

# **Семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН**

## **Метод вычисления нормальных мод оптического волновода в векторном случае в системе компьютерной алгебры Maple**

Д.В.Диваков, М.Д.Малых, Л.А.Севастьянов, А.А.Тютюнник

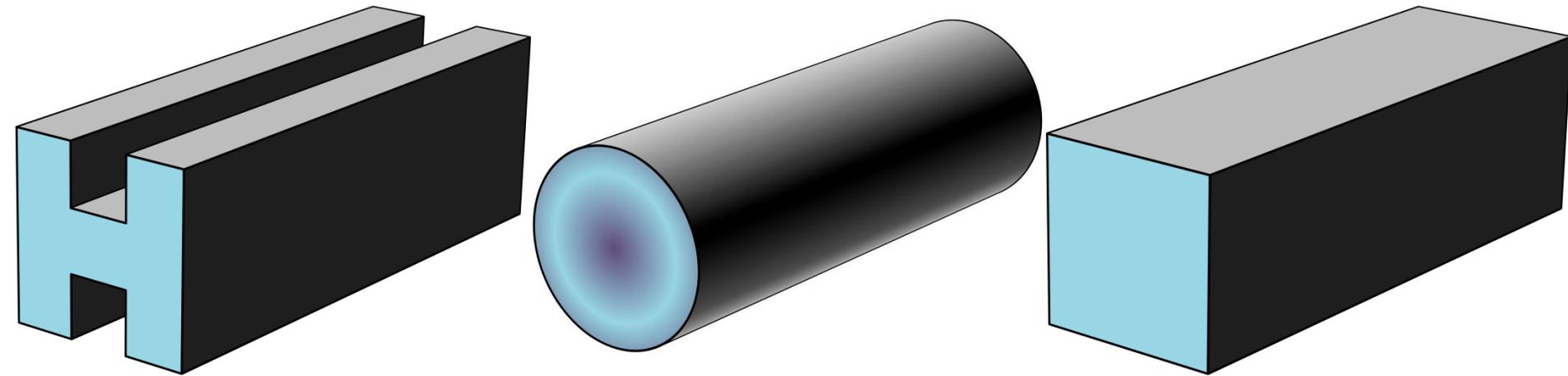
Российский университет дружбы народов

Москва

27.12.2017

# Объект исследований

**Оптический волновод** - искусственный или естественный направляющий канал, в котором может распространяться волна оптического диапазона.



# Основопологающие исследования

- Самарский А.А., Тихонов А.Н. О возбуждении радиоволноводов. I, II, III // Журнал технической физики. – 1947.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM мод // Журнал технической физики. – 1948.
- Каценеленбаум Б.З. Нерегулярные волноводы с медленно меняющимися параметрами // ДАН СССР. – 1955.
- Свешников А.Г. Приближенный метод расчета слабо нерегулярного волновода // ДАН СССР. – 1956.
- Свешников А.Г. Нерегулярные волноводы // Известия вузов. Радиофизика. – 1959.
- Дерюгин Л.Н., Марчук А.Н., Сотин В.Е. Свойства плоских несимметричных диэлектрических волноводов на подложке из диэлектрика // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 1967
- Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина // ДАН СССР. – 1977.
- Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г. О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998.

# **Цель исследования**

**Цель исследований:** разработка символьно-численного алгоритма решения задачи дифракции в векторной постановке на произвольных нерегулярностях волновода.

**Рассматриваемая задача:** разработка символьно-численного алгоритма решения задачи отыскания нормальных мод волновода квадратного поперечного сечения.

# Структура доклада

1. Математическая модель
2. Символьно-численный алгоритм для исследования квадратных волноводов со вставкой
  - Символьное вычисление матриц коэффициентов
  - Анализ структуры матриц
  - Вычисление собственных значений численными методами
  - Верификация результатов на примере полого волновода

