

Российский университет дружбы народов
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Тютюнник Анастасия Александровна

**Символьно-численное исследование векторной модели
волноводного распространения электромагнитного
излучения**

по материалам диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

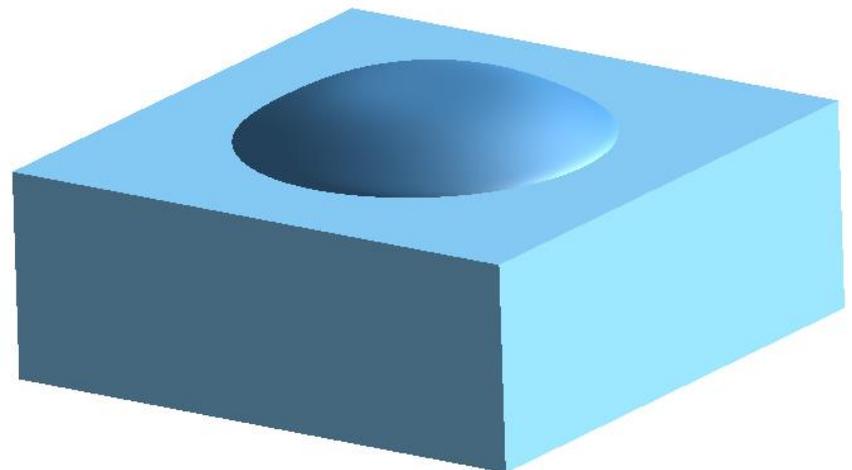
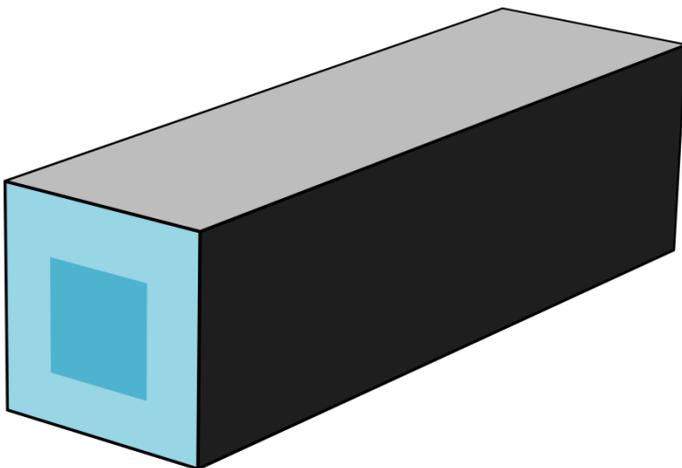
Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Севастьянов Леонид Антонович

Москва
28.11.2018

Объект моделирования

Оптический волновод - искусственный или естественный направляющий канал, в котором может распространяться волна оптического диапазона.

Предмет исследования – математическая модель распространения поляризованного электромагнитного излучения в волноводах с учетом векторного характера излучения.



Актуальность

На сегодняшний день хорошо изучены и описаны скалярные модели волноводов, в которых рассматривается двумерная структура волновода. Однако для элементов интегрально-оптических устройств, линейные размеры которых сопоставимы с длиной волны, двумерная модель является очень грубой и не дает полного представления о поведении электромагнитного поля в данных устройствах. Использование приближенной двумерной теории справедливо только для слабо направляющих структур и не подходит для описания нерегулярных оптических волноводов, у которых, диэлектрическая проницаемость функционально зависит от всех трех пространственных координат. Поэтому разработка и исследование полной векторной модели волновода является актуальной задачей.

Исследования

- Тихонов А.Н., Самарский А.А. – исследование векторной модели распространения волноводных мод в полом волноводе;
- Каценеленебаум Б.З., Шевченко В.В. – методы поперечных сечений;
- Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Делицин А.Л., Малых М.Д. – теорема о полноте системы нормальных мод, неполный метод Галеркина (закрытые волноводы);
- Дерюгин Л.Н., Комоцкий В.А., Марчук А.Н., Сотин В.Е. – теоретические и экспериментальные исследования открытых волноводов;
- Севастьянов Л.А., Егоров А.А., Севастьянов А.Л. – модель адиабатических волноводных мод (открытые волноводы);
- Малых М.Д., Севастьянов Л.А., Диваков Д.В. – исследование открытых волноводов в модели «ящика Дирихле».

Цель исследований

- На основе представления электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов разработать метод исследования распространения волноводных мод в волноводах, диэлектрическая проницаемость которых описывается произвольной кусочно-постоянной функцией в многомодовом режиме.
- Исследовать состоятельность разработанного метода путем проведения серии численных экспериментов.

Задачи

- Разработать метод вычисления нормальных мод закрытых волноводов в векторной постановке на основе сочетания представления электромагнитного поля при помощи четырех потенциалов и неполного метода Галеркина.
- На основе разработанного метода разработать символьно-численный алгоритм вычисления нормальных мод закрытых волноводов прямоугольного сечения с прямоугольными диэлектрическими вставками, реализовать его в виде программного комплекса.
- Провести серию численных экспериментов и исследовать состоятельность предложенного метода вычисления нормальных мод.
- Провести серию численных экспериментов и исследовать состоятельность предложенного метода в задачах дифракции на стыке двух волноводов.
- Провести серию численных экспериментов и исследовать состоятельность предложенного метода в задачах дифракции на протяженном теле, помещенном внутрь закрытого волновода.

Содержание

1. Математическая модель и методы ее анализа.
2. Задача о вычислении нормальных мод.
3. Задача о волноводной дифракции.

