Компьютерные алгоритмы и символьные вычисления в задаче коэффициентной классификации однородных поверхностей

Валерий Суковых
sukovyh@gmail.com
DataArt, кафедра ЦТ ФКН

Предмет работы

Алгоритмы исследования систем полиномиальных уравнений, связанных с задачей об однородности.

Однородность

Определение 1. Множество (многообразие) называется однородным, если на нем транзитивно действует некоторая группа Ли.

Определение 2. Многообразие M называется однородным, если алгебра Ли касательных к нему векторных полей накрывает своими значениями касательное пространство к M в каждой точке.

Простейшие примеры однородности

1) $y = x^s \left(-1 \le s < 1\right),$

2) $y = \ln x,$

3) $y = x \ln x,$

4) $r = e^{a\varphi} \left(a \ge 0\right)$

2-мерный случай

Э.Картан (1932) Полное описание голоморфно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$.

А.Лобода (2000) Коэффициентная интерпретация:
всякая голоморфно-однородная гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$ определяется тройкой вещественных коэффициентов мозеровского нормального уравнения.
Эта тройка удовлетворяет паре квадратичных уравнений:

$$8\omega|\mu| - 3\mu^2 - 8\mu\eta = 0,$$

$$16\omega\eta - 25\omega\mu + 15\mu|\mu| = 48.$$

Задача об однородности в $\mathbb{C}^3$

Изучаемые поверхности задаются уравнениями:

$$M = \left\{ v = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right) + \sum_{k+l+2m \geq 4} N_{klm}(z, \bar{z}) u^m \right\}$$

Требуется описать все такие поверхности, однородные относительно голоморфных преобразований.

Опорный набор многочленов:

$$N_{220}, N_{320}, N_{221}, N_{420}, N_{330}, N_{321}, N_{222}$$

Матричное представление многочленов

$$N_{320} \sim \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\ \omega_7 & \omega_8 & \omega_9 \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \omega_{12} \end{pmatrix}, N_{330} \sim \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{pmatrix}$$

$$N_{320} = \sum_{i=0}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\omega_{j+3i} z_1^{(3-i)} z_2^{i} \right) \cdot \overline{z}_1^{(3-j)} \cdot \overline{z}_2^{(j-1)} \right)$$

Векторные поля, касательные к изучаемой поверхности в $\mathbb{C}^3$

$$Z = f_1(z,w)\frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z,w)\frac{\partial}{\partial z_2} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\operatorname{Re}\left\{ Z(\Phi)\big|_M \right\} \equiv 0.$$

f_1, f_2, g – голоморфные функции вблизи обсуждаемой точки

Параметры векторных полей

$$\left.\begin{aligned} f_{0|u=0} &= p \in \mathbb{C}^2 \\ g_{0|u=0} &= q \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} - \textit{основные}$$

$$\left.\begin{gathered} f'_{0|u=0} = a \in \mathbb{C}^2 \\ \operatorname{Re}\left(g''_0\right) = r \in \mathbb{R} \\ f_1(0) = \left\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_2 \in \mathbb{R}\right\} \end{gathered}\right\} - \textit{второстепенные}$$

Оценка числа опорных коэффициентов:

$$\left.\begin{array}{c} N_{320}, N_{321} - 2\times 12\mathbb{C} \\ N_{220}, N_{221}, N_{222} - 3\times 5\mathbb{R} \\ N_{420} - 15\mathbb{C} \\ N_{330} - 16\mathbb{C} \end{array}\right\} - 125\mathbb{R}(100\mathbb{R})$$

параметры:

$$\left\{a, p \in \mathbb{C}^2; q, r, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_2 \in \mathbb{R}\right\} - 15\mathbb{R}$$

Информационная модель задачи

1. $\left(g_0 N_{221} - g_0' N_{220}\right) + 2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{220}\left(f_1\right)\right\}_N + 2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{320}\left(f_0\right)\right\}_N \equiv 0$