# Математическая модель

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

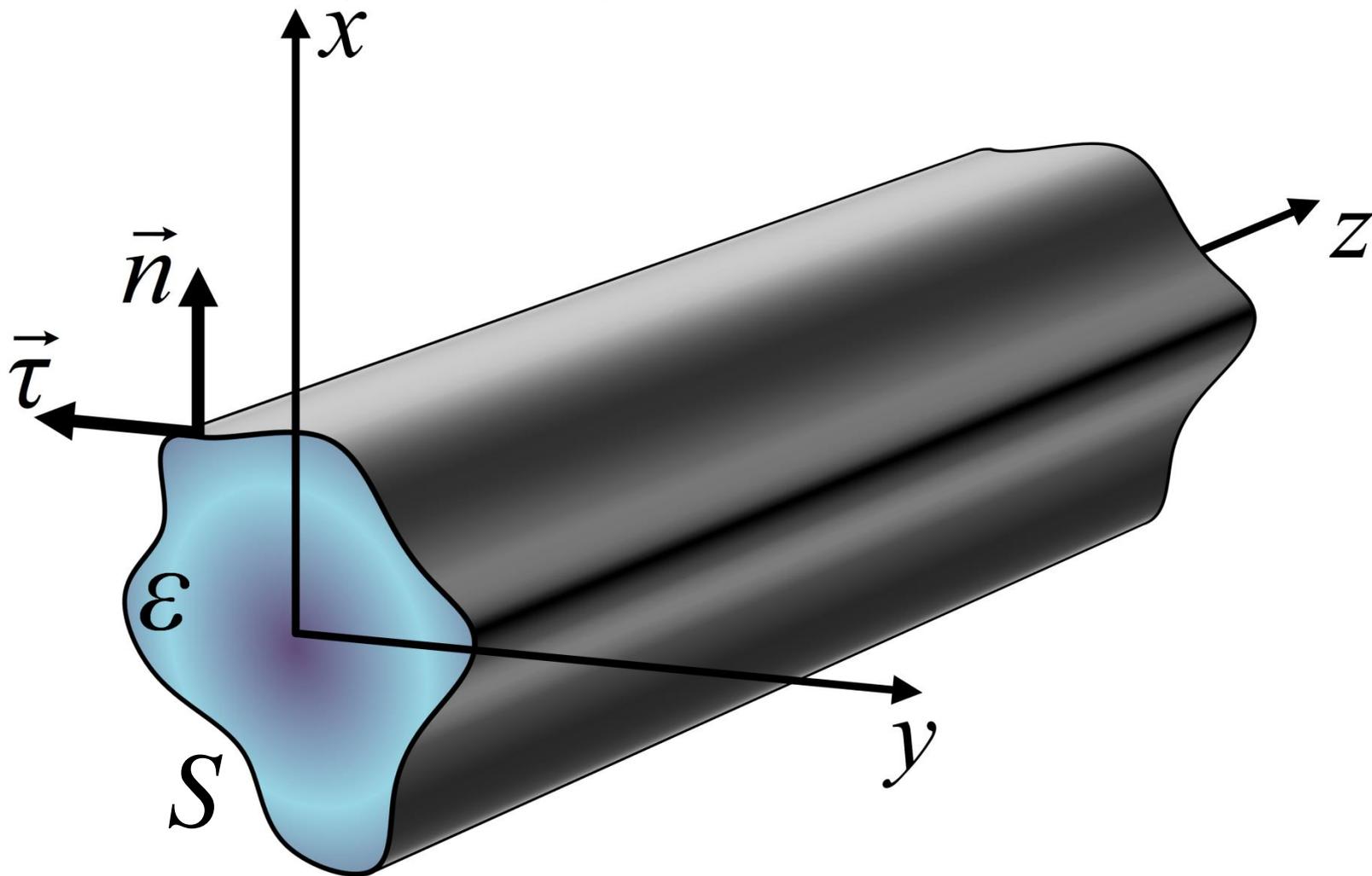
Материальные уравнения

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Граничные условия

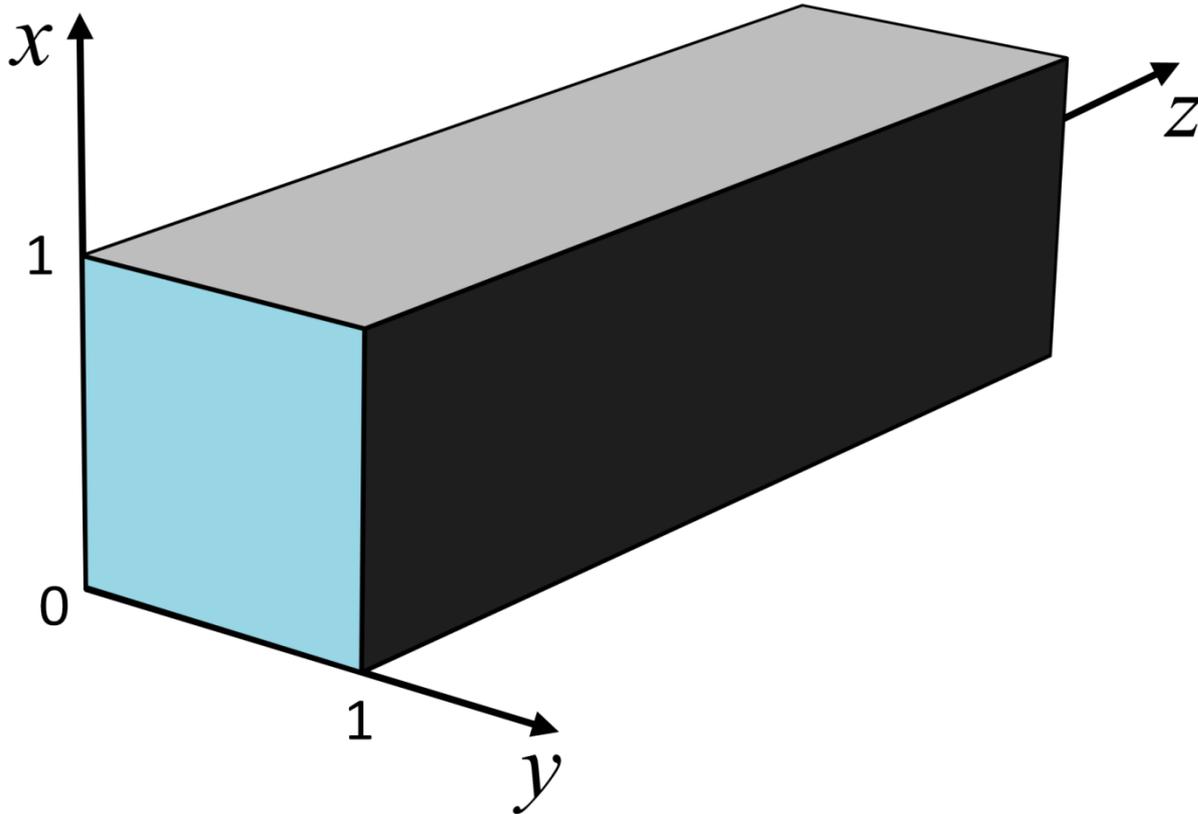
$$\vec{E}_{\perp} \times \vec{n} \Big|_{\partial S} = \vec{0}, \quad \vec{H}_{\perp} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad E_z \Big|_{\partial S} = 0.$$

# Геометрия задачи



$$\vec{E}_{\perp} \times \vec{n} \Big|_{\partial S} = \vec{0}, \quad \vec{H}_{\perp} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial S} = 0, \quad E_z \Big|_{\partial S} = 0.$$

# Нормальные моды полого волновода



$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) e^{ik_0\beta z - i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y) e^{ik_0\beta z - i\omega t}$$

# Статьи по теме доклада

Используемый в работе метод подробно описан в работе:

- M.D. Malykh, L.A. Sevastianov, A.A. Tiutiunnik and N.E. Nikolaev. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials // Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 2017.  
DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137

# Вид решения

- Выражение полей через потенциалы

$$\vec{E}_{\perp} = \nabla u_e + \nabla' v_e, \vec{H}_{\perp} = \nabla u_h + \nabla' v_h$$

$$E_z = -\frac{1}{ik\varepsilon} \left( \text{rot } \vec{H}_{\perp} \right)_z, H_z = \frac{1}{ik\mu} \left( \text{rot } \vec{E}_{\perp} \right)_z$$

- Граничные условия

$$u_e|_{\partial S} = u_h|_{\partial S} = 0, \quad \vec{n} \cdot \nabla v_e|_{\partial S} = \vec{n} \cdot \nabla v_h|_{\partial S} = 0$$

- Здесь  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$      $\nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T$

# Редукция уравнений Максвелла

- Система уравнений относительно четырех потенциалов

$$\begin{cases} \nabla' \left( \partial_z v_h - \frac{1}{ik_0 \mu} \Delta v_e \right) + ik_0 \varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik_0 \varepsilon \nabla u_e = \vec{0} \\ \nabla' \left( \partial_z u_e + \frac{1}{ik_0 \varepsilon} \Delta u_h \right) - ik_0 \mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik_0 \mu \nabla v_h = \vec{0} \end{cases} \quad (1)$$

- Условия на потенциалы

$$u_e|_{\partial S} = u_h|_{\partial S} = 0, \quad \vec{n} \cdot \nabla v_e|_{\partial S} = \vec{n} \cdot \nabla v_h|_{\partial S} = 0$$

# Применение неполного метода Галеркина

Приближенное решение системы (1)

представляем в виде разложения по системе

функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{pmatrix} v_h \\ v_e \\ u_e \\ u_h \end{pmatrix} (x, y, z) = \sum_j w_j(z) \vec{\varphi}_j(x, y),$$

