётся, что “не способен сделать без ошибки сложение”. Тогда в чём же секрет его успеха как математика? Оказывается, что не столько верная память, сколько развитая интуиция позволяют математику разбирать сложные логические построения. Его памятью обычно руководит общий ход рассуждения. “Математическое доказательство представляет собой не просто какое-то нагромождение силлогизмов: это силлогизмы, расположенные в известном порядке... Если я обладаю чувством, так сказать, интуицией этого порядка, так что могу обозреть одним взглядом все рассуждения в целом, то мне не приходится опасаться, что я забуду какой-нибудь один из элементов; каждый из них сам по себе займёт назначенное ему место без всякого усилия памяти с мой стороны.” Иными словами, вместо того, чтобы запоминать доказательство, учёный запоминает *порядок*, то есть схему расположения основных идей, а восстановить по ним само доказательство - дело техники.

Далеко не всегда идея может быть выражена формально, оформлена в виде теоремы или леммы (вспомогательного утверждения). Часто она состоит в неожиданном повороте мысли, в том, чтобы применить в нужном месте нужную формулу или нужное дополнительное построение, с первого взгляда неожиданное. Часто автор, стеснённый рамками формального изложения, не имеет возможности сказать, что именно этот переход или именно эта конструкция даёт ключ к решению. Правильное выделение идей редко и лишь в простейших случаях сводится к обычному разбиению на пункты-подпункты. Это скорее искусство или навык, дающийся трудом и многократными упражнениями. Возможно, оно состоит в том, чтобы обнаружить тот момент в доказательстве, где “произошло решение” или был сделан существенный шаг на пути к нему. Причём ключевых идей должно быть не слишком много, чтобы их ещё можно было, по выражению Пуанкаре, “обозреть одним взглядом”.

Современные психологические исследования установили, что количество чего бы то ни было (вещей, неких абстракций, пунктов, идей, ...), которое человек может одновременно удерживать в уме, не теряя целостности всей картины, не превышает в среднем семи. Это означает, что основная схема теории или доказательства может состоять лишь из небольшого числа основных идей. Только в этом случае исследователю будет удобно думать о ней, манипулируя её составными частями, и, в то же время, не теряя целостного представления. Однако содержательные логические построения как правило более сложны и такое упрощённое представление было бы неадекватным и приводило бы к ошибкам. Эти основные идеи составляют только лишь верхний уровень, наиболее яркие ключевые шаги, “скелет” логических построений. Каждая из них требует дальнейшего уточнения, и для её понимания в ней также следует выделить небольшое число основных моментов. Таким образом, выделяются идеи второго уровня, затем третьего, и так далее. В конце концов мы приходим к некоторой иерархии (дереву) идей. Листьями, или, как говорят, терминальными вершинами, этого дерева являются собственно силлогизмы, строгие логические утверждения. Пройдя по всем терминальным вершинам в порядке их возникновения, и не затрагивая верхних уровней, мы могли бы получить строгое формальное изложение теории, состоящее из одних лишь силлогизмов. Глубина интуитивного понимания теории определяется тем, сколько первых (верхних) уровней описанной иерархии сохраняются в памяти. Подобное понимание может быть достаточно поверхностным, если оно содержит небольшое число уровней. Тем не менее, оно остаётся целостным, поскольку охватывает всю теорию. Если идеи всегда выделялись правильно, и действительно отражали “содержательную суть”, “скрытые пружины”, упрощённое интуитивное понимание теории может быть достаточно адекватным. Оно уже позволяет не только самостоятельно проходить некоторые ветви дерева до конца (до силлогизмов), но и заимствовать введённые в этой теории конструкции, применять при других обстоятельствах её приёмы, подмечать аналогии, манипулируя на уровне идей.

Формальное изложение теории всегда линейно, оно представляет собой цепочку силлогизмов. Адекватное интуитивное представление, существующее в сознании исследователя, всегда иерархично и основано на субъективном понятии математической идеи. Излагая формально, автор разворачивает свою иерархию в последовательность утверждений. Существо самой теории, истинность и строгость изложения при этом ни сколько не проигрывают, скорее наоборот, а вот структура интуитивного понимания полностью утрачивается. Интуиция понимания заключается, следовательно, в том, чтобы уметь правильно восстанавливать утраченную иерархию. Это умение складывается из двух компонентов - выделения идей, то есть по-настоящему решающих моментов доказательств, и реконструирования в своей памяти иерархии этих идей или хотя бы нескольких её верхних уровней.

Приведённые рассуждения наводят на заманчивое предложение так и излагать математические результаты - в явном виде воспроизводя иерархию и пытаясь именно её донести до сознания другого человека. На самом деле это было понято многими и давно. Успех лектора или популяризатора науки как раз и определятся тем, насколько ему удаётся явно или неявно это сделать. Не имея возможности останавливаться на вопросах методологии, укажем в качестве примера “Теорию катастроф” в изложении В. И. Арнольда. Не вводя никакого формализма и практически не прибегая к формулам, а обращаясь лишь к интуиции, он, тем не менее, успешно обосновывает и даже почти строго доказывает некоторые достаточно абстрактные утверждения.

Ещё один взгляд на проблему понимания предлагает К. Поппер. Для него это специфическая проблема исторического знания. Понять теорию - значит выявить проблемы, решение которых она даёт. Но современные теории часто оперируют объектами, в значительной степени абстрагированными от исходных проблем. Отсюда Поппер делает радикальный вывод: “Всякая попытка понять теорию обязательно выливается в историческое исследование об этой теории и её проблеме”. Этот вывод выглядит несколько экстравагантно, однако, слова “историческое исследование” можно понимать не только в буквальном смысле, но и более широко, имея в виду некие наводящие соображения, или тот кратчайший путь, по которому можно было бы пройти, чтобы “сгенерировать” основные идеи и положения теории. При этом не важно, был ли на самом деле этот путь пройден именно таким способом.

