Факторизация преобразований Дарбу факторизуемых операторов

Екатерина Шемякова

ВЦ РАН

Преобразования Дарбу

- 19 век – в классической дифференциальной геометрии,
- с 1970-х – важный компонент теории интегрируемых систем.
- Могут использоваться напрямую для порождения “точно-решаемых” уравнений Шредингера и для решения нелинейных дифференциальных уравнений.
- Активно изучаются/применяются: С.П.Новиков, А.П. Веселов, П.Г.Гриневич, И.А.Тайманов, С.П.Царев, 2010, 2011, 2012, 2013, и др. В частности, доклад Новикова и Тайманова на конференции, посвященной Гельфанду в декабре 2013.

Определение. Оператор $\mathbf{L}$ переходит в оператор $\mathbf{L}_1$ с тем же главным символом под действием (линейного дифференциального) оператора $\mathbf{M}$, если для некоторого (линейного дифференциального) оператора $\mathbf{N}$ выполняется

$$\mathbf{N}\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{M} \ . \tag{1}$$

Порядком такого Дарбу преобразования мы назовем порядок оператора $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{N}\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{M}\ . \qquad (2)$$

1. Последовательное применение нескольких преобразований Дарбу эквивалентно применению преобразования Дарбу к исходному оператору.
2. Обратное утверждение, т.е. можно ли разложить Дарбу преобразование большого порядка на преобразования Дарбу меньших порядков – открытый вопрос.
3. Факторизация вспомогательного оператора **M** необходима, но не достаточна.

П. Дарбу для 1D оператора Шредингера

Факторизуемость пр-й Дарбу на элементарные:

- Веселов и Шабат, 1993 случай, когда действие преобразований Дарбу изменяют потенциал только на константу.
- Шабат, 1995 случай преобразований Дарбу порядка 2.
- Багров, Самсонов, 1995 общий случай.
- Багров, Самсонов, 1997 погрешности предыдущего доказательства.

Преобразования Дарбу для оператора типа 2D Шредингера

- 2012, случай пр-ий Дарбу порядка 2, используя методы дифференциальной геометрии, инвариантизации.
  [Shemyakova, 2013, Canadian Journal of Mathematics]

Преобразования Дарбу для оператора типа 2D Шредингера

- 2012, случай пр-ий Дарбу порядка 2, используя методы дифференциальной геометрии, инвариантизации. [Shemyakova, 2013, Canadian Journal of Mathematics]
- 2013, доклад в Дубне и [Shemyakova, http://arxiv.org/abs/1304.7063] – преобразования произвольного порядка, алгебраический подход, но один очень особенный случай остался нерассмотренным.

Преобразования Дарбу для оператора типа 2D Шредингера

- 2012, случай пр-ий Дарбу порядка 2, используя методы дифференциальной геометрии, инвариантизации. [Shemyakova, 2013, Canadian Journal of Mathematics]
- 2013, доклад в Дубне и [Shemyakova, http://arxiv.org/abs/1304.7063] – преобразования произвольного порядка, алгебраический подход, но один очень особенный случай остался нерассмотренным.
- В этом докладе и в статье 2014 (Шемякова, Программирование) рассматриваем этот случай, который

Преобразования Дарбу для оператора типа 2D Шредингера

- 2012, случай пр-ий Дарбу порядка 2, используя методы дифференциальной геометрии, инвариантизации. [Shemyakova, 2013, Canadian Journal of Mathematics]
- 2013, доклад в Дубне и [Shemyakova, http://arxiv.org/abs/1304.7063] – преобразования произвольного порядка, алгебраический подход, но один очень особенный случай остался нерассмотренным.
- В этом докладе и в статье 2014 (Шемякова, Программирование) рассматриваем этот случай, который
  - оказался с некоторой занятной математикой,