где  $\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_{j1}(x, y) \\ \varphi_{j2}(x, y) \\ \varphi_{j3}(x, y) \\ \varphi_{j4}(x, y) \end{pmatrix}$ ,  $\varphi_{j1}|_{\partial S} = \varphi_{j2}|_{\partial S} = 0$ ,  $\vec{n} \cdot \nabla \varphi_{j3}|_{\partial S} = \vec{n} \cdot \nabla \varphi_{j4}|_{\partial S} = 0$

# Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_{j1}(x, y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots N^2 - 1$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{N^2-1} = \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cos((N-1)\pi x) \cdot \cos((N-1)\pi y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{j2}(x, y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = N^2 - 1 \dots 2N^2 - 2$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=N^2-1}^{2N^2-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\pi x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \cos((N-1)\pi x) \cdot \cos((N-1)\pi y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{j3}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 2N^2 - 2 \dots 3N^2 - 2$$

$$\left\{ \vec{\varphi}_j \right\}_{j=2N^2-2}^{3N^2-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi y) \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(N\pi x) \cdot \sin(N\pi y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Используемая система функций

$$\vec{\varphi}_j(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{j4}(x, y) \end{pmatrix}, \quad j = 3N^2 - 2 \dots 4N^2 - 2$$

$$\left\{ \vec{\varphi}_j \right\}_{j=3N^2-2}^{4N^2-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\pi x) \cdot \sin(2\pi y) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(N\pi x) \cdot \sin(N\pi y) \end{bmatrix}$$

# Задача на собственные значения

- После применения неполного метода Галеркина получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{B} \frac{d\vec{w}}{dz} + ik_0 \mathbf{A} \vec{w} + \frac{1}{ik_0} \mathbf{C} \vec{w} = \vec{0} \quad (2)$$

- Для нормальных мод волновода из системы (2) получаем задачу на собственные значения

$$\mathbf{K} \vec{\psi} = \beta \vec{\psi} \quad , \text{ где } \mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1} \left( \mathbf{A} - \frac{1}{k_0^2} \mathbf{C} \right)$$

# Элементы матриц **A**, **B** и **C**

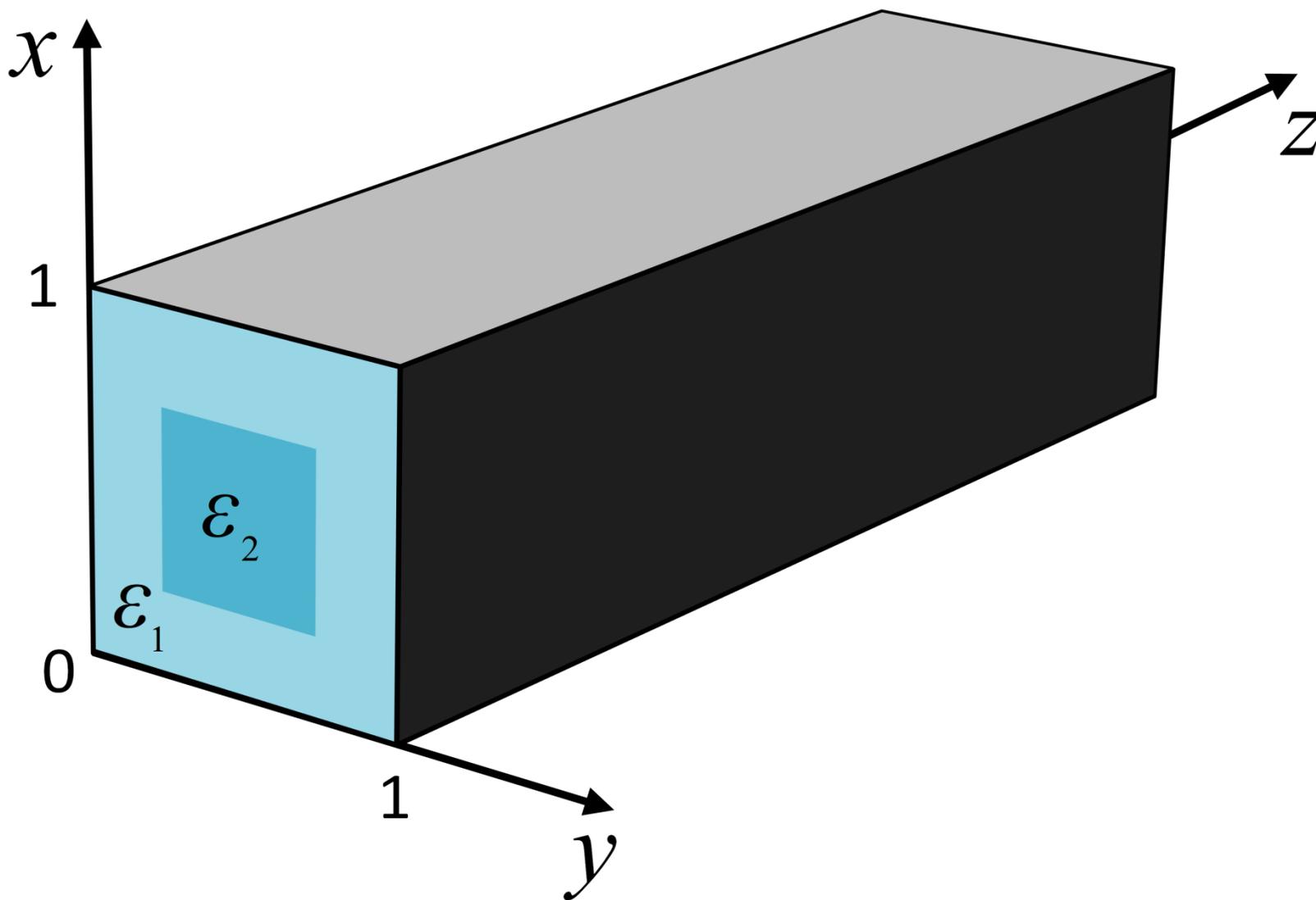
Для выбранной системы функций  $\{\vec{\varphi}_j\}$  элементы матриц **A**, **B** и **C** вычисляются по формулам:

$$a(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \iint_S \varepsilon (\nabla' \varphi_{j2} + \nabla \varphi_{j3}) \cdot (\nabla' \varphi_{i1} - \nabla \varphi_{i4}) dx dy + \\ + \iint_S \mu (\nabla' \varphi_{j4} + \nabla \varphi_{j1}) \cdot (\nabla' \varphi_{i2} - \nabla \varphi_{i3}) dx dy$$

$$b(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \iint_S (\nabla' \varphi_{j1} \cdot \nabla' \varphi_{i1} + \nabla' \varphi_{j3} \cdot \nabla' \varphi_{i3} + \nabla \varphi_{j2} \cdot \nabla \varphi_{i2} + \nabla \varphi_{j4} \cdot \nabla \varphi_{i4}) dx dy$$

$$c(\vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j) = \iint_S \left( \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i1}}{\mu} - \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i3}}{\varepsilon} \right) dx dy$$

