Алгоритмическое вычисление фейнмановских интегралов

А.В. Смирнов

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ

14 декабря 2011 г.

Содержание

Интегралы Фейнмана

- Фейнмановские интегралы по петлевым импульсам — фундаментальные величины при построении квантово-полевых амплитуд в рамках теории возмущений.

$$\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n) = \int \cdots \int \frac{\mathrm{d}^d k_1 \ldots \mathrm{d}^d k_h}{E_1^{a_1} \ldots E_n^{a_n}} .$$

Интегралы Фейнмана

- Фейнмановские интегралы по петлевым импульсам — фундаментальные величины при построении квантово-полевых амплитуд в рамках теории возмущений.

$$\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n) = \int \cdots \int \frac{\mathrm{d}^d k_1 \ldots \mathrm{d}^d k_h}{E_1^{a_1} \ldots E_n^{a_n}} .$$

Здесь k_i, $i = 1, \ldots, h$ — это петлевые импульсы; знаменатели E_r квадратичны или линейны относительно петлевых импульсов $p_i = k_i$, $i = 1, \ldots, h$ и независимых внешних импульсов $p_{h+1} = q_1, \ldots, p_{h+N} = q_N$ диаграммы.

Вычисление интегралов

На современном уровне исследований приходится вычислять миллионы фейнмановских интегралов. Вычисление каждого из этих интегралов аналитическими методами становится нереальным.

Вычисление разбивается на две части:

Вычисление интегралов

На современном уровне исследований приходится вычислять миллионы фейнмановских интегралов. Вычисление каждого из этих интегралов аналитическими методами становится нереальным.

Вычисление разбивается на две части:

- редукцию — сведение всех требуемых интегралов к небольшому количеству так называемых *мастер-интегралов*;

Вычисление интегралов

На современном уровне исследований приходится вычислять миллионы фейнмановских интегралов. Вычисление каждого из этих интегралов аналитическими методами становится нереальным.

Вычисление разбивается на две части:

- редукцию — сведение всех требуемых интегралов к небольшому количеству так называемых *мастер-интегралов*;
- вычисление мастер-интегралов.

Редукция интегралов

Основа редукции интегралов Фейнмана — так называемые соотношения интегрирования по частям (Ткачёв, Четыркин, 1981):

$$\int \ldots \int \mathrm{d}^d k_1 \mathrm{d}^d k_2 \ldots \frac{\partial}{\partial k_i} \left(p_j \frac{1}{E_1^{a_1} \ldots E_n^{a_n}} \right) = 0 \,.$$

После дифференцирования приводим все члены к линейным комбинациям исходных выражений с другими индексами.

Пример

$$F(a) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(k^2 - m^2)^a}$$

Для неположительных целых a имеем $F(a) = 0$, нужно вычислить интеграл для положительных значений.

Пример

$$F(a) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(k^2 - m^2)^a}$$

Для неположительных целых a имеем $F(a) = 0$, нужно вычислить интеграл для положительных значений.
Применяем IBP:

$$\int \mathrm{d}^d k \frac{\partial}{\partial k} \cdot \left(k \frac{1}{(k^2 - m^2)^a} \right) = 0$$

Берем производные:

$$\frac{\partial}{\partial k} \cdot k = \frac{\partial}{\partial k_\mu} \cdot k_\mu = d$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
k \cdot \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{(k^2 - m^2)^a} &= -a \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^{a+1}} \\
&= -2a \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)^a} + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^{a+1}} \right]
\end{aligned}
$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
k \cdot \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{(k^2 - m^2)^a} &= -a \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^{a+1}} \\
&= -2a \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)^a} + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^{a+1}} \right]
\end{aligned}
$$

Приходим к соотношению IBP:

$$(d - 2a)F(a) - 2am^2 F(a+1) = 0$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
k \cdot \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{(k^2 - m^2)^a} &= -a \frac{2k^2}{(k^2 - m^2)^{a+1}} \\
&= -2a \left[\frac{1}{(k^2 - m^2)^a} + \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^{a+1}} \right]
\end{aligned}
$$

Приходим к соотношению IBP:

$$(d - 2a)F(a) - 2am^2 F(a + 1) = 0$$

Его решение:

$$F(a) = \frac{d - 2a + 2}{2(a - 1)m^2} F(a - 1)$$

В результате все интегралы могут быть выражены через один, $F(1)$ — так называемый *мастер-интеграл*.
Явная формула:

$$F(a) = \frac{(-1)^a \,(1 - d/2)_{a-1}}{(a-1)!(m^2)^{a-1}} I_1 \,,$$

где $(x)_a$ — символ Похгаммера.
Перейдем к общему случаю.