Преобразования Дарбу для оператора типа 2D Шредингера

- 2012, случай пр-ий Дарбу порядка 2, используя методы дифференциальной геометрии, инвариантизации. [Shemyakova, 2013, Canadian Journal of Mathematics]
- 2013, доклад в Дубне и [Shemyakova, http://arxiv.org/abs/1304.7063] – преобразования произвольного порядка, алгебраический подход, но один очень особенный случай остался нерассмотренным.
- В этом докладе и в статье 2014 (Шемякова, Программирование) рассматриваем этот случай, который
  - оказался с некоторой занятной математикой,
  - был рассмотрен благодаря критике С.П.Царева, который заметил, что этот случай не будет покрываться методами, используемыми в предыдущих статьях.

Итак, преобразования Дарбу определяются сплетающим соотношением
$\mathbf{NL} = \mathbf{L}_1\mathbf{M}$
(на самом деле с точностью до отношения эквивалентности $\mathbf{M} \to \mathbf{M} + \mathbf{AL}$, $\mathbf{N} \to \mathbf{N} + \mathbf{L}_1\mathbf{A}$)

- Главные символы операторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ совпадают
- Вспомогательные операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ играют существенно разные роли. Если операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ заданы, то сплетающее соотношение задает для коэффициентов оставшихся операторов чисто алгебраические уравнения.

Алгоритм факторизации, основные идеи работы

ядра L и M имеют общий элемент ψ.

Тогда **M** делится справа (нацело) на $\mathbf{M}_\psi = \partial_x - \psi_x \psi^{-1}$.
Эта факторизация соответствует некоторой факторизации преобразования Дарбу.

Ядра операторов L и M пересекаются тривиально.

тогда $\exists$ следующие преобразования Дарбу операторов первого порядка:

I. $\mathbf{N}\,(\partial_y + a) = (\partial_y + a)\,\mathbf{N}$

II. $\mathbf{N}\,(\partial_x + b) = (\partial_x + b_1)\,\mathbf{M}$

Сопряжением **I.** можно свести к преобразованиям Дарбу оператора ∂_y.
Такие проще расфакторизовать. Затем можно можно построить факторизацию преобразований II.
Наконец, можно поднять эти факторизации до факторизаций исходного оператора второго порядка.

Разделение на случаи

Теорема

Пусть для $\mathbf{L} = (\partial_y + a)(\partial_x + b)$ существует преобразование Дарбу порожденное $\mathbf{M} \in K[\partial_x]$. Тогда
(1) либо $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$ и $\mathbf{L}_1$ обязательно факторизуемо ($k_1 = 0$),
(2) либо $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{L} \neq \{0\}$.

Теорема Пусть $\psi \in K$ и $f = f(y) \in C(y)$, тогда для операторов вида $\mathbf{L} = (\partial_y + a)(\partial_x + b) + k$ верна формула

$$\mathbf{L}(f(y)\psi) = f(y)\mathbf{L}(\psi) + f'(y)\mathbf{M}_y(\psi) \ .$$

Лемма Если в ядре оператора $\mathbf{L}$ есть одновременно два решения:

$$\psi \neq 0 \ , \ f(y)\psi \ , \quad \text{при условии, что } f'(y) \neq 0 \ \text{, то}$$

$\mathbf{L}$ факторизуемо ($k = 0$) и $\mathbf{M}_y(\psi) = 0$.

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = \mathbf{L}_1\mathbf{M}$$

Так как

$$\ker \mathbf{M}_y = \{f(y)\psi\} \ ,$$

где $f(y) \in C(y)$ – параметр и ψ – некоторый фиксированный элемент из K, то

$$\{f(y)\psi\} \subset \ker \left[\mathbf{L}_1\mathbf{M}\right]$$

Так как $\mathbf{M}(f(y)\psi) = f(y)\mathbf{M}(\psi)$, то

1. либо $\psi \in \ker \mathbf{M}$,
2. либо в ядре $\mathbf{L}_1$ есть семейство элементов $\{f(y)\mathbf{M}(\psi)\}$, а значит он факторизуем, и т.д. по Лемме.

