Обратимые и необратимые преобразования Дарбу

Е.С. Шемякова

ВЦ РАН

Преобразования Дарбу

Преобразования Дарбу - метод нахождения точных решений некоторых линейных и (через задачу обратного рассеяния) нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Веселов, Захаров, Гриневич, Дубровин, Матвеев, Новиков, Шабат, Царев
Kamran, Salle, Tenenblat

Преобразования Дарбу

Преобразования Дарбу для линейных операторов с частными производными

$$\mathbf{L} = \sum_{i+j=0}^{d} a_{ij} D_x^i D_y^j$$

(непостоянные коэффициенты) часто определяют через так называемое *сплетающее соотношение*

$$\mathbf{N} \circ \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{M} \ . \qquad (*)$$

Таким образом мы определяем преобразование $\mathbf{L} \xrightarrow{\mathbf{M}} \mathbf{L}_1$ оператора $\mathbf{L}$ в оператор $\mathbf{L}_1$ такого же вида с помощью дополнительного оператора $\mathbf{M}$.
Многочисленные и различные обобщения преобразований Дарбу:
для операторов более общего вида и, например,
для twisted derivation D удовлетворяющей $D(AB) = D(A) + \sigma(A)B$, где σ – гомоморфизм.

Преобразования Дарбу и вронскианы

Из вронскианов можно получать преобразования Дарбу.

Преобразования Дарбу для операторов многих видов можно построить используя формулы с вронскианами, которые изначально были придуманы Дарбу для операторов вида

$$\mathbf{L} = D_{xy} + aD_x + bD_y + c \tag{1}$$

(коэффициенты непостоянны в общем виде). Впоследствии, оказалось, что такие же формулы можно использовать для построения преобразований Дарбу для операторов и других видов.

Мало известно о “не-вронскиановских” преобразованиях Дарбу.

Известны только два преобразования Дарбу - так называемые преобразования Лапласа. Последние определены только для операторов вида (1).

Преобразования Дарбу порожденные $\mathbf{M} = D_x$, $\mathbf{M} = D_y$

Преобразования Дарбу первого порядка всегда можно свести к таким.

Lemma

Пусть $\mathbf{L}$ *– произвольный линейный оператор с частными производными в кольце* $K[D_x, D_y]$, *где* K *– некое дифференциальное поле коэффициентов, то есть*

$$\mathbf{L} = \sum_{i+j=0}^{d} a_{ij} D_x^i D_y^j \ , \ a_{ij} \in K \ . \qquad (**)$$

Если существует преобразование Дарбу для пары $(\mathbf{L}, \mathbf{M} = D_x + m)$, $m \in K$ *тогда существует и для пары* $(g^{-1}\mathbf{L}g, D_x)$ *для любого обратимого* $g \in K$.

Если существует преобразование Дарбу для пары $(\mathbf{L}, \mathbf{M} = D_y + m)$, $m \in K$ *тогда существует и для пары* $(g^{-1}\mathbf{L}g, D_y)$ *для любого обратимого* $g \in K$.

Theorem

$$\mathbf{L} = \sum_{i+j=0}^{d} a_{ij} D_x^i D_y^j \ , \ a_{ij} \in K \qquad (**)$$

имеет преобразование Дарбу порожденное $\mathbf{M} = D_x \iff$ *все ненулевые коэффициенты отличаются друг от друга умножением на какую-то функцию, зависящую только от переменной* y.

То есть для всех ненулевых a_{0j} *и* a_{0k}, $j = 0, \ldots, d$, $k = 0, \ldots, d$ *выполняются соотношения*

$$a_{0j} = G_{jk}(y) a_{0k} \qquad (2)$$

для некоторых $G_{jk}(y)$.

Аналогично, для $\mathbf{L}$ *существует преобразование Дарбу порожденное* $\mathbf{M} = D_y$ $\iff$ *для всех ненулевых коэффициентов*

$$a_{i0} = F_{ik}(x) a_{k0} \qquad (3)$$

для некоторых $F_{ik}(x)$.

Обратимость преобразований Дарбу

Определение.