1. Математическая модель и методы ее анализа

Математическая модель волновода

Монохроматическое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -ik_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = ik_0 \mu \vec{H},$$

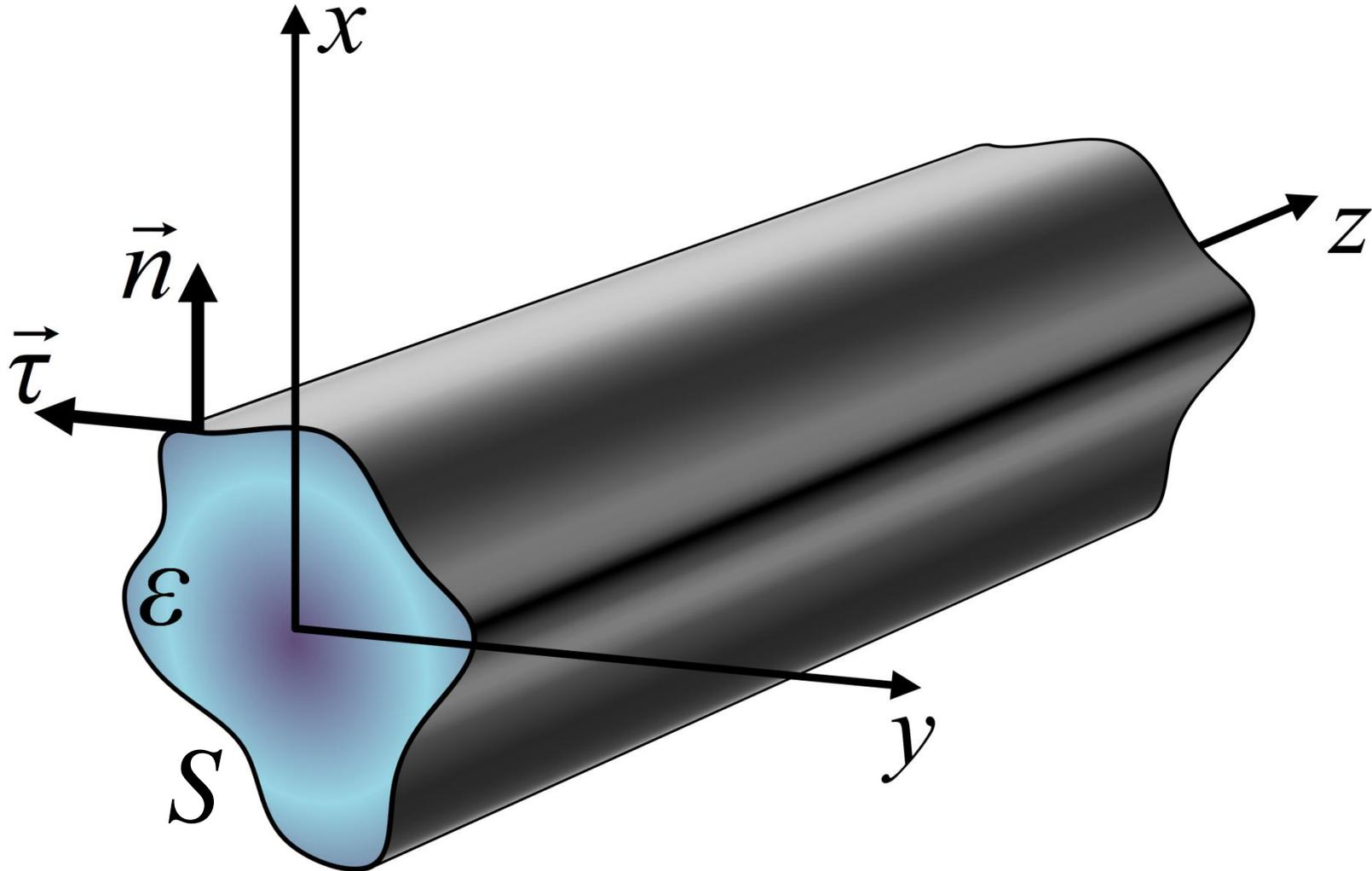
где k_0 - волновое число, ε, μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости;

и граничным условиям (условиям идеальной проводимости)

$$\vec{E}_\perp \times \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad E_z \Big|_{\partial S} = 0.$$

$$\vec{E}_\perp = (E_x, E_y), \quad \vec{H}_\perp = (H_x, H_y).$$

Геометрия задачи



$$\vec{E}_{\perp} \times \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad \vec{H}_{\perp} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad E_z \Big|_{\partial S} = 0.$$

Метод четырех потенциалов

Будем искать поля в следующем виде:

$$\vec{E}_{\perp} = \nabla u_e + \nabla' v_e, \vec{H}_{\perp} = \nabla u_h + \nabla' v_h,$$
$$E_z = -\frac{1}{ik_0 \varepsilon} \left(\text{rot } \vec{H}_{\perp} \right)_z, H_z = \frac{1}{ik_0 \mu} \left(\text{rot } \vec{E}_{\perp} \right)_z,$$

где u_h, u_e, v_h, v_e будем называть четырьмя потенциалами. Всякое поле представимо в таком виде **[теорема 1, 1]**.

$$\text{Здесь } \nabla = \left(\partial_x, \partial_y \right)^T, \nabla' = \left(-\partial_y, \partial_x \right)^T.$$

[1] Malykh M.D., Sevastianov L.A., Tyutyunnik A.A., Nikolaev N.E. On the representation of electromagnetic fields in closed waveguides using four scalar potentials. // Journal of Electro-magnetic Waves and Applications — 2018 — 32(7), 886-898.

Редукция уравнений Максвелла

Систему уравнений Максвелла можно представить в виде:

$$\begin{cases} \nabla' \left(\partial_z v_h - \frac{1}{ik_0 \mu} \Delta v_e \right) + ik_0 \varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik_0 \varepsilon \nabla u_e = \vec{0}, \\ \nabla' \left(\partial_z u_e + \frac{1}{ik_0 \varepsilon} \Delta u_h \right) - ik_0 \mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik_0 \mu \nabla v_h = \vec{0}. \end{cases} \quad (1)$$

Граничные условия Максвелла сводятся к условиям

$$u_e|_{\partial S} = u_h|_{\partial S} = 0, \quad \vec{n} \cdot \nabla v_e|_{\partial S} = \vec{n} \cdot \nabla v_h|_{\partial S} = 0.$$

Конечномодовая модель

Приближенное решение представляем в виде разложения по системе функций, удовлетворяющих граничным условиям.

$$\vec{W}(x, y, z) = \sum_j w_j(z) \vec{\varphi}_j(x, y), \quad (2)$$

$$\vec{W} = (v_h, v_e, u_e, u_h)^T.$$

Применяя неполный метод Галеркина, получаем систему ОДУ

$$\mathbf{B}(z) \frac{d\vec{w}}{dz} + ik_0 \mathbf{A}(z) \vec{w} + \frac{1}{ik_0} \mathbf{C}(z) \vec{w} = \vec{0}, \quad (3)$$