Спуск (случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$)

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a_1)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

Идея: “поделить на какой-н. оператор”

Спуск (случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$)

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a_1)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

Идея: "поделить на какой-н. оператор"

Сопряжением: $lc(\mathbf{N}) = lc(\mathbf{M}) = 1$ и $a_1 = a$ (коэфф. при ∂_x^{d+1}), то есть

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

Спуск (случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$)

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a_1)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

Идея: "поделить на какой-н. оператор"

- Сопряжением: $lc(\mathbf{N}) = lc(\mathbf{M}) = 1$ и $a_1 = a$ (коэфф. при ∂_x^{d+1}), то есть

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

  Очевидно, что произведение справа делится на $(\partial_x + b)$. Но, хотим поделить не все это произведение на $(\partial_x + b)$, а только $(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$, чтобы $(\partial_y + a)$ осталось слева.

- Иначе говоря, надо доказать, что $\ker((\partial_x + b_1)\mathbf{M}) \cap \ker \mathbf{M}_y \neq \{0\}$

Спуск (случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$)

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a_1)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

Идея: "поделить на какой-н. оператор"

Сопряжением: $lc(\mathbf{N}) = lc(\mathbf{M}) = 1$ и $a_1 = a$ (коэфф. при ∂_x^{d+1}), то есть

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

Очевидно, что произведение справа делится на $(\partial_x + b)$. Но, хотим поделить не все это произведение на $(\partial_x + b)$, а только $(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$, чтобы $(\partial_y + a)$ осталось слева.

Иначе говоря, надо доказать, что $\ker ((\partial_x + b_1)\mathbf{M}) \cap \ker \mathbf{M}_y \neq \{0\}$ Тогда можно будет делить: существует оператор $T \in K[\partial_x, \partial_y]$ такой, что

$$(\partial_x + b_1)\,\mathbf{M} = \mathbf{T}\,(\partial_x + b) \ .$$

Лемма $\ker\left((\partial_x + b_1)\mathbf{M}\right) \cap \ker \mathbf{M}_y \neq \{0\}$.

От противного. Сплетающее соотношение

$$\mathbf{N}(\partial_y + a)\underbrace{(\partial_x + b)}_{\mathbf{M}_y} = (\partial_y + a)(\partial_x + b_1)\mathbf{M}$$

означает, что есть $C(y)$-отображение

$$\mathbf{M}_y : \quad \ker\Big[(\partial_x + b_1)\mathbf{M}\Big] \to \ker\Big[\mathbf{N}(\partial_y + a)\Big]$$

Ядро этого отображения тривиально. Отсюда можно вывести, что

$$\text{базис } \{u^i\} \to \text{ базис } \{\mathbf{M}_y(u^i)\}$$

$$\mathbf{N}\,(\partial_y + a)\,(f(y)u^i) = f(y)\mathbf{N}\,(\partial_y + a)\,(u^i) + f'(y)\mathbf{N}(u^i)$$
$$0 = 0 + f'(y)\mathbf{N}(u^i)\ ,$$
$$0 = \mathbf{N}(u^i)\ .$$

Таким образом мы построили $C(y)$-линейное отображение

$$\mathbf{M}_y : \ker(\partial_x + b_1)\mathbf{M} \to \ker \mathbf{N}\ ,$$

которое имеет тривиальное ядро, т.е. противоречие с размерностью $\ker \mathbf{N}$.