Соотношения интегрирования по частям

$$\sum \alpha_i \mathcal{F}(a_1 + b_{i,1}, \ldots, a_n + b_{i,n}) = 0\,,$$

После подстановки конкретных индексов соотношения становятся линейными по интегралам с коэффициентами, являющимися многочленами от размерности и кинематических инвариантов.

Более сложный пример

$$F_\Gamma(a_1, a_2) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}}$$

Более сложный пример

$$F_\Gamma(a_1, a_2) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial}{\partial k}\cdot k \left(\frac{1}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}} \right) \mathrm{d}^d k &= 0\,, \\
\int q\cdot \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}} \right) \mathrm{d}^d k &= 0\,,
\end{aligned}$$

Более сложный пример

$$F_\Gamma(a_1, a_2) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial}{\partial k} \cdot k \left(\frac{1}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}} \right) \mathrm{d}^d k &= 0\,, \\
\int q \cdot \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{(m^2 - k^2)^{a_1}(-(q-k)^2)^{a_2}} \right) \mathrm{d}^d k &= 0\,,
\end{aligned}$$

Используем соотношение
$2k \cdot (k-q) \to (k-q)^2 + (k^2 - m^2) - q^2 + m^2$ и получаем

$$d - 2a_1 - a_2 - 2m^2 a_1 \mathbf{1}^+ - a_2 \mathbf{2}^+ (\mathbf{1}^- - q^2 + m^2) = 0 \quad (A)$$

$$a_2 - a_1 - a_1 \mathbf{1}^+ (q^2 + m^2 - \mathbf{2}^-) - a_2 \mathbf{2}^+ (\mathbf{1}^- - q^2 + m^2) = 0 \quad (B)$$

где, например, $\mathbf{1}^+\mathbf{2}^- F(a_1, a_2) = F(a_1 + 1, a_2 - 1)$.

Методы редукции

- “Вручную”
- Метод Байкова
- Алгоритм Лапорты
- Базисы Грёбнера
- Алгебры Ли

Секторы и упорядочение

Естественная идея — разбить область индексов на секторы

$$\sigma_\nu = \{(a_1, \ldots, a_n) : (a_i - 1/2)d_i > 0\}$$

- Интегралы в “нижних секторах” устроены проще;
- Соотношения, полученные в нижнем секторе, не задевают верхний.

Внутри сектора вводится упорядочение.

Введение упорядочения

Любой набор индексов в секторе записывается как $(a_1, \ldots, a_n) = (p_1 + d_1 b_1, \ldots, p_n + d_n b_n)$, где $(p_1, \ldots, p_n) = ((d_1 + 1)/2, \ldots, (d_n + 1)/2)$ — *угол* сектора, а все b_i неотрицательны;
Набор $(b_1, \ldots, b_n)$ — *отступ от угла*. Упорядочение вводится на отступах (их можно складывать, представляет собой "полугруппу" $\mathbb{N}^n$), а затем по соответствию переносится на точки сектора. Мы ограничиваем себя линейными упорядочениями.

Линейные упорядочения

Упорядочение на $\mathbb{N}^n$ *линейно*, если
i) для каждого $a \in \mathbb{N}^n$, не равного $(0, \dots 0)$, выполняется $a \succ (0, \dots 0)$
ii) для любых $a, b, c \in \mathbb{N}^n$ выполняется $a \succ b$ если и только если $a + c \succ b + c$.

Линейные упорядочения

Упорядочение на $\mathbb{N}^n$ *линейно*, если
i) для каждого $a \in \mathbb{N}^n$, не равного $(0, \ldots 0)$, выполняется $a \succ (0, \ldots 0)$
ii) для любых $a, b, c \in \mathbb{N}^n$ выполняется $a \succ b$ если и только если $a + c \succ b + c$.
Простейший вариант линейного — это *лексикографическое* упорядочение; множество $(i_1, \ldots, i_n)$ при этом упорядочении *старше* множества $(j_1, \ldots, j_n)$, если существует такое $l \leq n$, что $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ..., $i_{l-1} = j_{l-1}$ и $i_l > j_l$. Это понятие записывается как $(i_1, \ldots, i_n) \succ (j_1, \ldots, j_n)$.