Элементы матриц **A**, **B** и **C**

Для системы функций $\{\vec{\varphi}_j\}$ элементы матриц **A**, **B**, **C** вычисляются по формулам:

$$a(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \iint_S \varepsilon (\nabla' \varphi_{j2} + \nabla \varphi_{j3}) \cdot (\nabla' \varphi_{i1} - \nabla \varphi_{i4}) dx dy + \\ + \iint_S \mu (\nabla' \varphi_{j4} + \nabla \varphi_{j1}) \cdot (\nabla' \varphi_{i2} - \nabla \varphi_{i3}) dx dy,$$

$$b(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \iint_S (\nabla' \varphi_{j1} \cdot \nabla' \varphi_{i1} + \nabla' \varphi_{j3} \cdot \nabla' \varphi_{i3} + \nabla \varphi_{j2} \cdot \nabla \varphi_{i2} + \nabla \varphi_{j4} \cdot \nabla \varphi_{i4}) dx dy,$$

$$c(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \iint_S \left(\frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i1}}{\mu} - \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i3}}{\varepsilon} \right) dx dy.$$

2. Задача о вычислении нормальных мод

Спектральная задача для регулярного волновода

Если заполнение не зависит от z , то матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} не зависят от z .

$$\mathbf{B} \frac{d\vec{w}}{dz} + ik_0 \mathbf{A} \vec{w} + \frac{1}{ik_0} \mathbf{C} \vec{w} = \vec{0}. \quad (4)$$

Решение ищем в виде нормальной моды:

$$\vec{w} = \vec{w}(x, y) e^{ik_0 \beta z}$$

Параметр β называют коэффициентом фазового замедления.

Задача на собственные значения

Для нормальных мод волновода получаем задачу на собственные значения

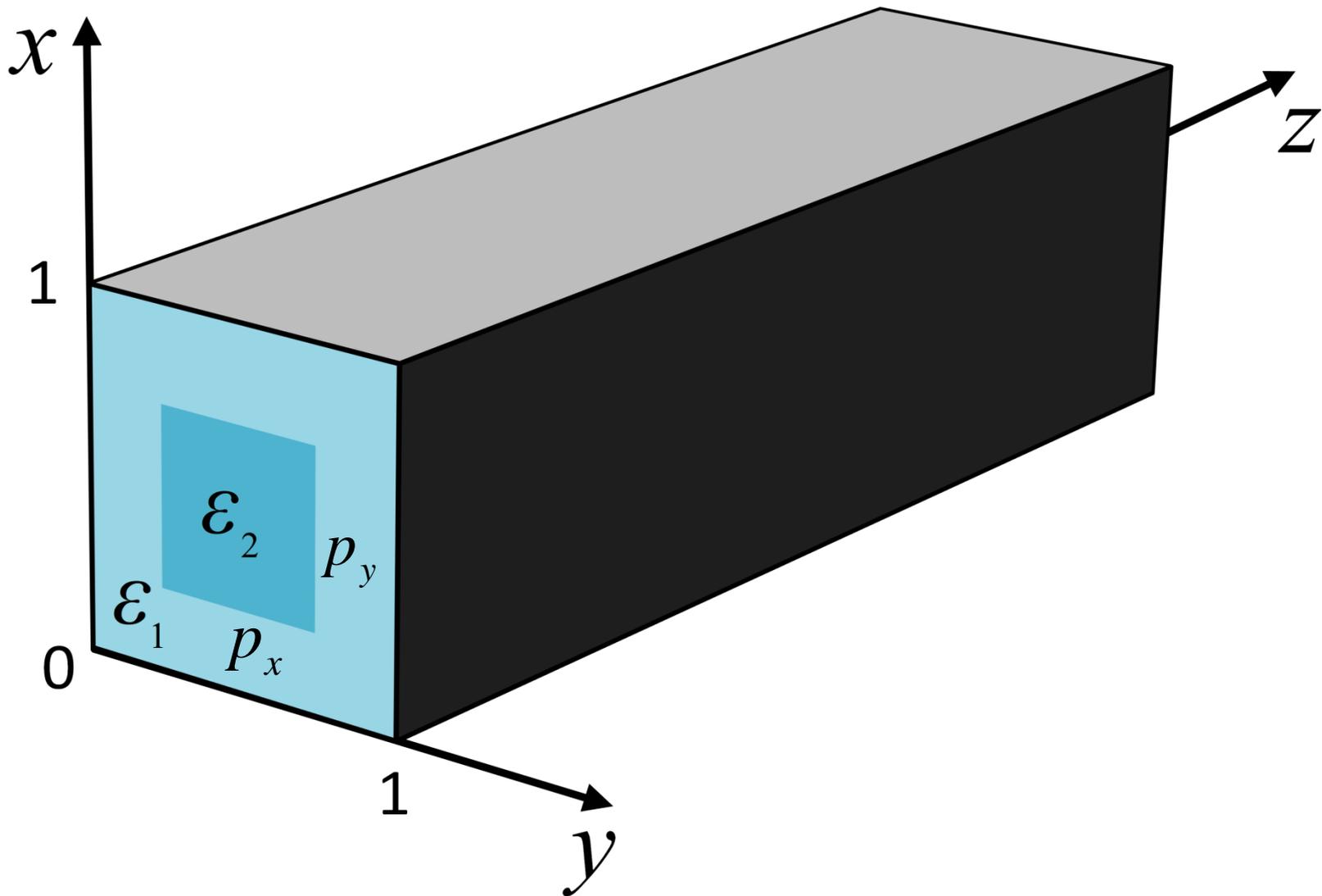
$$\mathbf{K} \vec{\psi} = \beta \vec{\psi} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{1}{k_0^2} \mathbf{C} \right) \quad (5)$$

Если ε, μ – вещественные, то β принимает либо вещественные, либо чисто мнимые значение.