Спуск (случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$) (Продолжение)

Итак, $\exists T \in K[\partial_x, \partial_y]$ т.ч.

$$(\partial_x + b_1)\,\mathbf{M} = \mathbf{T}\,(\partial_x + b)\ .$$

Подставляем это в сплетающее соотношение:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\partial_y + a)(\partial_x + b) &= (\partial_y + a)(\partial_x + b_1)\mathbf{M} \\
\mathbf{N}\,(\partial_y + a)\,(\partial_x + b) &= (\partial_y + a)\,\mathbf{T}\,(\partial_x + b)\ , \\
(\mathbf{N}\,(\partial_y + a) - (\partial_y + a)\,\mathbf{T})\,(\partial_x + b) &= 0\ , \\
\mathbf{N}\,(\partial_y + a) - (\partial_y + a)\,\mathbf{T} &= 0\ , \\
\mathbf{N}\,(\partial_y + a) &= (\partial_y + a)\,\mathbf{T}\ .
\end{aligned}$$

Посчитаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}\,(\partial_y + a)\,(f(y)\psi) &= (\partial_y + a)\,\mathbf{T}(f(y)\psi)\ , \\
f(y)\mathbf{N}\,(\partial_y + a)\,(\psi) + f'(y)\mathbf{N}(\psi) &= f(y)\,(\partial_y + a)\,\mathbf{T}(\psi) + f'(y)\mathbf{T}(\psi)\ , \\
f'(y)\mathbf{N}(\psi) &= f'(y)\mathbf{T}(\psi)\ , \\
\mathbf{N}(\psi) &= \mathbf{T}(\psi)\ .
\end{aligned}$$

Итак, получили следующие преобразования Дарбу операторов первого порядка:

$$\mathbf{N}\,(\partial_y + a) = (\partial_y + a)\,\mathbf{N} \tag{3}$$

$$\mathbf{N}\,(\partial_x + b) = (\partial_x + b_1)\,\mathbf{M}\ . \tag{4}$$

Итак, получили следующие преобразования Дарбу операторов первого порядка:

$$\mathbf{N}\,(\partial_y + a) = (\partial_y + a)\,\mathbf{N} \tag{3}$$

$$\mathbf{N}\,(\partial_x + b) = (\partial_x + b_1)\,\mathbf{M}\ . \tag{4}$$

Идея: теперь надо как-то расфакторизовать эти преобразования Дарбу, а потом поднять их.

Итак, получили следующие преобразования Дарбу операторов первого порядка:

$$\mathbf{N}\,(\partial_y + a) = (\partial_y + a)\,\mathbf{N} \tag{3}$$
$$\mathbf{N}\,(\partial_x + b) = (\partial_x + b_1)\,\mathbf{M}\ . \tag{4}$$

Идея: теперь надо как-то расфакторизовать эти преобразования Дарбу, а потом поднять их.

Но несмотря на то, что преобразования Дарбу теперь простые, факторизация $\mathbf{N}$ не достаточное, а опять-таки только необходимое условие.

Пример

Пусть после сведения к пр-ям Дарбу первого порядка имеется

$$\underbrace{\left(\partial_x^2 - 2y^2\partial_x + y^4\right)}_{\mathbf{N}}\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)\underbrace{\left(\partial_x^2 - 2y^2\partial_x + y^4\right)}_{\mathbf{N}}$$

Пример плохой факторизации оператора N

$$\mathbf{N} = \underbrace{\left(\partial_x - y^2 + \frac{1}{x+y}\right)}_{\mathbf{N_1}}\underbrace{\left(\partial_x + y^2 + \frac{1}{x+y}\right)}_{\mathbf{N_2}}$$

Соответствующая факторизация (если существует) пр-й Дарбу имеет вид:

$$N_1\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)N_1$$
$$N_2\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)N_2$$

Подставляя $\mathbf{N}_1$, и рассматривая первое равенство на коэффициентах, получаем противоречие. Второе равенство тоже не выполняется.