Рассмотрим преобразование Дарбу $\mathbf{L} \to \mathbf{L}_1$, определенное сплетающим соотношением

$$\mathbf{N} \circ \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{M} \ . \qquad (*)$$

Этому преобразованию операторов соответствует отображение линейных векторных пространств

$$\ker \mathbf{L} \to \ker \mathbf{L}_1 : w \mapsto \mathbf{M} w$$

Скажем, что преобразование Дарбу обратимо, если соответствующее преобразование ядер является изоморфизмом, то есть ядро этого преобразования нулевое:

$$\ker \mathbf{L} \cap \ker \mathbf{M} = \{0\} \ .$$

Преобразования Дарбу, построенные с помощью вронскианов необратимы...

Берем элементы ядра $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \ker \mathbf{L}$ и строим $\mathbf{M}$, используя вронскианы, что автоматически означает, что $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \ker \mathbf{M}$.

Критерий обратимости преобразований Дарбу

Теорема

Пусть

$$\mathbf{L} = \sum_{i+j=0}^{d} a_{ij} D_x^i D_y^j \ , \ a_{ij} \in K \qquad (**)$$

имеет преобразование Дарбу порожденное $\mathbf{M} = D_x$ или $\mathbf{M} = D_y$. Тогда

$$\dim(\ker(\mathbf{L}) \cap \ker(\mathbf{M})) = \left[\begin{array}{ll} \infty \ , & a_{0k} = 0, \ \forall k \in \{0, \ldots, d\} \ , \\ d_y \ , & \text{во всех остальных случаях} \ , \end{array} \right.$$

где d_y – максимальный индекс j такой, что $a_{0j} \neq 0$.

В частности, имеем критерий обратимости:
преобразование Дарбу обратимо $\Longleftrightarrow$ выполняются все следующие условия:

$$\begin{cases} a_{0k} = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, d\} \ , \\ a_{00} \neq 0 \ . \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть существует преобразование Дарбу для пары $(\mathbf{L}, D_x)$. Ядро оператора $\mathbf{M}$ состоит из функций вида $g = g(y)$.
Пусть существует число $k > 0$ такое, что $a_{0k} \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(g(y)) &= \sum_{j=0}^{d} a_{0j} D_y^j(g(y)) \\ &= a_{0k} \sum_{j=0}^{d} G_{jk}(y) D_y^j(g(y)) \ . \end{aligned}$$

То есть $\mathbf{L}(g(y)) = 0$ – линейный дифур порядка d_y. Размерность пространства решений такого уравнения – d_y.

Если же не существует такого k, то либо $a_{00} = 0$ тоже и $\ker \mathbf{L} \cap \ker \mathbf{M} = \{f(y)\}$, либо $a_{00} \neq 0$ и $\ker \mathbf{L} \cap \ker \mathbf{M} = \{0\}$.

Аналогично для преобразований с D_y.

Преобразования Лапласа – единственные обратимые для $D_{xy} + aD_x + bD_y + c$

Преобразования Лапласа – два специальных частных случая преобразований Дарбу для операторов вида

$$\mathbf{L} = D_{xy} + aD_x + bD_y + c \tag{4}$$

(в общем случае с непостоянными коэффициентами). Эти преобразования соответствуют

$$\mathbf{M} = D_x + b \text{ и } \mathbf{M} = D_y + a \ .$$

Следствие

Преобразования Лапласа – единственные обратимые преобразования Дарбу для операторов вида (4).

Докажем это, попутно иллюстрируя использование полученного критерия.

Доказательство. Любое преобразование Дарбу для операторов вида (4) – это либо композиция преобразований Лапласа, либо может быть построено с помощью вронскианов. Последние - необратимы по построению.

- [She12b] - для преобразований первого порядка,
- [She12a] - для преобразований второго порядка,
- и новый результат - для преобразований произвольного порядка (сведено к предыдущим случаям).