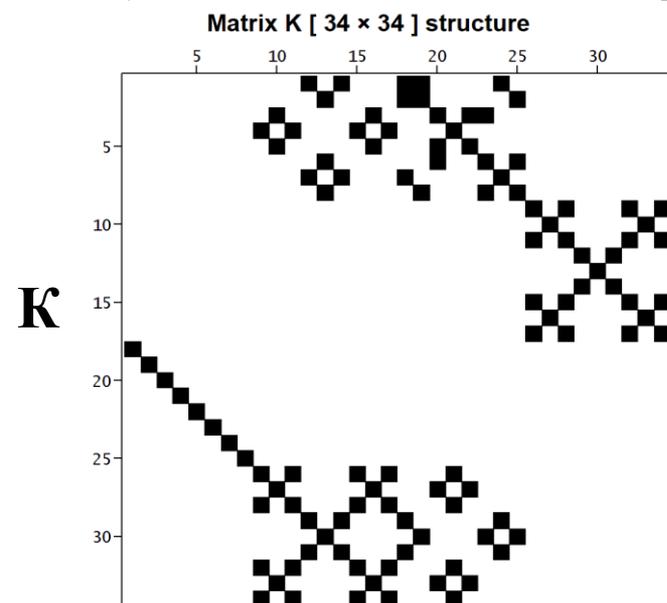
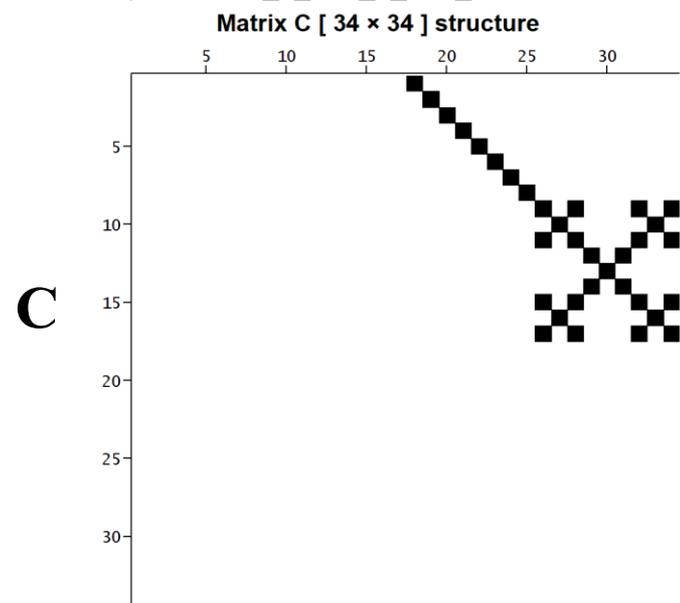
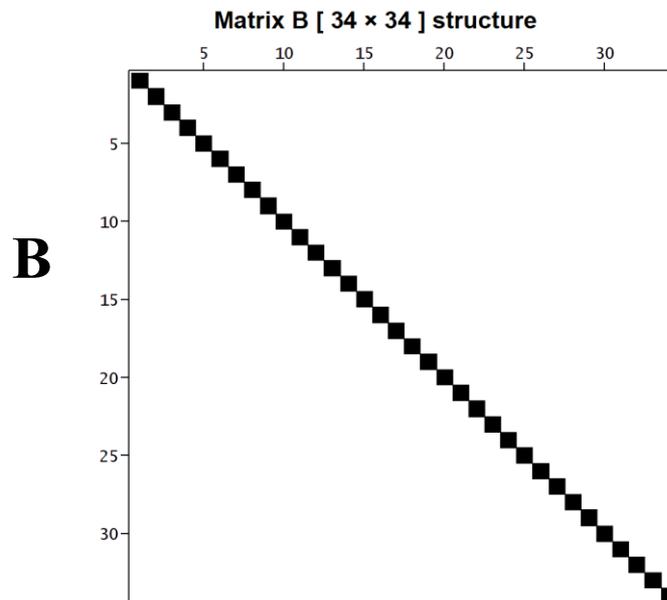
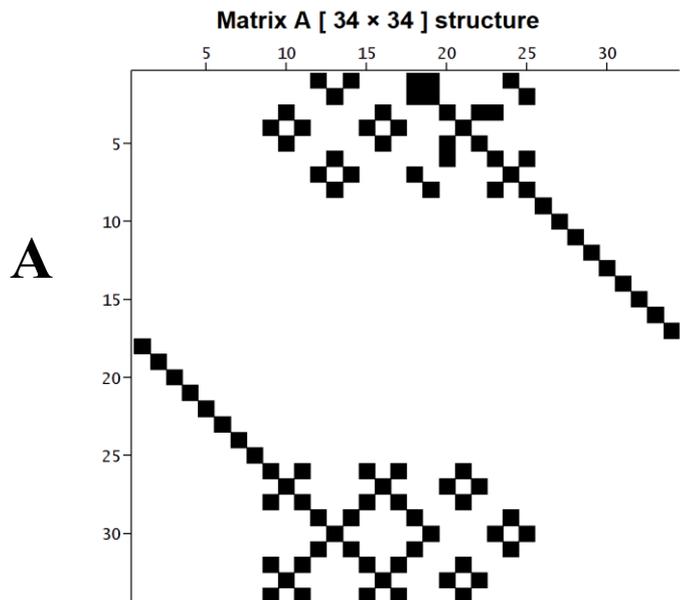
Вещественные β соответствуют распространяющимся модам.

Мнимые β соответствуют не распространяющимся модам.

Пример 1. Волновод со вставкой



Структура матриц A, B, C, K (dim = 34)



Сходимость собственных значений

Рассмотрим сходимость собственных значений β_j при увеличении числа базисных функций.