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

- Обходим секторы снизу вверх;

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

- Обходим секторы снизу вверх;
- В секторе начинаем увеличивать отступ от угла;

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

- Обходим секторы снизу вверх;
- В секторе начинаем увеличивать отступ от угла;
- Получаем линейные соотношения и их разрешаем относительно выбранного упорядочения;

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

- Обходим секторы снизу вверх;
- В секторе начинаем увеличивать отступ от угла;
- Получаем линейные соотношения и их разрешаем относительно выбранного упорядочения;
- Храним все таблицы в памяти или базе данных;

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

- Обходим секторы снизу вверх;
- В секторе начинаем увеличивать отступ от угла;
- Получаем линейные соотношения и их разрешаем относительно выбранного упорядочения;
- Храним все таблицы в памяти или базе данных;
- Выражаем все интегралы через конечное число интегралов.

Алгоритм Лапорты

Классический алгоритм:

- Обходим секторы снизу вверх;
- В секторе начинаем увеличивать отступ от угла;
- Получаем линейные соотношения и их разрешаем относительно выбранного упорядочения;
- Храним все таблицы в памяти или базе данных;
- Выражаем все интегралы через конечное число интегралов.

В 2010 году доказано утверждение, что число мастер-интегралов конечно (Смирнов, Петухов) $\rightarrow$ обоснование метода редукции.

Иные методы

- Метод Байкова (Байков, 1996);
- Базисы Грёбнера для дифференциальных операторов (Тарасов, 1998);
- Базисы Грёбнера для идеалов в пространстве операторов сдвига и умножения (Гердт, 2004);
- Модифицированные автором базисы Грёбнера в пространстве операторов (Смирнов, 2006);
- Представление соотношений интегрирования по частям как алгебры Ли (Ли, 2008).

Базисы Грёбнера

Фейнмановские интегралы могут быть рассмотрены как элементы поля функций $\mathbb{F}$ от n переменных с целочисленными аргументами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Базисы Грёбнера

Фейнмановские интегралы могут быть рассмотрены как элементы поля функций $\mathbb{F}$ от n переменных с целочисленными аргументами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
На этом поле действует алгебра операторов $\mathbb{A}$, порожденная операторами сдвига и умножения

$$\left(Y_i^{\pm} \cdot \mathcal{F}\right)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \pm 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)\,,$$
$$(A_i \cdot \mathcal{F})(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i \mathcal{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,.$$

Базисы Грёбнера

Эти операторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} Y_i Y_j &= Y_j Y_i, \quad A_i A_j = A_j A_i, \quad Y_i A_j = A_j Y_i + \delta_{i,j} Y_i, \\ Y_i^- Y_j^- &= Y_j^- Y_i^-, \quad Y_i^- Y_j = Y_j Y_i^-, \\ Y_i^- A_j &= A_j Y_i^- - \delta_{i,j} Y_i, \quad Y_i^- Y_i = 1 \end{aligned}$$

Базисы Грёбнера

Соотношения интегрирования по частям являются элементами алгебры $\mathbb{A}$ и порождают собой идеал соотношений.

Базисы Грёбнера

Соотношения интегрирования по частям являются элементами алгебры $\mathbb{A}$ и порождают собой идеал соотношений.
Цель подхода, предложенного Гердтом — построить базис Грёбнера этого идеала с целью упрощения выражения интегралов через мастер интегралы.

Базисы Грёбнера

Соотношения интегрирования по частям являются элементами алгебры $\mathbb{A}$ и порождают собой идеал соотношений.
Цель подхода, предложенного Гердтом — построить базис Грёбнера этого идеала с целью упрощения выражения интегралов через мастер интегралы.
Например, интеграл с положительными индексами может быть представлен как

$$\mathcal{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (Y_1^{a_1-1} \ldots Y_n^{a_n-1} \cdot \mathcal{F})(1, 1, \ldots, 1)\,.$$

Если произвести редукцию монома по идеалу, то можно и выразить любой интеграл через простейшие.

Алгебры Ли

Соотношения интегрирования по частям как элементы алгебры $\mathbb{A}$ имеют еще одну интересную структуру — они представляют собой алгебру Ли.