# Волновод со вставкой



# Расчеты в Maple (Матрица A)

```
> maSymb := proc(w1, w2, ppx, ppy, e1, e2)
local vh1, vh2, ve1, ve2, ue1, ue2, uh1, uh2, p1, q1, r1, p2, q2, r2, r;

vh1 := w2[1];
ve1 := w2[2];
ue1 := w2[3];
uh1 := w2[4];

vh2 := w1[1];
ve2 := w1[2];
ue2 := w1[3];
uh2 := w1[4];

p1 := D2(ve1) + D1(ue1);
q1 := D2(vh2) - D1(uh2);

p2 := D2(uh1) + D1(vh1);
q2 := D1(ve2) - D2(ue2);

r1 := VectorCalculus[DotProduct](p1, q1);
r2 := VectorCalculus[DotProduct](p2, q2);

return ( int(e1·r1 + r2, [x=0..1, y=0..1]) + int( (e2 - e1)·r1, [x =  $\frac{-ppx + 1}{2}$  ..  $\frac{ppx + 1}{2}$ , y =  $\frac{-ppy + 1}{2}$  ..  $\frac{ppy + 1}{2}$ ] ) );
end proc;
```

# Расчеты в Maple (Базис)

```
> N := 8;  
> vh := seq( seq( Vector( [ cos(π·i·x)·cos(π·j·y), 0, 0, 0 ] ), j=0..N-1), i=0..N-1 ) :  
ve := seq( seq( Vector( [ 0, cos(π·i·x)·cos(π·j·y), 0, 0 ] ), j=0..N-1), i=0..N-1 ) :  
ue := seq( seq( Vector( [ 0, 0, sin(π·i·x)·sin(π·j·y), 0 ] ), j=1..N), i=1..N ) :  
uh := seq( seq( Vector( [ 0, 0, 0, sin(π·i·x)·sin(π·j·y) ] ), j=1..N), i=1..N ) :  
ϕ := seq( vh[i], i=2..N2 ), ue, seq( ve[i], i=2..N2 ), uh;
```

```
> A := Matrix( (4·N2-2), (4·N2-2), (i,j) → maSymb(ϕ[i], ϕ[j], px, py, e1, e2));  
sA := simplify(A) :
```

```
A := 
$$\left[ \begin{array}{l} 254 \times 254 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{array} \right]$$

```

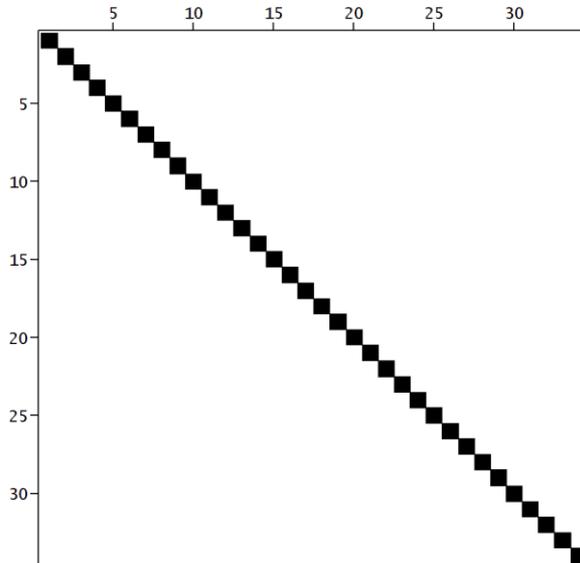
```
> ExportMatrix(cat("C:\\matrices\\A", N, ".mat"), sA);
```

# Элемент матрицы К

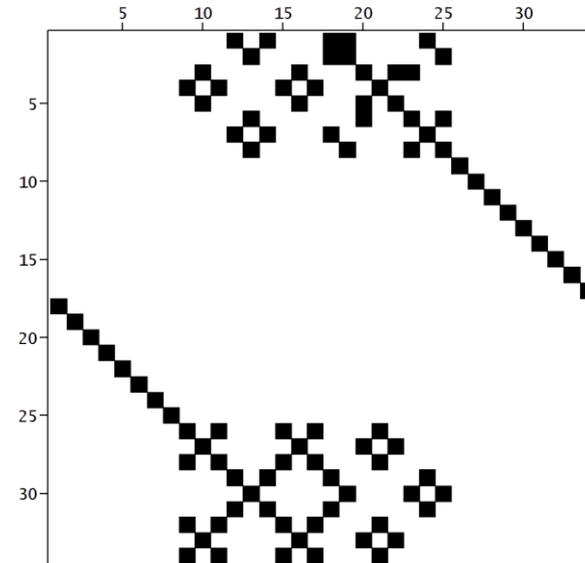
$$\begin{aligned} K[3,4] = & \frac{(-e2 + e1)}{\pi} px \cos\left(\frac{\pi}{2}(py - 1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(py - 1)\right) + \\ & + \frac{(-e2 + e1)}{\pi} px \cos\left(\frac{\pi}{2}(py + 1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(py + 1)\right) - \\ & - \frac{(-e2 + e1)}{\pi} py \cos\left(\frac{\pi}{2}(px - 1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(px - 1)\right) - \\ & - \frac{(-e2 + e1)}{\pi} py \cos\left(\frac{\pi}{2}(px + 1)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(px + 1)\right) \end{aligned}$$