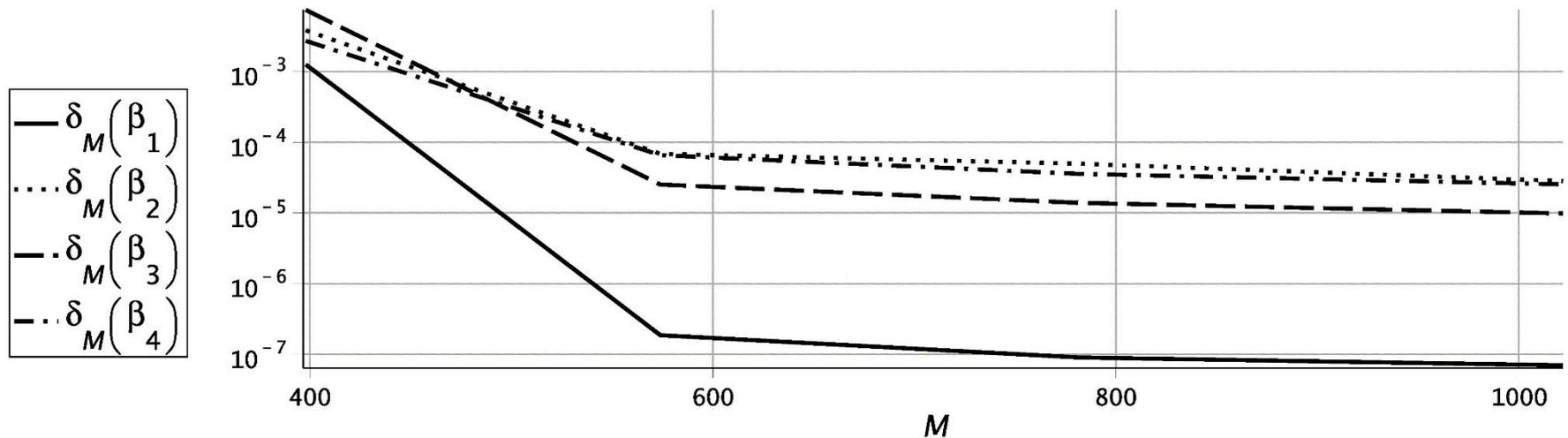


График относительной погрешности β_j ($p_x = p_y = 0,5$; $\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 3$)

Пример 2. Собственные значения полого волновода

Точные собственные значения:

$$\beta_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k_0^2}}, \beta_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{2\pi^2}{k_0^2}}.$$

Собственные значения, полученные в Maple:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0.777956183887432 \\ -0.777956183887432 \\ 0.458728294317579 \\ -0.458728294317578 \end{bmatrix}$$

Относительная точность:

$$\delta < 1.1 \cdot 10^{-10}$$

3. Задача о волноводной дифракции

Поле в регулярном волноводе

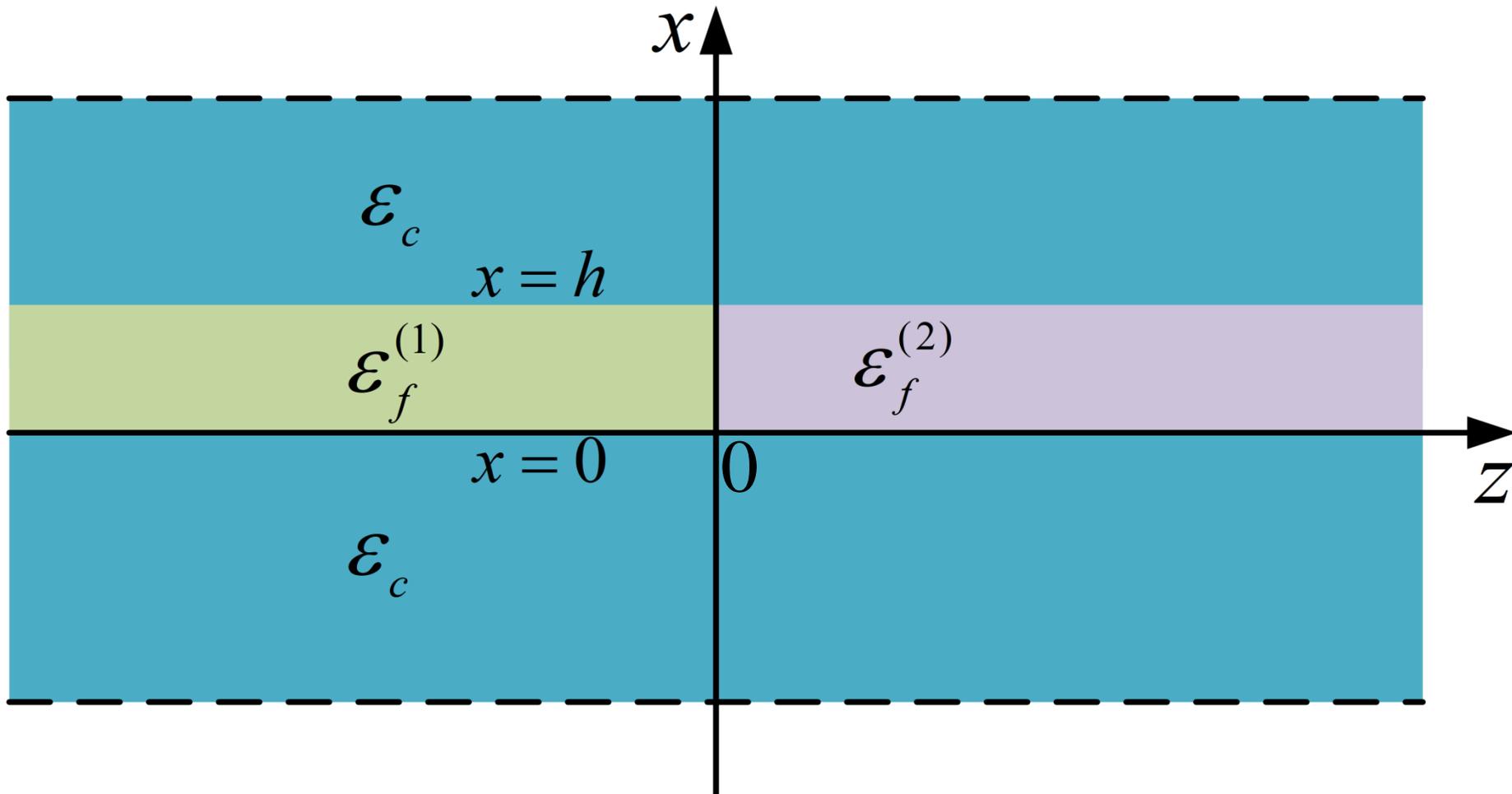
Пусть $\vec{w}_j e^{ik_0\beta_j z}$ нормальные моды. Тогда монохроматическое поле в волноводе можно представить в виде суперпозиции нормальных мод [2]:

$$\vec{W}(x, y, z) = \sum_j \vec{w}_j^+(x, y) e^{ik_0\beta_j^+ z} + \sum_j \vec{w}_j^-(x, y) e^{ik_0\beta_j^- z},$$

$$\operatorname{Re}(\beta_j^+) > 0, \operatorname{Re}(\beta_j^-) < 0.$$

[2] А. Л. Делицын. О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2011. - Том 51, № 10, с. 1883–1888