Пример

Пусть после сведения к пр-ям Дарбу первого порядка имеется

$$\underbrace{\left(\partial_x^2 - 2y^2\partial_x + y^4\right)}_{\mathbf{N}}\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)\underbrace{\left(\partial_x^2 - 2y^2\partial_x + y^4\right)}_{\mathbf{N}}$$

Пример плохой факторизации оператора N

$$\mathbf{N} = \underbrace{\left(\partial_x - y^2 + \frac{1}{x+y}\right)}_{\mathbf{N_1}}\underbrace{\left(\partial_x + y^2 + \frac{1}{x+y}\right)}_{\mathbf{N_2}}$$

Соответствующая факторизация (если существует) пр-й Дарбу имеет вид:

$$N_1\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)N_1$$
$$N_2\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)N_2$$

Подставляя $\mathbf{N}_1$, и рассматривая первое равенство на коэффициентах, получаем противоречие. Второе равенство тоже не выполняется.

Как искать правильные факторизации оператора N?

Классификация пр-й Дарбу операторов ∂_y

Пр-я Дарбу для $\partial_y + a$ можно свести к пр-ям Дарбу для ∂_y. Опишем структуру последних.

Theorem

Преобразования Дарбу

$$\mathbf{A}\partial_y = \partial_y \mathbf{A}_1 \ , \ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in K[\partial_x] \tag{5}$$

(1) существуют $\iff$ $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ и коэффициенты $\mathbf{A}$ принадлежат $C(x)$;
(2) образуют кольцо R_y, где произведение преобразований Дарбу соответствует произведению операторов $\mathbf{A}$, а сложение – сложению операторов $\mathbf{A}$;
(3) Для каждого из таких преобразований существует $\mathbf{A}_\alpha \in K[\partial_x]$ – собственный (неважно правый или левый) делитель оператора такой, что $\mathbf{A}_\alpha \in R_y$.

Классификация пр-й Дарбу операторов ∂_y

Пр-я Дарбу для $\partial_y + a$ можно свести к пр-ям Дарбу для ∂_y. Опишем структуру последних.

Theorem

Преобразования Дарбу

$$\mathbf{A}\partial_y = \partial_y \mathbf{A}_1 \ , \ \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in K[\partial_x] \tag{5}$$

(1) существуют $\iff$ $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ *и коэффициенты* $\mathbf{A}$ *принадлежат* $C(x)$*;*
(2) образуют кольцо R_y*, где произведение преобразований Дарбу соответствует произведению операторов* $\mathbf{A}$*, а сложение – сложению операторов* $\mathbf{A}$*;*
(3) Для каждого из таких преобразований существует $\mathbf{A}_\alpha \in K[\partial_x]$ *– собственный (неважно правый или левый) делитель оператора такой, что* $\mathbf{A}_\alpha \in R_y$*.*

Т.о. нужно расфакторизовать так, чтобы у соответствующего оператора $\mathbf{A}$ все коэффициенты принадлежали $C(x)$.

Пример (продолжение)

$$\underbrace{\left(\partial_x^2 - 2y^2\partial_x + y^4\right)}_{\mathbf{N}}\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)\underbrace{\left(\partial_x^2 - 2y^2\partial_x + y^4\right)}_{\mathbf{N}}$$

$$\downarrow \text{ сопрягаем } e^{xy^2}$$

$$\partial_x^2 \cdot \partial_y = \partial_y \cdot \partial_x^2$$

Теперь, по нашему алгоритму, необходимо найти какую-нибудь факторизацию ∂_x^2, содержащую коэффициенты только по x. Напр.,

$$\partial_x \cdot \partial_x \cdot \partial_y = \partial_y \cdot \partial_x \cdot \partial_x$$

$$\downarrow \text{ сопрягаем } e^{-xy^2}$$

$$\left(\partial_x - y^2\right)\left(\partial_x - y^2\right)\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)\left(\partial_x - y^2\right)\left(\partial_x - y^2\right)$$

Соответствующая факторизация пр-й Дарбу существует, так как

$$\left(\partial_x - y^2\right)\left(\partial_y - 2xy\right) = \left(\partial_y - 2xy\right)\left(\partial_x - y^2\right)$$