Можно привести в качестве примера рассуждения Дж. Пойя по поводу доказательства одной не совсем элементарной теоремы. Само доказательство состоит, по существу, из двух шагов и занимает не более половины страницы. На первом шаге вводится достаточно простая конструкция, хотя совершенно не ясно, почему именно такая. Это искусственное построение и является ключевой идеей. На втором шаге путём обычных преобразований выводится собственно результат (некое неравенство). Сам Пойя так описывает ожидаемую реакцию своего читателя: “Он [первый шаг] внезапно появляется из ничего. Он выглядит таким произвольным. Он не имеет никакой видимой мотивировки или цели... Возможно, автор знает цель этого шага, но я её не знаю, и поэтому не могу следовать за ним с доверием”. Затем Пойя на пяти страницах описывает тот путь проб, ошибок и правдоподобных рассуждений, которые и привели его в конце концов к этой конструкции. После такого “исторического исследования” идея доказательства, его “движущие пружины” становятся понятны. Однако подобный рассказ нельзя считать в прямом смысле слова “историческим”. Во-первых, потому что эта “история” есть достояние одного-единственного человека; а во-вторых, потому, что сам же автор признаётся, что ему пришлось несколько изменить, “рационализировать” изложение шагов, которые привели его к цели. Скорее всего, истинная “история” содержала гораздо больше тупиковых ответвлений и лишних пробных шагов.

В приведённой интерпретации выражения “историческое исследование” попперовский вывод выглядит почти безупречно. Тем не менее, далеко не во всех случаях изложение истории поисков даёт кратчайший путь к пониманию самого решения. Поэтому один лишь принцип историзма в гордом одиночестве не способен решить проблему интуитивного понимания научных теорий. Было бы более разумным придерживаться такого правила. Если исторический экскурс или объяснение того, как был найден тот или иной результат, достаточно лаконичны, их можно привести, добиваясь понимания. Но если его можно достичь прямым изложением идей, последний способ предпочтительнее как более естественный.

Как показывает практика, лёгкость понимания логических построений существенно зависит от стиля изложения. В идеале оно должно быть строгим, но в то же время психологичным, ориентированным на особенности восприятия. Не претендуя ни на бесспорность, ни на полноту, рискнём привести несколько принципов такого стиля.

1. Чередовать строгие построения с утверждениями, апеллирующими к интуиции. Каким-то образом делать разграничение между ними, чтобы невозможно было спутать одно с другим. Апелляция к интуиции должна быть яркой и лаконичной. Только в этом случае она усиливает ощущение красоты математики.

2. Указывать на ключевые идеи явно, а также на их уровень в иерархии. Одни могут быть очень существенны, а другие играть вспомогательную, подчинённую роль. Привлечь внимание к некоторому месту в логическом построении можно, придумав для него меткую метафору или даже афоризм. Тогда это место запомнится.

3. Можно рассказать о пути, который привёл к той или иной постановке задачи или искусственному построению (принцип Поппера).

4. Можно привести аналогии с другими логическими построениями или рассмотреть, как работает та же цепочка рассуждений в частных случаях (принцип Пойя).

5. Можно дать наглядную геометрическую интерпретацию или схему, обращённую к чувственной интуиции (принцип Клейна).

6. И всё же в основе должна оставаться строгая логика. Не стоит забывать, что составляет основное содержание, а что лишь позволяет адаптировать его к особенностям нашего восприятия.

Распространено мнение, что формальный подход к описанию логических построений хорош тем, что экономит время излагающего. Но не менее рационально, и даже более гуманно, экономить время понимающего. Ортодоксальная сухость изложения может, по-видимому, считаться признаком неуважения к тому, кто взялся в нём разобраться. Интуиция - это реальность, которой не следует пренебрегать; её следует с пользой эксплуатировать.

Список литературы

[1] Ирина Р.Р., Новиков А.А. В мире научной интуиции. М. 1978.
[2] Пуанкаре А. О науке. М. Наука. 1983.
[3] Асмус В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике. М. Мысль. 1965.
[4] Бунге М. Интуиция и наука. М. 1967.
[5] Грязнов Б.С. Логика, рациональность, творчество. М. 1982.
[6] Фурманова О.В. О соотношении логического и интуитивного в творческом процессе. // Вопросы философии. 1984. N7.
[7] Налчаджян А.А. Некоторые психологические и философские проблемы интуитивного познания. М. 1982.
[8] Пойя. Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М. Наука. 1975.
[9] Альтшуллер Т.С. Творчество как точная наука. М. 1979.
[10] Фейнберг Е.Л. Кибернетика, логика, искусство. М. 1981.
[11] Зенкин. А.А. Когнитивная компьютерная графика. М. Наука. 1991.
[12] Эйнштейн. А. Физика и реальность. М. 1965.
[13] Дали С. Дневник одного гения. М. Искусство. 1991.
[14] Арнольд В.И. Теория катастроф. М. МГУ. 1983.
[15] Вигнер Е. Этюды о симметрии. М. Мир. 1971.
[16] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., Л. 1937.
[17] Popper. K.R. Objective Knowledge. An Evolutionary Approach. Oxford. 1973.