СТЫК ДВУХ ВОЛНОВОДОВ



Дифракция на стыке двух волноводов

Поле при $z < 0$ представимо в виде [3]:

$$\vec{W}(x, y, z) = A\vec{w}^{(1)}(x, y)e^{ik_0\beta_1^{(1)}z} + \sum_l R_l\vec{w}_l^{(1)}(x, y)e^{ik_0\beta_l^{(1)}z}.$$

Поле при $z > 0$ представимо в виде:

$$\vec{W}(x, y, z) = \sum_l T_l\vec{w}_l^{(2)}(x, y)e^{ik_0\beta_l^{(2)}z}.$$

[3] А.Г. Свешников, И.Е. Могилевский. Избранные математические задачи теории дифракции. – М.: Физический факультет МГУ, 2012. – 239 с.

Задача дифракции на стыке открытых планарных волноводов

Граничные условия:

$$[\vec{E}_\perp] = \vec{0}, \quad [\vec{H}_\perp] = \vec{0}.$$

Условие сопряжения полей:

$$A\vec{w}_1^{(1)} + \sum_j R_j \vec{w}_j^{(1)} = \sum_j T_j \vec{w}_j^{(2)}.$$

Число уравнений равно числу неизвестных, матрица системы не вырожденная, поэтому полученная система будет совместной.

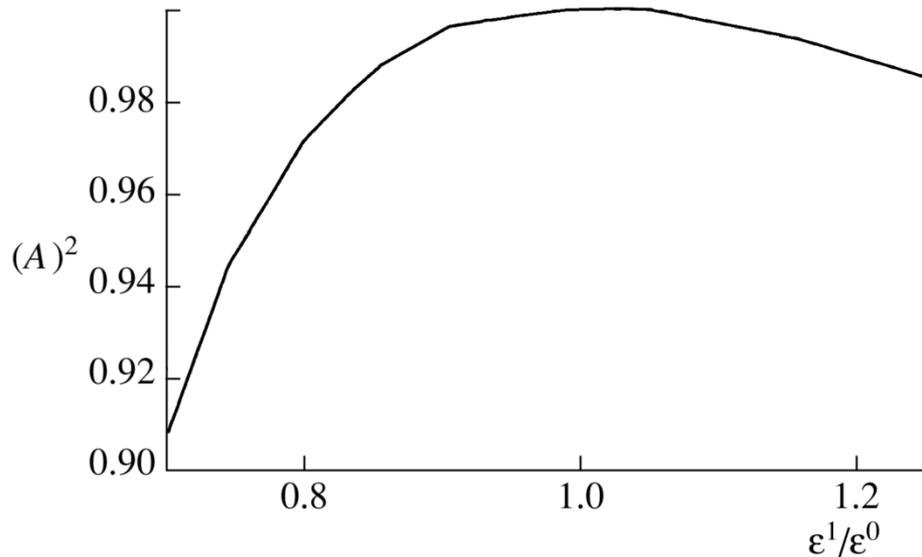
Открытые волноводы в «ящике Дирихле»

Для верификации будем сравнивать наши результаты с результатами, полученными для открытых систем.

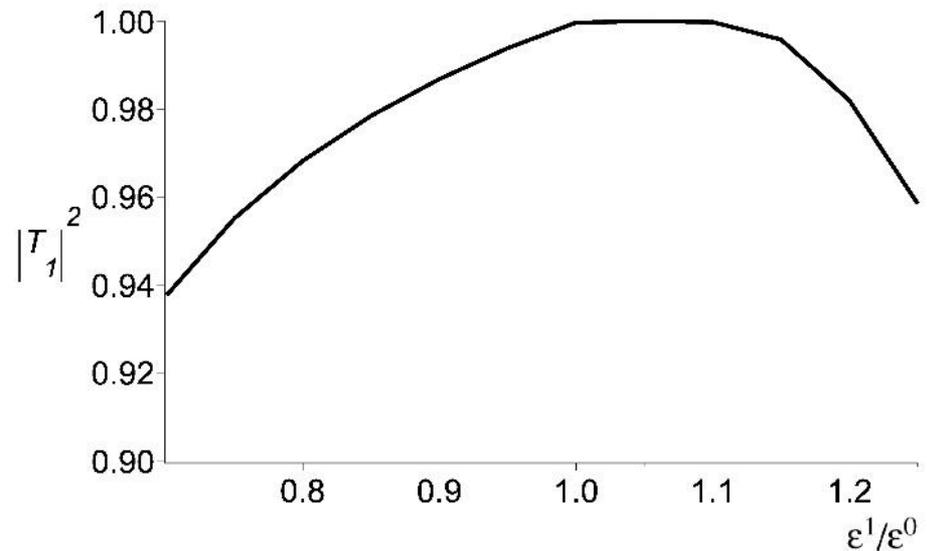
Переход от открытых к закрытым осуществляем на основании исследований, проведенных в работе:

Диваков Д.В. «Численное решение задач волноводного распространения поляризованного света в интегрально-оптическом волноводе» (дисс. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук 05.13.18, 2017 год)

Пример 1. Задача дифракции на стыке открытых планарных волноводов [4]