# Структура матриц А,В,С,К (N=3)

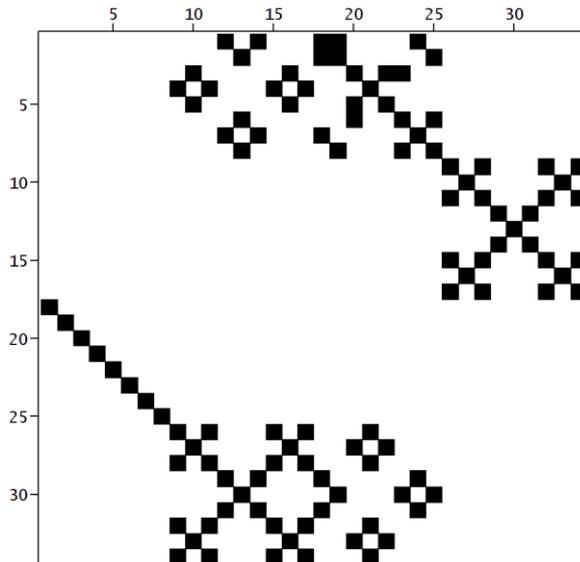
Matrix B [ 34 × 34 ] structure



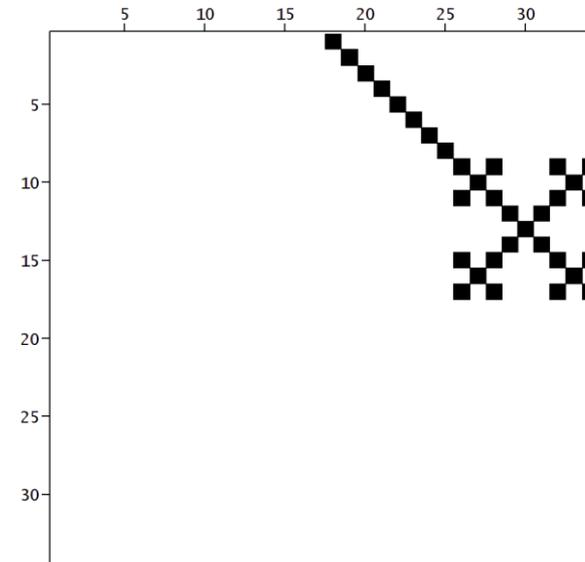
Matrix A [ 34 × 34 ] structure



Matrix K [ 34 × 34 ] structure

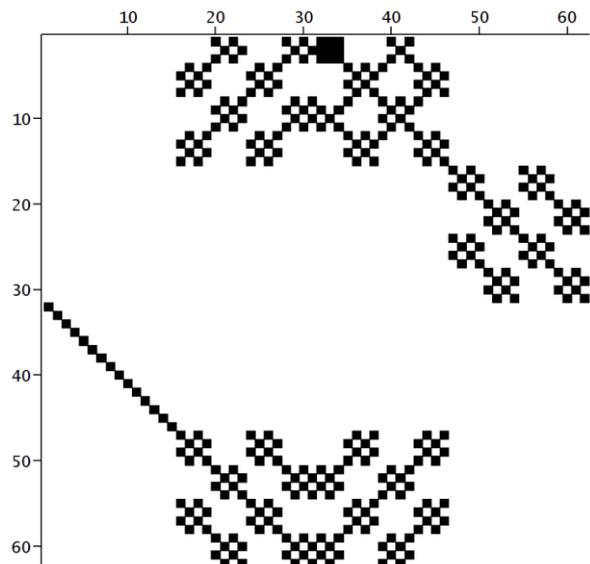


Matrix C [ 34 × 34 ] structure

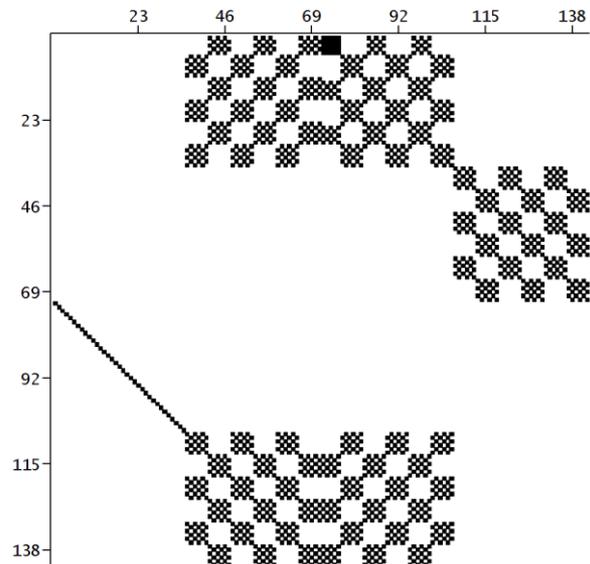


# Структура матрицы К

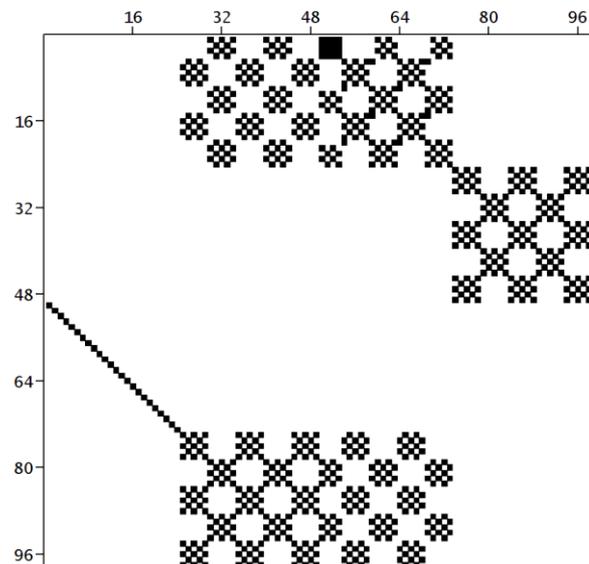
Matrix K [ 62 × 62 ] structure



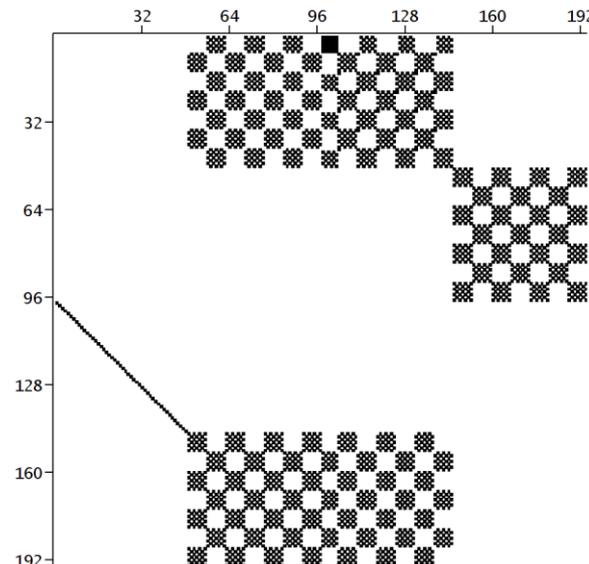
Matrix K [ 142 × 142 ] structure



Matrix K [ 98 × 98 ] structure



Matrix K [ 194 × 194 ] structure



## Количество ненулевых элементов матрицы **K**

- Количество элементов матрицы **K**

$$Z = (4N^2 - 2)^2$$

- Количество ненулевых элементов

$$Z_0 = \frac{5}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^2 - 2 \quad Z_1 = \frac{5}{4}N^4 + N^2 - N + \frac{3}{4}$$

- При  $N > 4$  процент ненулевых элементов матрицы **K** не превышает 8,5%.