Подъём (случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y = \{0\}$)

Итак, пусть $\mathbf{N} = \mathbf{N}_\beta \mathbf{N}_\alpha$ и

$$\mathbf{N}_\alpha \left(\partial_y + a\right) = \left(\partial_y + a\right) \mathbf{N}_\alpha \ . \tag{6}$$

- Между нужными правыми делителями операторов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ есть взаимно-однозначное соответствие: $\partial_x + b : \ \ker \mathbf{M}_\alpha \to \ker \mathbf{N}_\alpha$, значит, $\mathbf{N}_\alpha \left(\partial_x + b\right)$ делится на $\mathbf{M}_\alpha$ справа и

$$\mathbf{N}_\alpha \left(\partial_x + b\right) = \left(\partial_x + b_\alpha\right) \mathbf{M}_\alpha \tag{7}$$

  для некоторого $b_\alpha \in K$.

- Умножим равенство (6) справа на $\mathbf{M}_y = \partial_x + b$:

$$\mathbf{N}_\alpha \left(\partial_y + a\right) \left(\partial_x + b\right) = \left(\partial_y + a\right) \mathbf{N}_\alpha \left(\partial_x + b\right) \ . \tag{8}$$

  и подставив (7), получаем преобразование Дарбу нужного вида:

$$\mathbf{N}_\alpha \left(\partial_y + a\right) \left(\partial_x + b\right) = \left(\partial_y + a\right) \left(\partial_x + b_\alpha\right) \mathbf{M}_\alpha \ . \tag{9}$$

Лемма о достаточности “отфакторизовывания” одного преобразования Дарбу

Предположим для преобразования Дарбу

$$\mathbf{N}\mathbf{L} = \mathbf{L}_1\mathbf{M} \ , \tag{10}$$

некоторого оператора $\mathbf{L} \in K$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}'\mathbf{M}_0 \ ,$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{N}'\mathbf{N}_0$$

т.ч. правым факторам соответствует некоторое пр-е Дарбу оператора $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{N}_0\mathbf{L} = \mathbf{L}_0\mathbf{M}_0 \ .$$

Тогда существует и “подходящее” преобразование Дарбу соответствующее левым факторам:

$$\mathbf{N}'\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_1\mathbf{M}' \ .$$

случай $\ker \mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y \neq \{0\}$

Сопряжением: $b = 0$.
Пусть $\psi \in\ ker\mathbf{M} \cap \ker \mathbf{M}_y \setminus \{0\}$.
Тогда

$$\psi \in \ker \mathbf{L} \cap \ker \mathbf{M} \setminus \{0\}\ .$$

- Если $\psi_x = 0$, то $\mathbf{M} = \mathbf{M}'\partial_x$ для некоторого $\mathbf{M}' \in K[\partial_x]$. Прямым вычислением можно проверить, что существует преобразование Дарбу оператора $\mathbf{L}$, порожденное $\mathbf{M} = \partial_x$. Применим пред. лемму.
- Если $\psi_x \neq 0$, прямым вычислением можно проверить, что существует преобразование Дарбу оператора $\mathbf{L}$, порожденное

$$\mathbf{M}_\psi = \partial_x - \psi_x \psi^{-1}\ , \tag{11}$$

где

$$\mathbf{N}_\psi \mathbf{L} = \mathbf{L}_\psi \mathbf{M}_\psi\ , \tag{12}$$

$$\mathbf{N}_\psi = \partial_x - \psi_{xx} \psi_x^{-1}\ . \tag{13}$$

Согласно лемме выше достаточно доказать, что $\mathbf{N} = \mathbf{N}'\mathbf{N}_\psi$ для некоторого $\mathbf{N}' \in K[\partial_x]$.

Благодарности и планы

Огромная благодарность С.П.Цареву за тщательную проверку всех рассуждений выше.

- Обратимые цепочки
- Супер случай
- Пакет