Рассмотрим преобразование Дарбу для пары $(\mathbf{L}, \mathbf{M} = D_x + b)$, то есть $\mathbf{L} \to \mathbf{L}_1$ определенное сплетающим соотношением

$$\mathbf{N} \circ \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{M} \ . \qquad (*)$$

Чтобы воспользоваться критерием, сопряжем оба оператора пары $(\mathbf{L}, \mathbf{M} = D_x + b)$ с помощью подходящего элемента g так, чтобы в результате сопряжения $\mathbf{M}$ стал бы просто оператором D_x. Для этого возьмем любое g удовлетворяющее $g_x g^{-1} = -b$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}^g &= g^{-1}\mathbf{L}g \ , \\
&= D_xD_y + (a + g_y g^{-1})D_x + (b + g_x g^{-1})D_y + c + a g_x g^{-1} + b g_y g^{-1} + g_{xy} g^{-1} \ , \\
&= D_xD_y + (a + g_y g^{-1})D_x + c - ab + b g_y g^{-1} + g_{xy} g^{-1} \ , \\
&= D_xD_y + (a + g_y g^{-1})D_x + c - ab - b_y \ , \\
&= D_xD_y + (a + g_y g^{-1})D_x + k \ ,
\end{aligned}
$$

где k – один из так называемых инвариантов Лапласа. Вспомним полученный критерий обратимости: преобразование Дарбу обратимо $\Longleftrightarrow$ выполняются все следующие условия:

$$
\begin{cases} a_{0k} = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, d\} \ , \\ a_{00} \neq 0 \ . \end{cases}
$$

Таким образом, $k \neq 0$ есть необходимое и достаточное условие обратимости.

Вспомним, что строгое преобразование Лапласа требует именно условия $k \neq 0$.

Теперь понятно как генерировать обратимые преобразования Дарбу

Например,

$$\mathbf{L} = D_x D_y^2 + D_x^2 + xD_x + 1 \ .$$

и $\mathbf{M} = D_x$ согласно критерию генерируют обратимое преобразование Дарбу. Результат этого преобразования – оператор

$$\mathbf{L}_1 = D_x D_y^2 + D_x^2 + xD_x + 2 \ .$$

Соответствующий вспомогательный оператор $\mathbf{N} = D_x$. В этом случае существует и обратимое преобразование операторов:

$$\mathbf{L}_1 \mapsto \mathbf{L}$$

осуществляемое с помощью вспомогательных операторов $\mathbf{M}' = \mathbf{N}' = D_x$.

Любой такой пример автоматически порождает серию примеров обратимых преобразований с $\mathbf{M}$ вида $D_x + m$ или $D_y + m$, $m \neq 0$.

Когда вронскианы дают преобразования Дарбу?

Сначала автор получил один пример, когда вронскианы не работают:

$$\mathbf{L} = D_x^2 D_y + y D_x^2 + x D_y^2 + 1$$

и

$$\psi_1 = \sin\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \in \ker \mathbf{L} \ .$$

Легко проверить, что "вронскиановские формулы" для $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M}(\psi) = \mathbf{M}_x(\psi) = \left(D_x - \frac{\psi_{1,x}}{\psi_1}\right)(\psi) = \frac{\begin{vmatrix} \psi & \partial_x \psi \\ \psi_1 & \partial_x \psi_1 \end{vmatrix}}{-|\psi_1|} \ ,$$

$$\mathbf{M}(\psi) = \mathbf{M}_y(\psi) = \left(D_y - \frac{\psi_{1,y}}{\psi_1}\right)(\psi) = \frac{\begin{vmatrix} \psi & \partial_y \psi \\ \psi_1 & \partial_y \psi_1 \end{vmatrix}}{-|\psi_1|}$$

не дают преобразований Дарбу, то есть нельзя найти операторы $\mathbf{L}_1, \mathbf{N}$ такие, что имеет место сплетающее соотношение

$$\mathbf{N} \circ \mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{M} \ . \qquad (*)$$

Когда же вронскианы работают?

Теорема

Для

$$\mathbf{L} = \sum_{i+j=0}^{d} a_{ij} D_x^i D_y^j \ , \ a_{ij} \in K \qquad (**)$$

положим k, где $k = d$, если $a_{0d} \neq 0$, и $k = d - 1$, если $a_{0d} = 0$. Пусть существуют k решений исходного уравнения отличающихся друг от друга умножением на функцию только от y, но все же линейно независимых и даже строки производных должны быть существенно разными. Строго говоря, пусть существуют

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k \in \ker \mathbf{L}/\{0\} \ , \quad \frac{\psi_i}{\psi_1} = T_i(y) \ , \quad W_{0,k-1}(1, T_2, \ldots, T_k) \neq 0 \ ,$$

для некоторых непостоянных функций $T_i(y) \in K$, $i = 2, \ldots, k$.
Тогда существует преобразование Дарбу для оператора $\mathbf{L}$ порожденное вронскианом с помощью решения ψ_1. То есть с помощью

$$\mathbf{M} = D_x - \frac{\psi_{1,x}}{\psi_1} \ .$$

Справедлив и аналогичный признак существования преобразования Дарбу с $\mathbf{M} = D_y - \frac{\psi_{1,y}}{\psi_1}$.