Алгебры Ли

Соотношения интегрирования по частям как элементы алгебры $\mathbb{A}$ имеют еще одну интересную структуру — они представляют собой алгебру Ли.
А именно, линейные комбинации операторов

$$O_{ik} = \frac{\partial}{\partial l_i} \cdot q_k$$

представляют собой алгебру Ли с коммутационными соотношениями

$$[O_{ik}, O_{jl}] = \delta_{il} O_{jk} - \delta_{jk} O_{il}.$$

Программы, осуществляющие редукцию

- Много частных программ;
- AIR (Анастасиу, Лазопулос, 2004);
- FIRE (Смирнов, 2008);
- Reduze (Студерус, 2010).

FIRE

- Программа, осуществляющая редукцию интегралов;
- Последняя версия — на c++, отказ от базисов, реализация алгоритма Лапорты;
- Параллелизация для секторов одного уровня;
- Полная автоматизация;
- База данных на диске;
- Оригинальный подход к порядку решения соотношений (следующий слайд).

Подход к решению соотношений в FIRE

Новый алгоритм решения соотношений

Подход к решению соотношений в FIRE

Новый алгоритм решения соотношений

- Берем самые старшие интегралы и работаем в секторах одного уровня в параллельном режиме;

Подход к решению соотношений в FIRE

Новый алгоритм решения соотношений

- Берем самые старшие интегралы и работаем в секторах одного уровня в параллельном режиме;
- Работая в секторе, выполняем "маскировку хвостов" — не раскрываем выражения с интегралами, попавшие в более низкие секторы;

Подход к решению соотношений в FIRE

Новый алгоритм решения соотношений

- Берем самые старшие интегралы и работаем в секторах одного уровня в параллельном режиме;
- Работая в секторе, выполняем "маскировку хвостов" — не раскрываем выражения с интегралами, попавшие в более низкие секторы;
- Затем очищаем базу от лишних интегралов;

Подход к решению соотношений в FIRE

Новый алгоритм решения соотношений

- Берем самые старшие интегралы и работаем в секторах одного уровня в параллельном режиме;
- Работая в секторе, выполняем "маскировку хвостов" — не раскрываем выражения с интегралами, попавшие в более низкие секторы;
- Затем очищаем базу от лишних интегралов;
- Изучаем, какие интегралы нужны на меньшем уровне, переходим к ним;

Подход к решению соотношений в FIRE

Новый алгоритм решения соотношений

- Берем самые старшие интегралы и работаем в секторах одного уровня в параллельном режиме;
- Работая в секторе, выполняем "маскировку хвостов" — не раскрываем выражения с интегралами, попавшие в более низкие секторы;
- Затем очищаем базу от лишних интегралов;
- Изучаем, какие интегралы нужны на меньшем уровне, переходим к ним;
- В конце проводим полную подстановку от младших интегралов к старшим.

Рекордный пример (четырехпетлевой массивный пропагатор, 11 положительных индексов, 14 всего, суммарное отклонение достигает четырех в старшем секторе) - в процессе вычисления было задействовано около 220 миллионов интегралов, вычисление производилось на компьютере с 12 ядрами и 64GB оперативной памяти, заняло по времени около месяца. Цель: задачи, в которых в процессе вычисления потребуется более миллиарда интегралов.

Альфа-представление

Параметрическое представление фейнмановских интегралов:

$$\mathcal{F}(a_1 \ldots, a_L; d) = \frac{\mathrm{i}^{a+h(1-d/2)} \pi^{hd/2}}{\prod_l \Gamma(a_l)}$$
$$\times \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_l \alpha_l^{a_l - 1} U^{-d/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}F/U - \mathrm{i}\sum m_l^2 \alpha_l} \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_L \ .$$

где U и F — многочлены от α, алгоритмически определяемые по исходной диаграмме.