2. $\left(g_0 N_{321} - g_0' N_{320}\right) + \left\{\partial N_{220}\left(f_2^*\right)\right\}_N + \left\{\partial N_{420}\left(f_0\right)\right\}_N +$

$+\left(2i\left\langle z, f_0'\right\rangle N_{220} - 2i\left\langle z, z\right\rangle \bar{\partial} N_{220}\left(\bar{f}_0'\right)\right) + \left(i\left\langle z, f_0\right\rangle N_{221} - i\left\langle z, z\right\rangle \bar{\partial} N_{221}\left(\bar{f}_0\right)\right) +$

$+\left\{\bar{\partial} N_{330}\left(\bar{f}_0\right)\right\}_N + \left(\partial N_{320}\left(f_1\right) + \bar{\partial} N_{320}\left(\bar{f}_1\right)\right) \equiv 0$

3. $\left(g_0 N_{222} - r N_{220}\right) + 2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{221}\left(f_1(0)\right) + \partial N_{220}\left(f_1'(0)\right)\right\} +$

$+2\operatorname{Re}\left\{\partial N_{321}\left(f_0\right) + \partial N_{220}\left(f_0'\right)\right\} \equiv 0$

Формализация задачи (билинейные системы с параметрами)

$$A(X)Z + B(X)P = 0$$

Число уравнений: $N = 30$
Число переменных X: $n = 100$
Число переменных Z: $m = 10$
Число свободных переменных P: $k = 5$

Пример

$$\begin{pmatrix} 2x_1-3x_2 & x_1+2x_2 \\ 3x_1+7x_2 & 5x_1-x_2 \\ 15x_1+40x_2 & 19x_1-9x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2x_1-2x_2 & 3x_1+2x_2 \\ -x_1+5x_2 & 3x_1-x_2 \\ -26x_1+41x_2 & 15x_1-17x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}=0$$

Решение. $x_1=2t, x_2=3t, t\in\mathbb{R}$

$$z_1=\frac{118}{251}p_1-\frac{60}{251}p_2, z_2=\frac{11}{251}p_1+\frac{339}{251}p_2$$

Об условиях разрешимости

Теорема. Если количество уравнений в билинейной системе

$$A\left(X \right)Z + B\left(X \right)P = 0$$

на единицу превышает количество m «главных» переменных $(z_1 \dots z_m)$, то достаточным условием ее нетривиальной разрешимости является выполнение совокупности некоторых m полиномиальных уравнений (степени $(m + 1)$) и одного полиномиального неравенства (степени m) относительно «базовых» переменных $(x_1 \dots x_n)$.