# Вычисление собственных значений

- Рассмотрим как изменяются значения  $\beta_j$  при изменении размеров квадратной вставки  $p = p_x = p_y$ .

```
> Kn := ImportMatrix("C:\\matrices\\K4.mat")
```

```
Kn := [ 62 x 62 Matrix  
Data Type: anything  
Storage: rectangular  
Order: Fortran_order ]
```

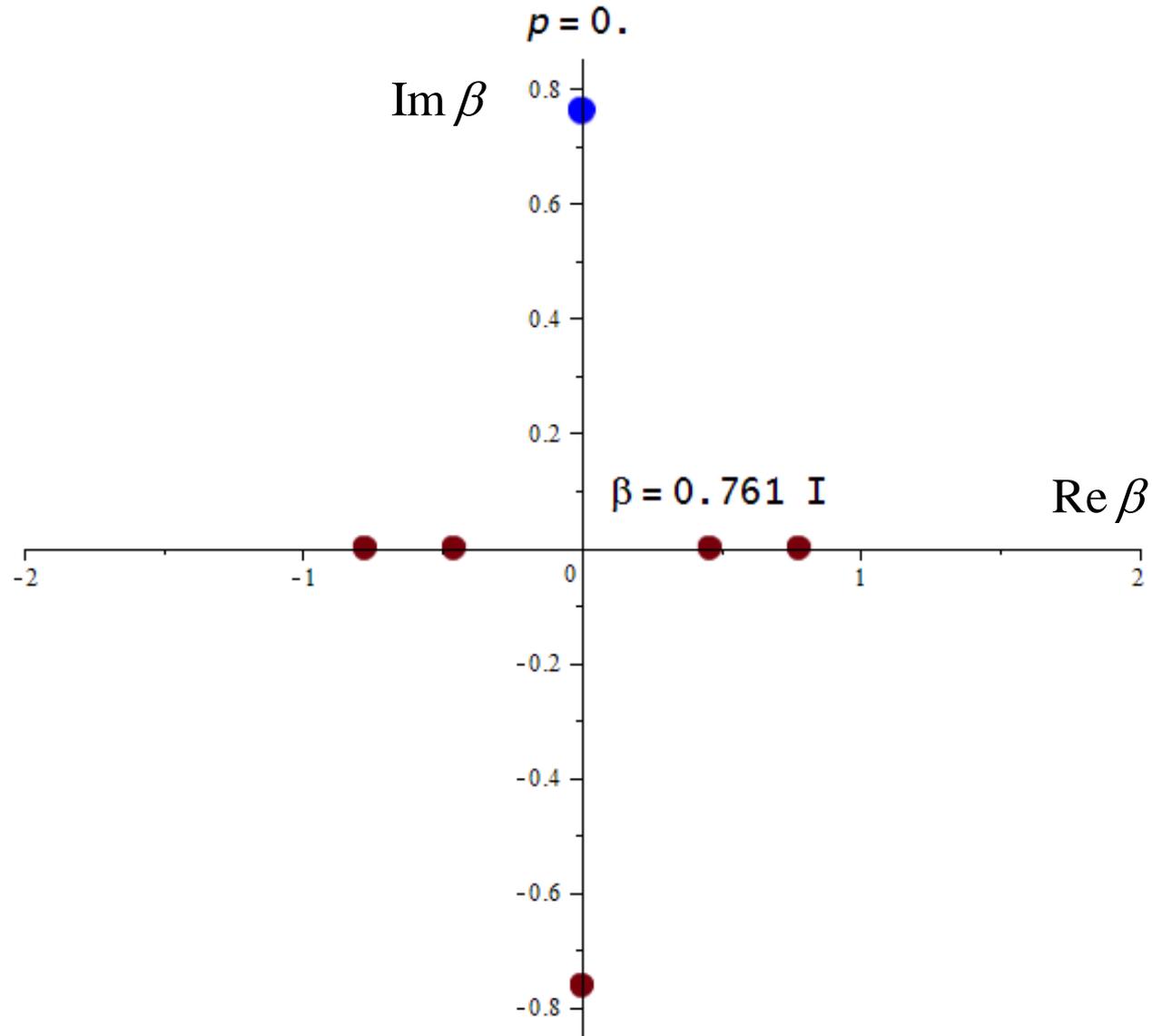
```
> K := (p) → evalf[15]( subs( {px = p, py = p, k = 5, e1 = 1, e2 = 2}, Kn ) );
```

```
K := p → evalf15( subs( {e1 = 1, e2 = 2, k = 5, px = p, py = p}, Kn ) )
```

```
> e := Eigenvalues(K(0.5));
```

```
e := [ 1 .. 62 Vectorcolumn  
Data Type: complex8  
Storage: rectangular  
Order: Fortran_order ]
```

# Собственные значения $\beta_j(p)$



# Сходимость собственных значений

- Рассмотрим сходимость собственных значений при увеличении параметра  $N$ .

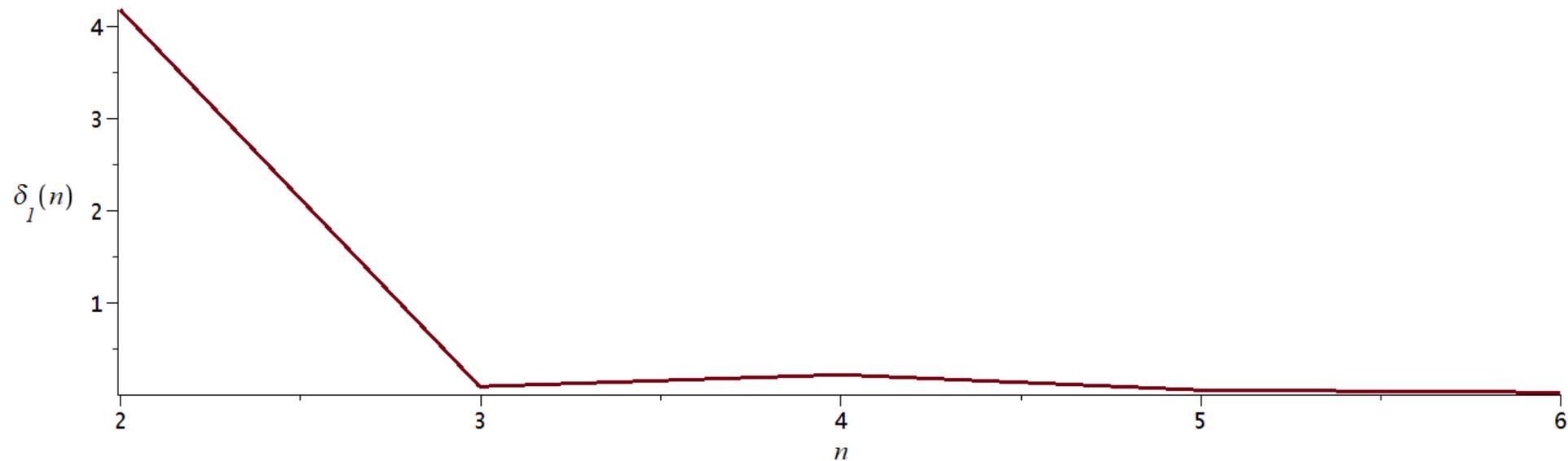
- За меру сходимости  $\beta_j$  примем величину

$$\delta_j(N) = \left| \frac{\beta_j^{(N)} - \beta_j^{(7)}}{\beta_j^{(7)}} \right|$$