Для интеграла Фейнмана с пропагаторами вида $1/(m^2 - k^2 - i0)^{a_l}$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \sum_{\text{деревья } T} \prod_{l \notin T} \alpha_l \,, \\ \mathcal{V} &= \sum_{2\text{–деревья } T} \prod_{l \notin T} \alpha_l \left(q^T\right)^2 \,. \end{aligned}$$

Для интеграла Фейнмана с пропагаторами вида $1/(m^2 - k^2 - i0)^{a_l}$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \sum_{\text{деревья } T} \prod_{l \notin T} \alpha_l \,, \\ \mathcal{V} &= \sum_{2\text{–деревья } T} \prod_{l \notin T} \alpha_l \left(q^T\right)^2 \,. \end{aligned}$$

Например, для безмассового ящика $p_i^2 = 0,\ i = 1, 2, 3, 4,\ s = (p_1 + p_2)^2,\ t = (p_1 + p_3)^2$:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \ , \quad F = s\alpha_1\alpha_3 + t\alpha_2\alpha_4 \ .$$

Первичные секторы

Сначала вводятся так называемые первичные секторы (по количеству альфа-переменных). Сектор l задается условиями $\alpha_l \geq \alpha_i$. Делаются замены переменных $\alpha_l = \alpha'_l$, $\alpha_i = \alpha'_i \alpha'_l$ для $i \neq l$. В новых переменных (после опускания штрихов и взятия интеграла по α_l) получается:

$$\frac{\left(\mathrm{i}\pi^{d/2}\right)^h \Gamma(a - hd/2)}{\prod_l \Gamma(a_l)} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_l^{L-1} \alpha_l^{a_l - 1}$$

$$\times \frac{\hat{U}^{a-(h+1)d/2}}{\left[-\hat{F} + \hat{U}\left(\sum_{l=1}^{L-1} m_l^2 \prod_{l=l'}^{L-1} \alpha_{l'} + m_L^2\right)\right]^{a-hd/2}} \mathrm{d}\alpha_1 \dots \mathrm{d}\alpha_{L-1} \,.$$

где $\hat{U}$ и $\hat{F}$ получаются их U и F заменой α_l на единицу.

Разложение по секторам

После подстановки всех кинематических инвариантов мы бы могли вычислять эти интегралы численно, если бы не зависимость от $d = 4 - 2\varepsilon$. Поменять местами интегрирование и разложение в ряд по ε невозможно — нужно разрешить особенности.
Метод разложения по секторам.

Разложение по секторам

После подстановки всех кинематических инвариантов мы бы могли вычислять эти интегралы численно, если бы не зависимость от $d = 4 - 2\varepsilon$. Поменять местами интегрирование и разложение в ряд по ε невозможно — нужно разрешить особенности.

Метод разложения по секторам. Пример:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx$$

Разложение по секторам

После подстановки всех кинематических инвариантов мы бы могли вычислять эти интегралы численно, если бы не зависимость от $d = 4 - 2\varepsilon$. Поменять местами интегрирование и разложение в ряд по ε невозможно — нужно разрешить особенности.
Метод разложения по секторам. Пример:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx = 2 \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx$$

Разложение по секторам

После подстановки всех кинематических инвариантов мы бы могли вычислять эти интегралы численно, если бы не зависимость от $d = 4 - 2\varepsilon$. Поменять местами интегрирование и разложение в ряд по ε невозможно — нужно разрешить особенности.
Метод разложения по секторам. Пример:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx = 2 \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx =$$

$$2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(x+xz)^{2-\varepsilon}} dzdx$$

Разложение по секторам

После подстановки всех кинематических инвариантов мы бы могли вычислять эти интегралы численно, если бы не зависимость от $d = 4 - 2\varepsilon$. Поменять местами интегрирование и разложение в ряд по ε невозможно — нужно разрешить особенности.
Метод разложения по секторам. Пример:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx = 2\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{(x+y)^{2-\varepsilon}} dydx =$$

$$2\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(x+xz)^{2-\varepsilon}} dzdx = 2\int_0^1 \int_0^1 x^{-1+\varepsilon} \frac{1}{(1+z)^{2-\varepsilon}} dzdx$$

Стратегии разложения

Итерационно определяются секторы и делаются замены. Имеется множество стратегий:

- Стратегия A (Спиваковский, 1983);
- Стратегии B (Богнер и Вайнцирль, 2008);
- Стратегия X (Бинот и Хайнрих, 2000);
- Стратегия S (Смирнов и Тентюков, 2008);
- Переработанные классические секторы Хеппа и Спира (Смирнов, Смирнов, 2009);
- Альтернативный геометрический подход (Kaneko, 2009).

Стратегии разложения

Стратегии гарантированно сходятся, если все мономы F положительны (допороговое разложение). На пороге также есть методы предразрешения особенностей. Допустим теперь, что секторное разложение выполнено. Как теперь интегрировать?