Эта теорема для случая операторов $D_xD_y + aD_x + bD_y + c$ согласуется с результатами Дарбу

Рассмотрим операторы вида

$$D_xD_y + aD_x + bD_y + c \ , \quad a, b, c \in K$$

Согласно теореме $k = d$, если $a_{0d} \neq 0$, и $k = d - 1$, если $a_{0d} = 0$. То есть в данном случае $k = 1$.
Это означает, что достаточно иметь только одно решение исходного уравнения, то есть $\psi \in \ker \mathbf{L}$, чтобы гарантировать, что $\mathbf{M}$ полученное из формул вронскинов и этого решения позволяет строить преобразование Дарбу.

Доказательство.

Сопряжем оператор $\mathbf{L}$ с помощью одного из решений исходного уравнения:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L}^{\psi_1} = \sum_{i+j=0}^{d} a'_{ij} D_x^i D_y^j \ .$$

Тогда ядру этого оператора принадлежат решения исходного, деленные на ψ_1, то есть

$$1 \in \ker \mathbf{L}' \ , \quad T_i(y) \in \ker \mathbf{L}' \ , i = 1, \ldots, k \ .$$

Это означает, что $a'_{00} = 0$, и

$$\sum_{j=1}^{d} a'_{0j} D_y^j (T_i(y)) = 0 \ , i = 2, \ldots, k \ . \qquad \text{(sys)}$$

Последнее является системой $k-1$ линейных уравнений. Число неизвестных a'_{0j} равно числу ненулевых a'_{0j}, $j = 1, \ldots, d$.
Если $k = d$, то число неизвестных меньше или равно k.
Если $k = d-1$, то $a_{0d} = 0$, и так как главный символ оператора инвариантен относительно калибровочных преобразований, то $a'_{0d} = a_{0d} = 0$.
Это означает, что число неизвестных меньше или равно k.

Так как по условию,

$$W_{0,k-1}(1, T_2, \ldots, T_k) = \begin{vmatrix} 1 & T_2 & \ldots & T_k \\ 0 & T_2' & \ldots & T_k' \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & T_2^{(k-1)} & \ldots & T_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \ ,$$

то линейная система (sys) имеет матрицу с рангом $k-1$ и так как число неизвестных равно k, то имеют место условия

$$a'_{0j} = G_{jk}(y) a'_{0k}$$

для всех ненулевых a'_{0j} и a'_{0k}, $j = 0, \ldots, d$, $k = 0, \ldots, d$ для некоторых $G_{jk}(y) \in K$.

Т.о. по теореме, доказанной вначале доклада, существует преобразование Дарбу для пары $(\mathbf{L}', D_x)$. Это означает, что существует преобразование Дарбу для пары $(\mathbf{L}, \psi_1 D_x \psi_1^{-1})$, то есть для пары $(\mathbf{L}, D_x - \psi_{1,x}\psi_1^{-1})$.

К сожалению, пока нет критерия возможности использования вронскианов. Хотя на самом деле, наш признак является “почти критерием”.

Корень проблема заключается в том, что максимальное j такое что $a_{0j} \neq 0$ не является инвариантом относительно калибровочных преобразований.

E. Shemyakova.

Proof of the Completeness of Darboux Wronskian Formulas for Order Two.

Canadian Journal of Mathematics, 2012.

http://arxiv.org/abs/1111.1338 and
http://cms.math.ca/10.4153/CJM-2012-026-7#.

Ekaterina Shemyakova.

Laplace transformations as the only degenerate Darboux transformations of first order.

Programming and Computer Software (Russian Academy of Science), 38(2):105–108, 2012.

S.Abramov, S.Tsarev eds.