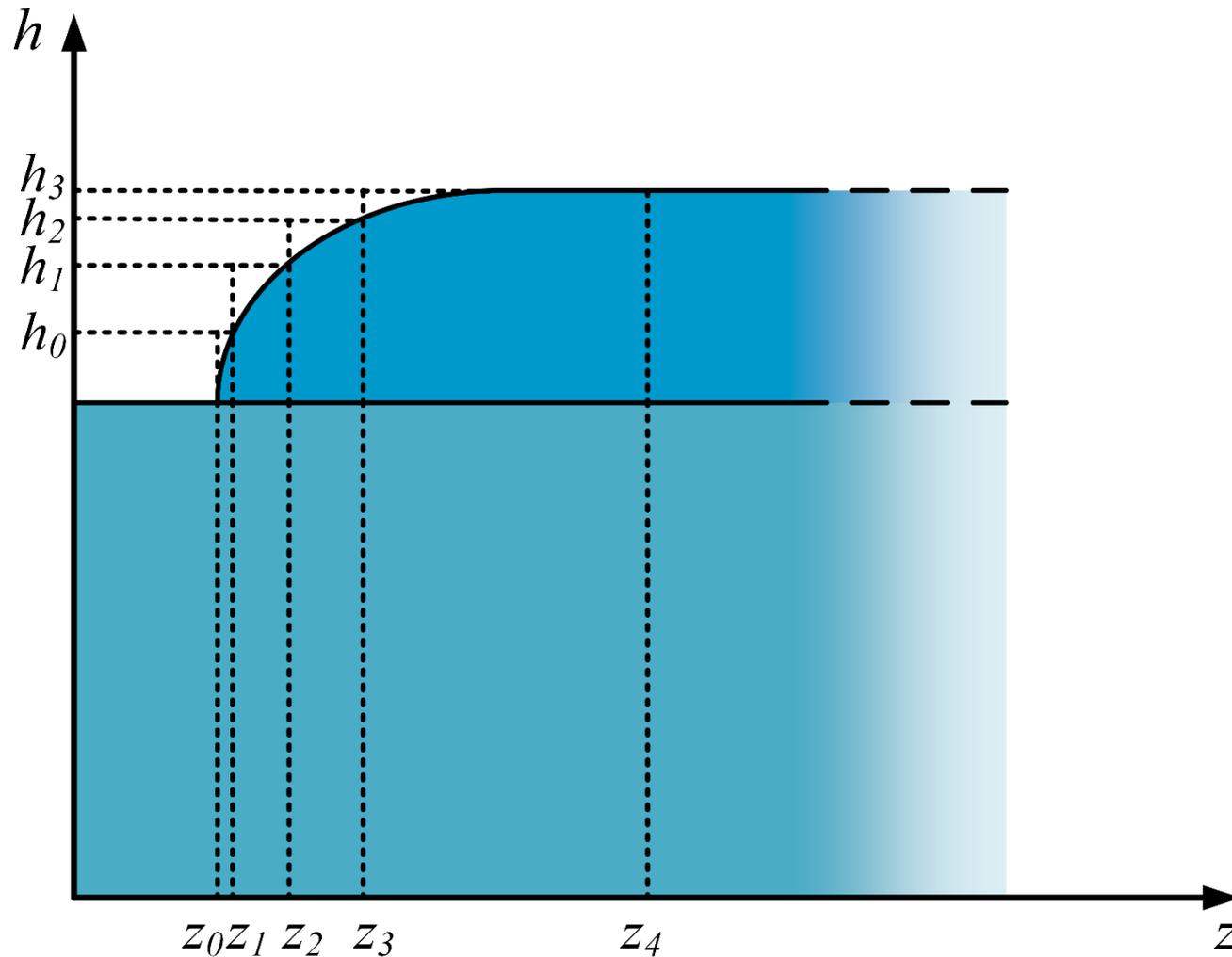
(а)



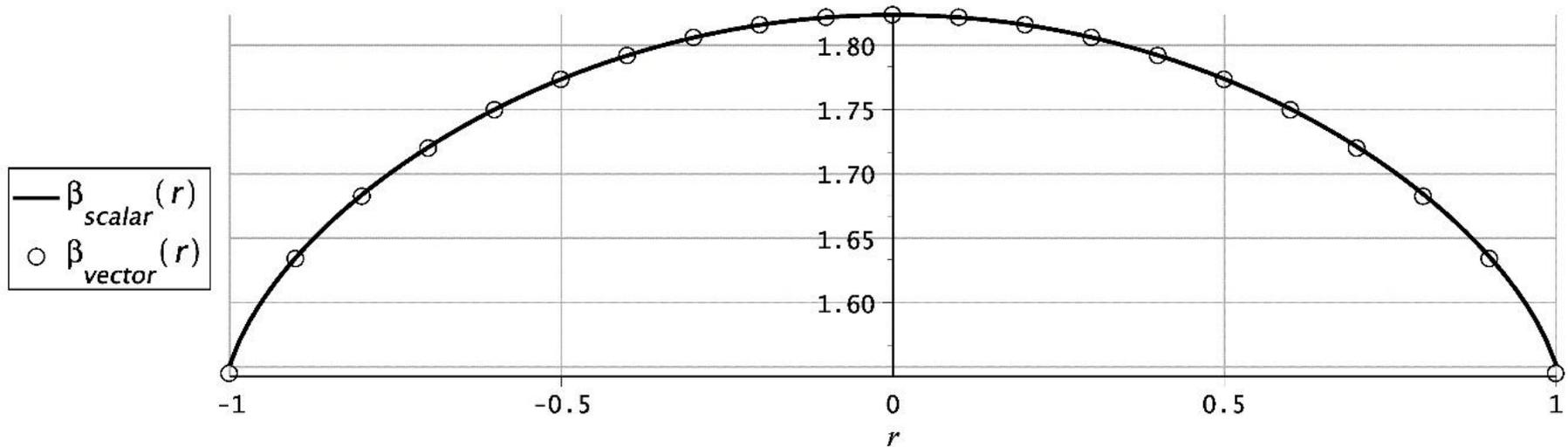
(б)

Коэффициент прохождения первой направляемой моды через стык, полученный в рамках метода поперечных сечений Шевченко В.В. [4] (а) и в рамках метода четырех потенциалов (б)

Пример 2. Задача дифракции на волноводной линзе Люнеберга



Задача дифракции на волноводной линзе Люнеберга



Коэффициент фазового замедления моды TE_0 , полученный методом четырех потенциалов и в рамках скалярной модели

Относительная погрешность: $\delta(r) < 5 \cdot 10^{-3}$.

Основные результаты

- На основе неполного метода Галеркина и метода четырех потенциалов предложен метод дискретизации системы дифференциальных уравнений относительно четырех потенциалов.
- Разработан символьно-численный алгоритм вычисления нормальных мод регулярных волноводов с переменной диэлектрической и магнитной проницаемостью.
- Разработан символьно-численный алгоритм решения задачи дифракции на стыке планарных интегрально-оптических волноводов.
- Разработан символьно-численный алгоритм решения задачи дифракции на протяженных нерегулярностях в планарных интегрально-оптических волноводах.