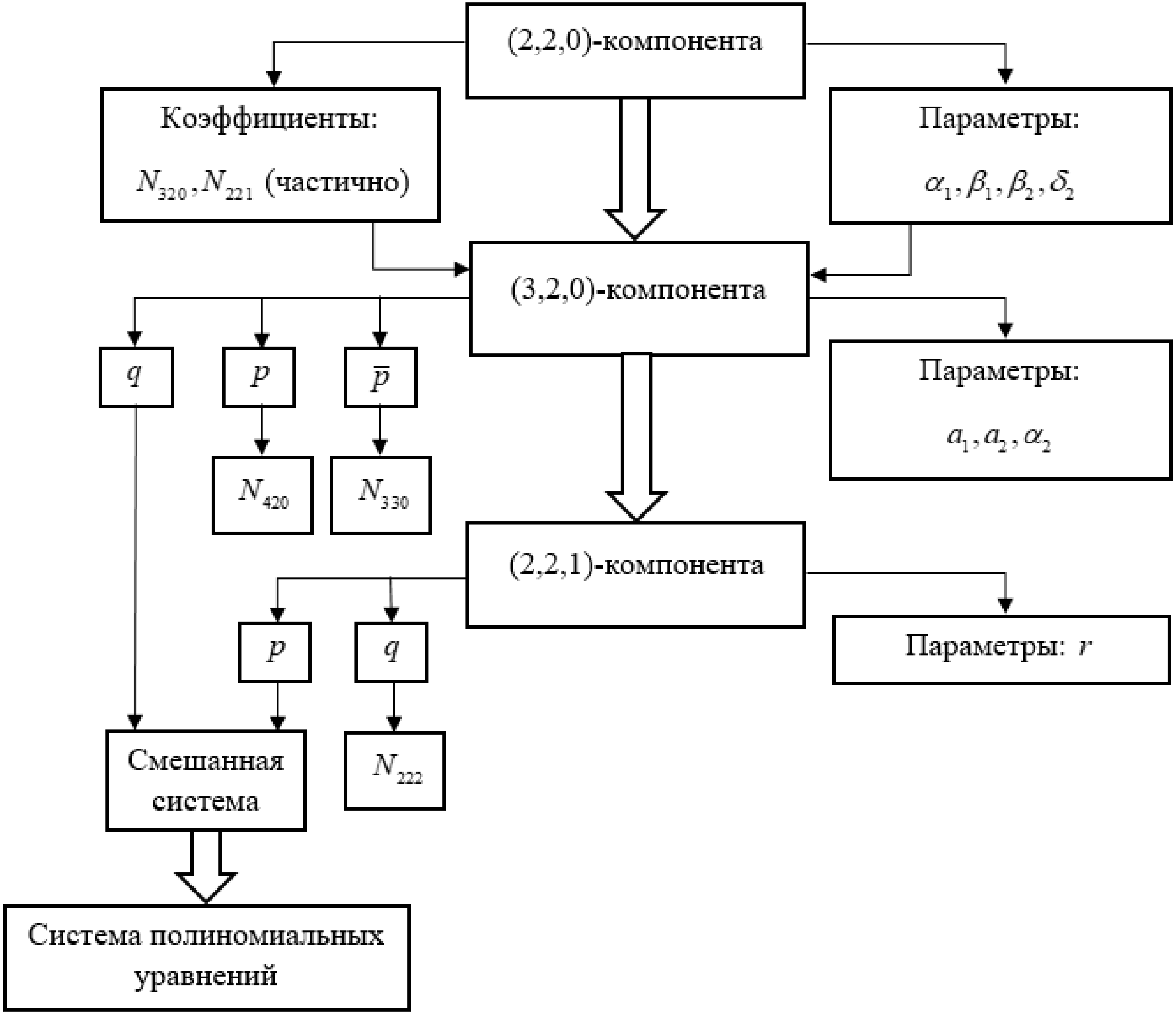
Переход к системе полиномиальных уравнений

1
- 3 векторных уравнения

2
- 30 скалярных уравнений

3
- Удаление второстепенных параметров
- Переход к 20 скалярным уравнениям

4
- Исключение свободных параметров
- Переход к системе 100 на 100


(2,2,0)-компонента
Коэффициенты:
N_{320}, N_{221} (частично)
Параметры:
$\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \delta_2$
(3,2,0)-компонента
q
p
$\bar{p}$
N_{420}
N_{330}
Параметры:
a_1, a_2, α_2
(2,2,1)-компонента
p
q
Параметры: r
Смешанная система
N_{222}
Система полиномиальных уравнений

Сложность вычислений

Пример 1. В процессе многошаговых подстановок число слагаемых в отдельных уравнениях обсуждаемой системы достигает 800; часть уравнений обнуляется, а одно факторизуется на 3 комплексных многочлена 5-степени от 6 вещественных переменных.