Стратегии разложения

Стратегии гарантированно сходятся, если все мономы F положительны (допороговое разложение). На пороге также есть методы предразрешения особенностей. Допустим теперь, что секторное разложение выполнено. Как теперь интегрировать?

$$x^{a-1+b\varepsilon}Y(x)$$

Стратегии разложения

Стратегии гарантированно сходятся, если все мономы F положительны (допороговое разложение). На пороге также есть методы предразрешения особенностей. Допустим теперь, что секторное разложение выполнено. Как теперь интегрировать?

$$x^{a-1+b\varepsilon}Y(x) =$$

$$Y(0)x^{a-1+b\varepsilon} + Y'(0)x^{a+b\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{(-a)!}Y^{(-a)}(0)x^{-1+b\varepsilon}$$

Стратегии разложения

Стратегии гарантированно сходятся, если все мономы F положительны (допороговое разложение). На пороге также есть методы предразрешения особенностей. Допустим теперь, что секторное разложение выполнено. Как теперь интегрировать?

$$x^{a-1+b\varepsilon}Y(x) =$$

$$Y(0)x^{a-1+b\varepsilon} + Y'(0)x^{a+b\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{(-a)!}Y^{(-a)}(0)x^{-1+b\varepsilon} +$$

$$x^{a-1+b\varepsilon}(Y(x) - Y(0) - Y'(0)x - \ldots - \frac{1}{(-a)!}Y^{(-a)}(0)x^{-a})$$

Проблемы при численном интегрировании

- Необходимо вычислить интеграл по единичному кубу от "почти" рациональной функции (с включениями логарифмов);
- Функция ведет себя "хорошо" (максимум логарифмический рост в нуле);
- Функция является суммой слагаемых, ведущих себя "плохо" — сильный степенной рост в нуле;
- Хотя мы собираемся на выходе получить значение с малой точностью, при вычислении интеграла приходится использовать библиотеки высокой точности (mpfr).

FIESTA

- Программа для вычисления интегралов методом разложения по секторам;
- Автоматически вычисляет функции U и F;
- Автоматически строит секторное разложение и разложение в ряд (на Wolfram Mathematica, с использованием параллелизации);
- Интегрирует с использованием своего “компилятора” на c++.
- В качестве интегратора используется Vegas, функции вычисляются с высокой точностью.

Пример вычисления, потребовавший в последнем порядке девятикратных интегралов (тройной безмассовый ящик с концами на световом конусе и переменными Мандельстама $s = -3$ и $t = -1$). Вычисление производилось на восьмиядерном компьютере и заняло около двух суток. Был получен ответ, проверенный впоследствии аналитически:

$$
\begin{aligned}
&(0.065844) * \varepsilon^{-6} + (-0.067866 \pm 0.000042) * \varepsilon^{-5} \\
&+(-0.547921 \pm 0.000448) * \varepsilon^{-4} + (-1.259974 \pm 0.003919) * \varepsilon^{-3} \\
&+(-1.656678 \pm 0.033566) * \varepsilon^{-2} + (-1.378333 \pm 0.299851) * \varepsilon^{-1} \\
&+(5.312113 \pm 2.948721) * 1
\end{aligned}
$$

Результаты

Результаты работ автора можно суммировать следующим образом:

- Математические методы и обоснования;
- Редукция фейнмановских интегралов;
- Вычисление фейнмановских интегралов;
- Асимптотическое разложение фейнмановских интегралов;
- Применения.

Краткий перечень применявшихся методов

- Идеалы и базисы Грёбнера;
- Геометрия выпуклых многогранников и конусов;
- Алгебраические группы и алгебры Ли;
- Теория D-модулей;
- PSLQ — нахождение трансцендентных чисел по высокоточному численному значению.

Математические результаты

- Теорема о том, что число мастер-интегралов всегда конечно — обоснование современного подхода к вычислению;
- Современная интерпретация секторов Спира (изобретенных в семидесятых годах для доказательства теорем перенормировки);
- Создана и обоснована геометрическая стратегия разложения по секторам;
- Формализован метод областей для разложения фейнмановских интегралов;
- Построен алгоритм предразрешения особенностей до разложения по секторам (или до поиска областей).

Реализованные программные продукты

- FIRE — редукция фейнмановских интегралов;
- FIESTA — вычисление фейнмановских интегралов методом разложения по секторам;
- MBresolve — программа для нахождения оптимального контура для многомерного представления Меллина–Барнса;
- Asy — программа поиска областей для асимптотического разложения;
- Прочие мелкие утилиты и инструменты.