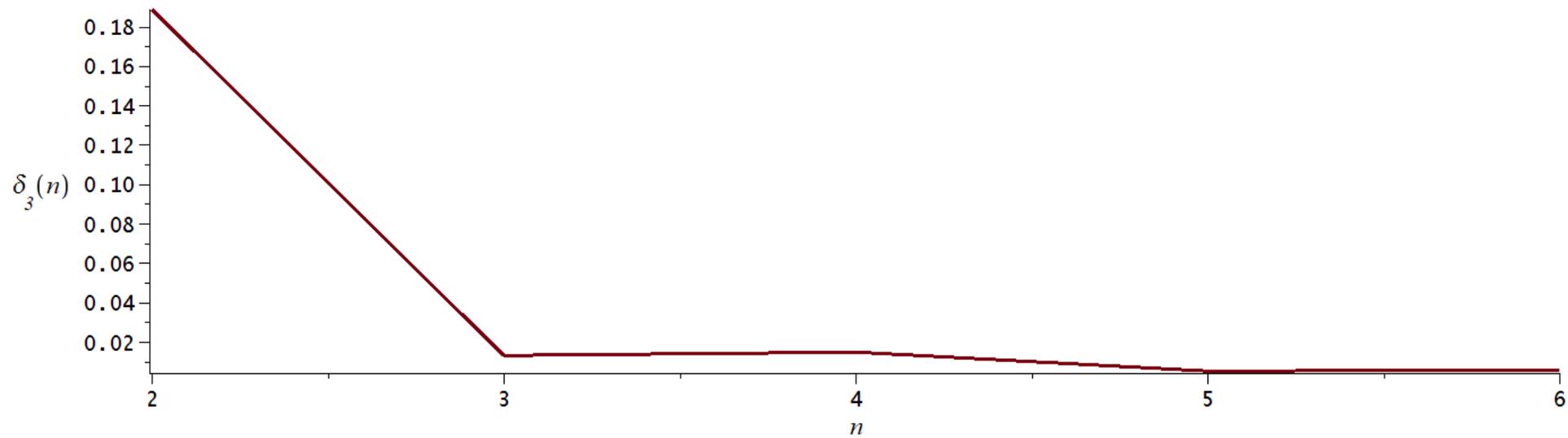
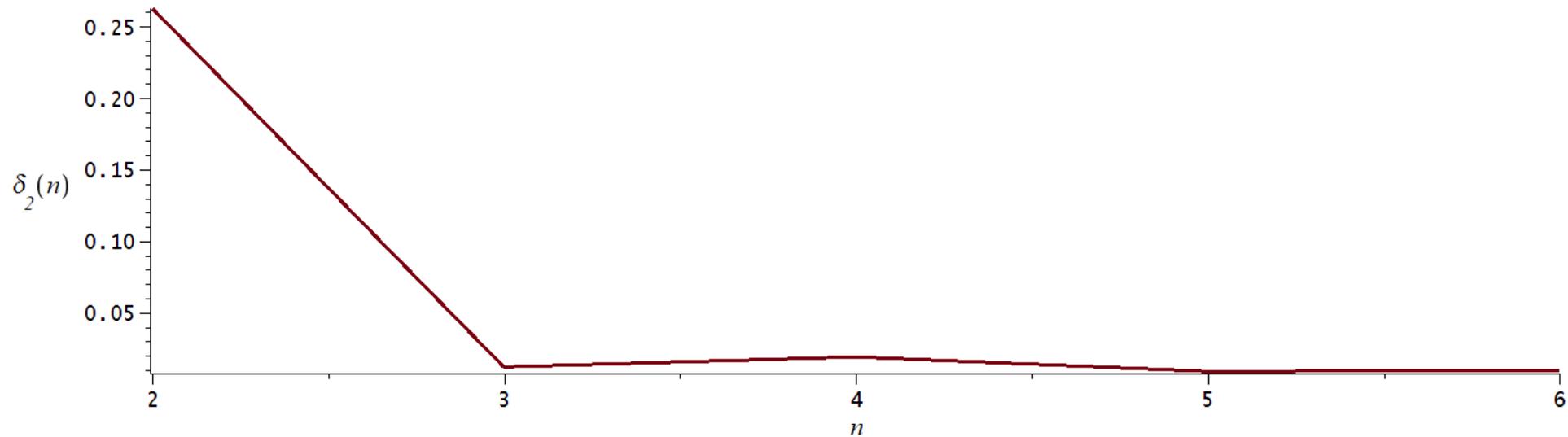
где  $\beta_j^{(N)}$  - собственное значение номера  $j$ , посчитанное численно для фиксированного  $N$ .