Пример 2. Базис Гребнера для идеала из 30 нелинейных многочленов от 9 переменных содержит 64 многочлена, 3 из которых имеют вид:

$$u_{10}\left(1+u_{10}^2+v_{10}^2\right), v_{10}\left(1+u_{10}^2+v_{10}^2\right), v_{11}\left(1+u_{10}^2+v_{10}^2\right).$$

Вычислительные результаты

Специальное нормальное уравнение однородной поверхности удовлетворяющее условиям:

1. $N_{220} = E_3 + \mu E_0,\ \mu \in \mathbb{R},$
2. $\omega_3 \neq 0,$

полностью определяется 13 коэффициентами: параметром μ, многочленом N_{320} и одним вещественным коэффициентом из тройки $Re\left(t_4\right), Im\left(t_4\right), \lambda_2'$.

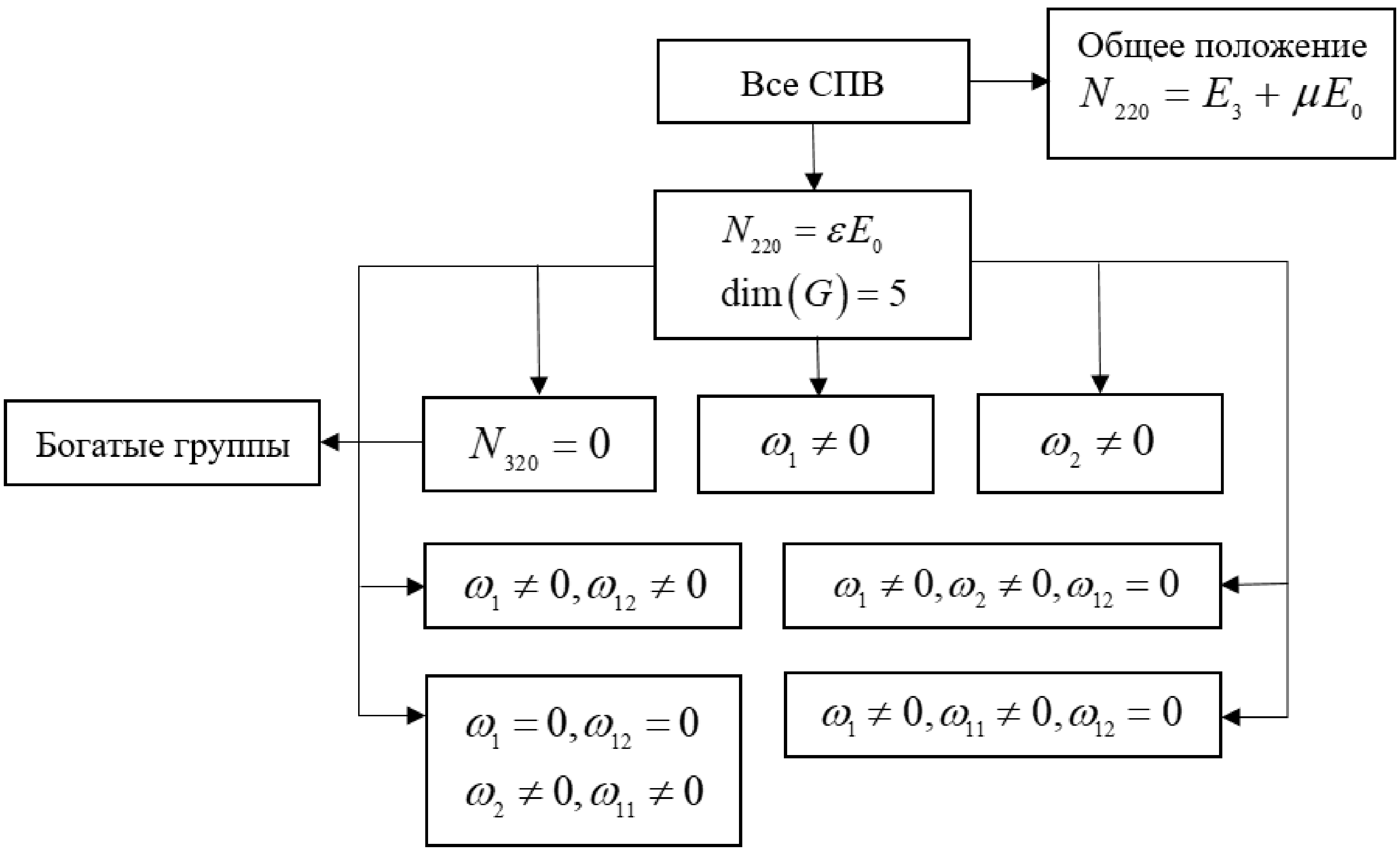
Замечание. В случае вещественного многочлена N_{320} и при $\mu = 0$ изучаемая поверхность определяется 7 вещественными коэффициентами.