Основные публикации

- Севастьянов А.Л., Севастьянов Л.А., Тютюнник А.А. Аналитические вычисления вывода системы дифференциальных уравнений в частных производных для коэффициентных функций Канторовича // Математическое моделирование.–2015.–Т. 27, № 7.–С. 103–110.
- Malykh M.D., Sevastianov L.A., Tiutiunnik A.A., Nikolaev N.E. On the representation of electromagnetic fields in closed waveguides using four scalar potentials // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. – 2018. – Vol. 32, 7. – Pp. 886-898.
- Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца // Вестник РУДН, серия: Математика. Информатика. Физика. – 2018. – Т. 26, № 1.– С. 39-48.
- Тютюнник А. А. О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. – 2018. – Т. 26, № 2. – С. 129–139.

Основные публикации

- Divakov D.V., Lovetskiy K.P., Malykh M.D., Tiutiunnik A.A. The application of Helmholtz decomposition method to investigation of multicore fibers and their application in next-generation communications systems // Communications in Computer and Information Science. – 2018. – Vol. 919. – Pp. 469–480.
- Sevastianov L., Sevastianov A., Tutunnik A., Nikolaev N. Scalar Product in the Space of Waveguide Modes of an Open Planar Waveguide // EPJ Web of Conferences. – 2016. – Vol. 108. – Pp. 02041.
- Divakov D., Malykh M., Sevastianov L., Sevastianov A., Tiutiunnik A. The numerical-analytical implementation of the cross-sections method to the open waveguidetransition of the «horn» type // Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. – 2017. – Vol. 10337. – Pp. 103370G.
- Malykh M., Sevastianov L., Tyutyunnik A., Nikolaev N. Diffraction of Electromagnetic Waves on a Waveguide Joint // EPJ Web of Conferences. – 2018. – Vol. 173. – Pp. 02014.

Основные публикации

- Sevastyanov L.A., Sevastyanov A.L., Tyutyunnik A.A. Analytical calculations in Maple to implement the method of adiabatic modes for modeling smoothly irregular integrated optical waveguide structures // Lecture Notes in Computer Science. – 2014.– Vol. 8660. – Pp. 419-431.
- Malykh M.D., Sevastianov L.A., Tiutiunnik A.A. Calculation of normal modes of the closed waveguides in general vector case // Progress in Biomedical Optics and Imaging - Proceedings of SPIE. – 2018. – Vol. 10717. – Pp. 107170Z.
- Divakov D., Tiutiunnik A., Sevastianov A. Algorithm for Numerical Solution of Diffraction Problem on the Joint of Two Open Three-Layer Waveguides // MATEC Web of Conferences. – 2018. Vol. 186. – Pp. 01010.
- Divakov D., Tiutiunnik A., Sevastianov A. Symbolic-Numeric Computation of the Eigenvalues and Eigenfunctions of the Leaky Modes in a Regular Homogeneous Open Waveguide // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 186. – Pp. 01009.
- Всего 3 статьи ВАК, 9 статей Scopus.

Апробация

Семинары:

- Семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН, 27 декабря 2017 г.
- Московский научный семинар «Интегральная оптика и волноводная оптоэлектроника» Московского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, 28 июня 2018 г.
- Научный семинар «Проблемы современной математики», МИФИ, 1 ноября 2018 г.
- Научный семинар «Математическое моделирование», РУДН, 13 ноября 2018 г.
- Семинар по вычислительной и прикладной математике Лаборатория информационных технологий ОИЯИ, Дубна, 16 ноября 2018 г.

Апробация

Конференции:

- Научная сессия НИЯУ МИФИ-2014. Москва, МИФИ, 27 января – 01 февраля 2014 г.; 16–20 февраля 2015г.
- VI Международная конференция «Проблемы математической физики и математическое моделирование». Москва, НИЯУ МИФИ, 25–27 мая 2017г.
- Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (MPAMCS'2014). Дубна, 25–29 августа 2014г.
- Всероссийской конференции «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем». Москва, РУДН, 22–25 апреля 2014 г.; 20-24 апреля 2015 г.; 18-22 апреля 2016 г.
- Международная конференция «18th Workshop on Computer Algebra DUBNA-2015». Дубна 25 – 27 мая 2015г.

Апробация

Конференции:

- Международная научная конференция «Компьютерная алгебра». Москва, 29 июня – 2 июля, 2016 г.
- Международная конференция «International Conference on Mathematical Modeling and Computational Physics» (ММСР'2015). StaraLesna, Словакия, 13–17 июля 2015 г.
- The International Conference «Mathematical Modeling and Computational Physics, 2017» (ММСР 2017). Дубна, Россия, 3-7 июль 2017 г.
- Симпозиум международных научных конференций «Оптика и биофотоника IV» (SFM'2016). Саратов, СГУ, 27–30 сентября 2016 г.; 26 – 29 сентября 2017 г.
- The 7th International Conference on Engineering Mathematics and Physics (ICEMP 2018), Прага, Чехия, 15-18 июня 2018 г.
- 21st International Conference, DCCN 2018, Москва, Россия, 17–21 сентября, 2018 г.

Приложение. Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_{j1}(x, y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots N^2 - 1$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{N^2-1} = \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cos((N-1)\pi x) \cdot \cos((N-1)\pi y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приложение. Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{j2}(x, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = N^2 - 1 \dots 2N^2 - 2$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=N^2-1}^{2N^2-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\pi x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos((N-1)\pi x) \cdot \cos((N-1)\pi y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приложение. Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{j3}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 2N^2 - 2 \dots 3N^2 - 2$$

$$\left\{ \vec{\varphi}_j \right\}_{j=2N^2-2}^{3N^2-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi y) \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(N\pi x) \cdot \sin(N\pi y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приложение. Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{j4}(x, y) \end{pmatrix}, \quad j = 3N^2 - 2 \dots 4N^2 - 2$$

$$\left\{ \vec{\varphi}_j \right\}_{j=3N^2-2}^{4N^2-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi y) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(N\pi x) \cdot \sin(N\pi y) \end{bmatrix}$$