# Сходимость собственных значений

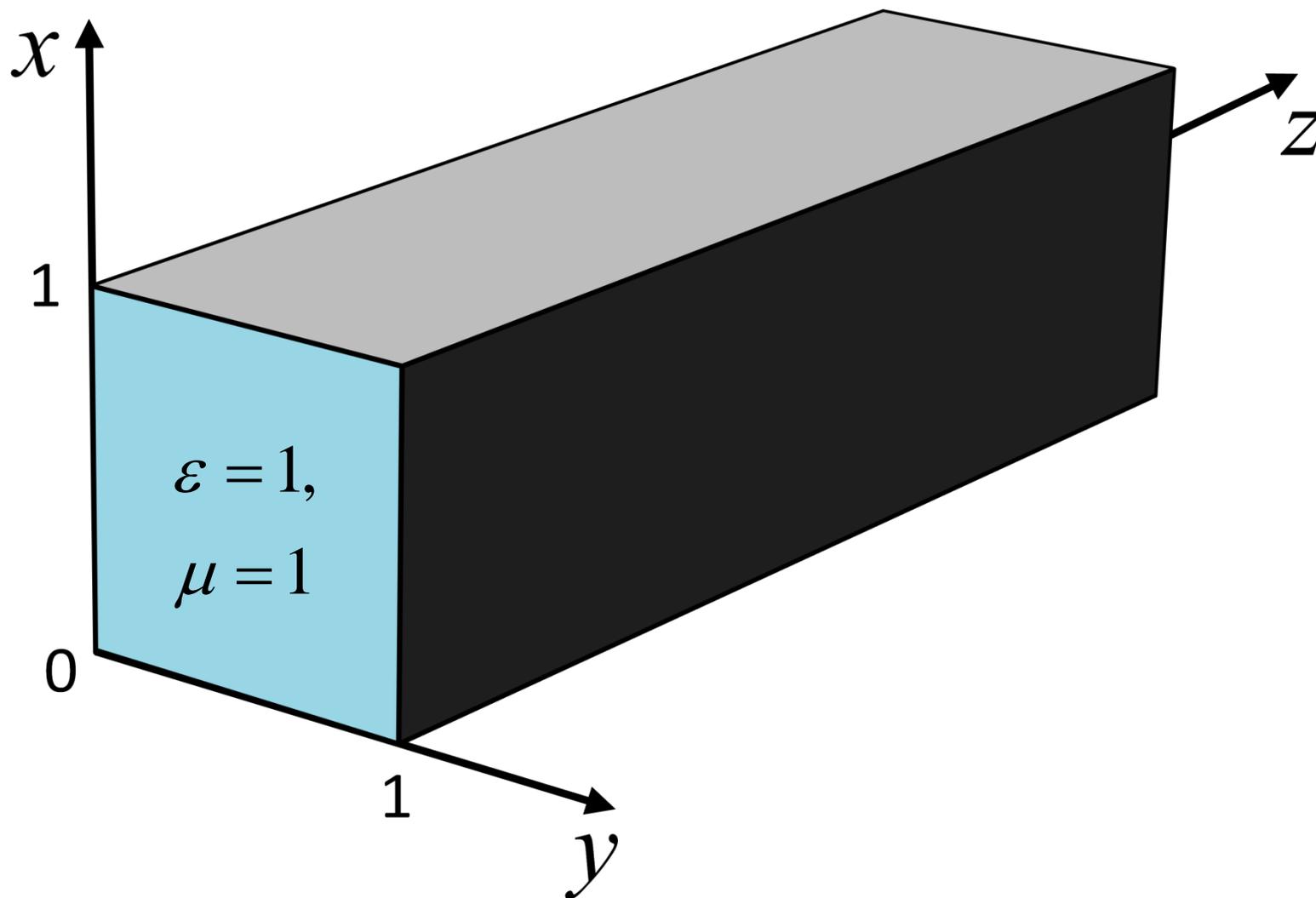
Рассмотрим сходимость собственных значений для волновода с  $\varepsilon_1 = 1$  и прямоугольной вставкой с  $\varepsilon_2 = 2$  и  $p_x = 0.6, p_y = 0.8$ .



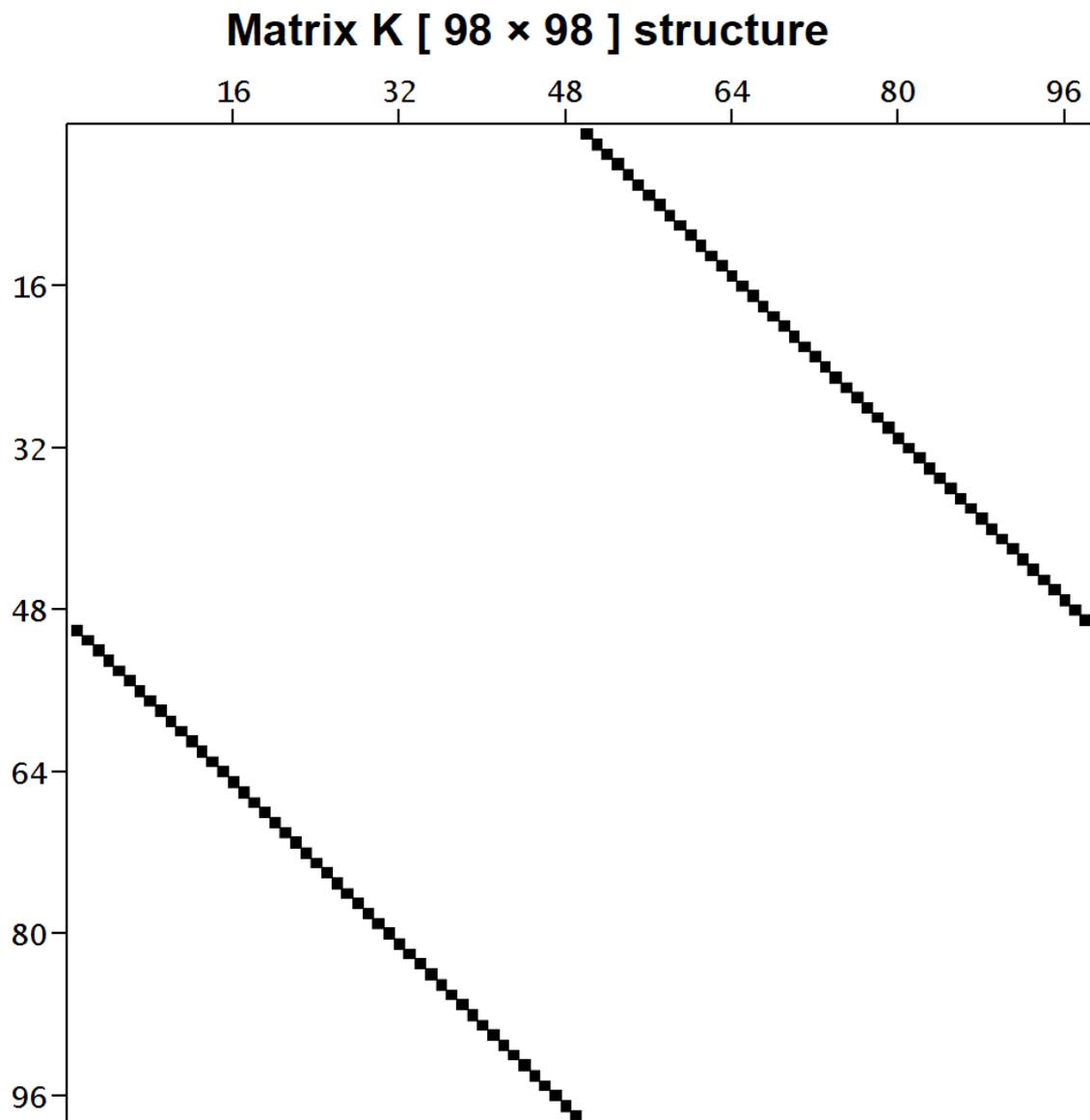
# Сходимость собственных значений



# Полый волновод



# Структура матрицы K для полого волновода



# Собственные значения полого волновода

Точные собственные значения

$$\beta_1 = \pm \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{k_0^2}}, \beta_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{2\pi^2}{k_0^2}}$$

Собственные значения, полученные в Maple

$$\beta = \begin{bmatrix} 0.777956183887432 \\ -0.777956183887432 \\ 0.458728294317579 \\ -0.458728294317578 \end{bmatrix}$$

Абсолютная точность

$$\delta < 1.1 \cdot 10^{-10}$$

# Заключение

**Рассмотренный метод реализован в символьно-численном виде в Maple:**

- получены элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $K$  в символьном виде и проведен анализ их структуры;
- проведены численные расчеты собственных значений квадратного волновода со вставкой;
- проведена верификация полученных результатов на примере полого волновода.