Вычислительные результаты

1. НЕ существует однородных поверхностей при $N_{320} = 0$ (математически установленный факт).

2. У многочлена N_{320} из специального нормального уравнения однородной поверхности в $\mathbb{C}^3$ хотя бы один из двух коэффициентов ω_3, ω_{10} отличен от нуля (компьютерные вычисления).

Схема классификации однородности



Матричные представления в E_0-случае

$$N_{330} \sim \begin{pmatrix} t_1 & -\frac{1}{2}\omega_1\omega_{12} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\omega_1\omega_{12} & 3t_1 - \frac{3}{2}\omega_1^2 + 3\omega_{12}^2 & -\frac{9}{4}\omega_1\omega_{12} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4}\omega_1\omega_{12} & -3t_1 + \frac{9}{4}\omega_1^2 - \frac{9}{4}\omega_{12}^2 & -\frac{1}{2}\omega_1\omega_{12} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\omega_1\omega_{12} & -t_1 - \frac{1}{4}\omega_1^2 - \frac{1}{4}\omega_{12}^2 \end{pmatrix}$$

Выводы

1. Теоретически обоснованы возможность и эффективность использования компьютерных алгоритмов и символьных вычислений в задачах, связанных с изучением свойств и классификацией однородных многообразий.

2. Получены оценки числа параметров, описывающих голоморфно-однородные поверхности в $\mathbb{C}^3$ в разных случаях (в частности, в случае общего положения, такие поверхности определяются 13 коэффициентами мозеровского нормального уравнения).

Выводы

3. Частично подтверждена (в случае N_{220} специального вида) гипотеза об определении однородных поверхностей не более чем 3 тейлоровскими коэффициентами.

4. Алгоритмы построения и исследования систем полиномиальных уравнений, связанных с задачей классификации однородных поверхностей 3-мерного комплексного пространства, реализованы в виде программного комплекса

Литература

1. Атанов, А.В., Лобода А.В., Суковых В.И. О голоморфной однородности вещественных гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{C}^3$ // Труды МИАН, Т. 298, 2017, С. 1 – 22.

2. Суковых В.И. Формулы для младших тейлоровских коэффициентов однородных поверхностей // Вестник ВолГУ. Серия 1: Матем. Физика. 2016. № 5(36). С. 104 – 123.

3. Лобода А.В., Суковых В.И. Использование компьютерных алгоритмов в задаче коэффициентного описания однородных поверхностей // Вестник ВГУ. Сист. анализ. 2015. №1. С. 14 – 22.

4. Суковых В.И., О тейлоровских коэффициентах 5-го порядка в уравнениях однородных гиперповерхностях в $\mathbb{C}^3$ // Вестник ВГУ. Физика. Матем. 2018. №1. С. 135 – 150.

Литература

1. Кокс, Литл, О'Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы, М.Мир, 2000.

2. Chern S. S., Moser J. K. Real hypersurfaces in complex manifolds //Acta Math., 133, N 3 . 1974. P. 219 - 271.

3. Лобода А.В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с 2-мерными группами изотропии // Матем. сборник, Т. 192, N 12, 2001. С. 3 – 24.

Спасибо за внимание !