Физические результаты

- Декаплинг с-кварковых петель в процессах с участием b-кварка;
- Трехпетлевой статический кварковый потенциал;
- Кварковые и глюонные трехпетлевые формфакторы;
- Низкоэнергетические моменты корреляторов тяжёлых кварков в четырёхпетлевом приближении.

Список публикаций I

1. А.В. Смирнов, Проективные орбиты редуктивных групп и многогранники Бриона // Успехи математических наук, N 60, 2005:2, с 147—148
2. А.В. Смирнов, Многогранники весов и их приложения к теории представлений алгебраических групп. Диссертация. Москва, 2005.
3. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, Applying Gröbner bases to solve reduction problems for Feynman integrals // JHEP, 01 (2006) 001
4. A.V. Smirnov, An algorithm to construct Gröbner bases for solving integration by parts relations // JHEP 04 (2006) 026

Список публикаций II

5. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, S-bases as a tool to solve reduction problems for Feynman integrals // Nuclear Physics B – Proceedings Supplements, 160 (2006), 80—84
6. A.G. Grozin, A.V. Smirnov, V.A.Smirnov, Decoupling of heavy quarks in HQET // JHEP, 11 (2006) 022
7. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, On the Reduction of Feynman integrals to master integrals // Proceedings of science, PoS(ACAT) 085, 2007.
8. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Applying Mellin-Barnes technique and Groebner bases to the three-loop static potential // Proceedings of science, PoS(RAD COR) 024, 2007.

Список публикаций III

9. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Fermionic contributions to the three-loop static potential // Physics Letters B, 70 (2008) 08
10. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Evaluating the three-loop quark static potential // Nuclear Physics B – Proceedings Supplements, 183 (2008), 308-312
11. A.V. Smirnov, Algorithm FIRE — Feynman Integral Reduction // JHEP 10 (2008) 107
12. A.V. Smirnov, M. Tentioukov, Feynman Integral Evaluation by a Sector decomposiTion Approach (FIESTA) // Computer Physics Communications 180 (2009), pp. 735-746

Список публикаций IV

13. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, Hepp and Speer sectors within modern strategies of sector decomposition // JHEP, 05 (2009) 004
14. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, On the resolution of singularities of multiple Mellin–Barnes integrals // EPJC, 62 (2009) 02, p. 445
15. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Quark and gluon form factors to three loops // Phys. Rev. Lett., 102 (2009)
16. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Full result for the three-loop static potential // PoS (RADCOR 2009) 075 (2010)

Список публикаций V

17 A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, A.V. Smirnov, Low-energy moments of heavy quark current correlators at four loops // Nuclear Physics B, 824 (2010), 1-18

18 - A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Three-loop static potential // Phys. Rev. Lett., 104 (2010)

19 R.N. Lee, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, Analytic results for massless three-loop form factors // JHEP 04 (2010) 020

20 A. Smirnov, M. Tentioukov, Four-loop massless propagators: A numerical evaluation of all master integrals // Nuclear Physics B 837 (2010)

Список публикаций VI

21. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, Three-loop heavy quark potential// PoS (ICHEP 2010) 217 (2010)
22. A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Steinhauser, The static quark potential to three loops in perturbation theory// Nuclear Physics B – Proceedings Supplements, 205-206 (2010), 320—325
23. R. N. Lee, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, Dimensional recurrence relations: an easy way to evaluate higher orders of expansion in epsilon //Nuclear Physics B – Proceedings Supplements, 205-206 (2010), 308-313
24. A.V. Smirnov, M. Tentyioukov, Applications of FIESTA // PoS (ACAT 2010) 081 (2010)

Список публикаций VII

25 A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, M. Tentyioukov, FIESTA 2: parallelizeable multiloop numerical calculations // Computer Physics Communications 182 (2011), 790-803

26 Smirnov, Petukhov, The number of master integrals is finite // Letters in mathematical physics 97 (2011), 37

27 Smirnov, Pak, Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals // EPJC 71 (2011)

28 R. N. Lee, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, On Epsilon Expansions of Four-loop Non-planar Massless Propagator Diagrams //EPJC 71 (2011)

29 R. N. Lee, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov, Master Integrals for Four-Loop Massless Propagators up to Transcendentality Weight Twelve // Nucl. Phys.B (2011)