АЛГОРИТМЫ

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Т.М. Садыков

РЭУ им. Г.В. Плеханова

ПЛАН ДОКЛАДА

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Ортогональные многочлены

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Ортогональные многочлены

2. Тропическая геометрия

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Ортогональные многочлены

2. Тропическая геометрия

3. Амебы алгебраических гиперповерхностей

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Ортогональные многочлены
2. Тропическая геометрия
3. Амебы алгебраических гиперповерхностей
4. Гипергеометрические функции

ПЛАН ДОКЛАДА

1. Ортогональные многочлены

2. Тропическая геометрия

3. Амебы алгебраических гиперповерхностей

4. Гипергеометрические функции

5. Основной результат

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

Многочлены Чебышева первого рода $\boldsymbol{T_n(x) = \cos(n \arccos x)}$.

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

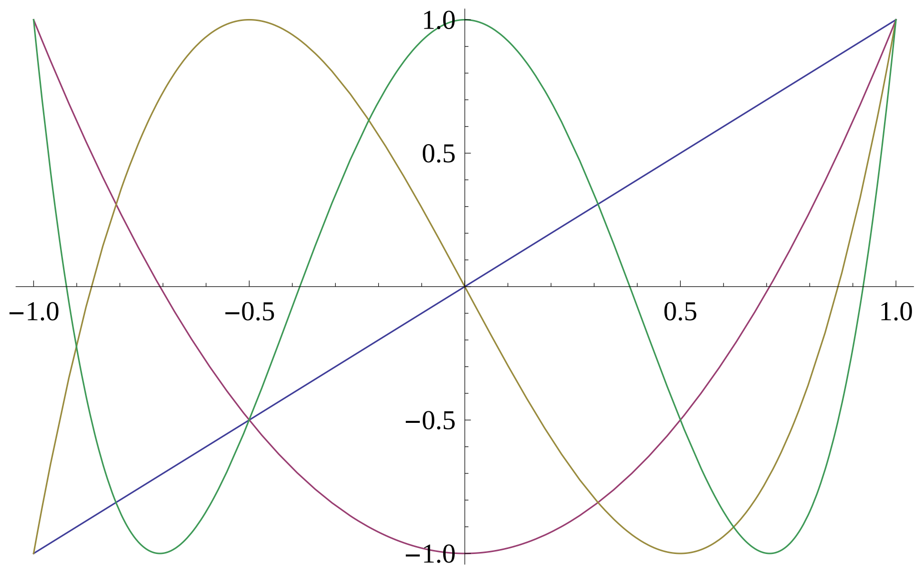
Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Первые 4 многочлена Чебышева имеют вид x, $2x^2-1$, $4x^3-3x$, $8x^4-8x^2+1$.

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

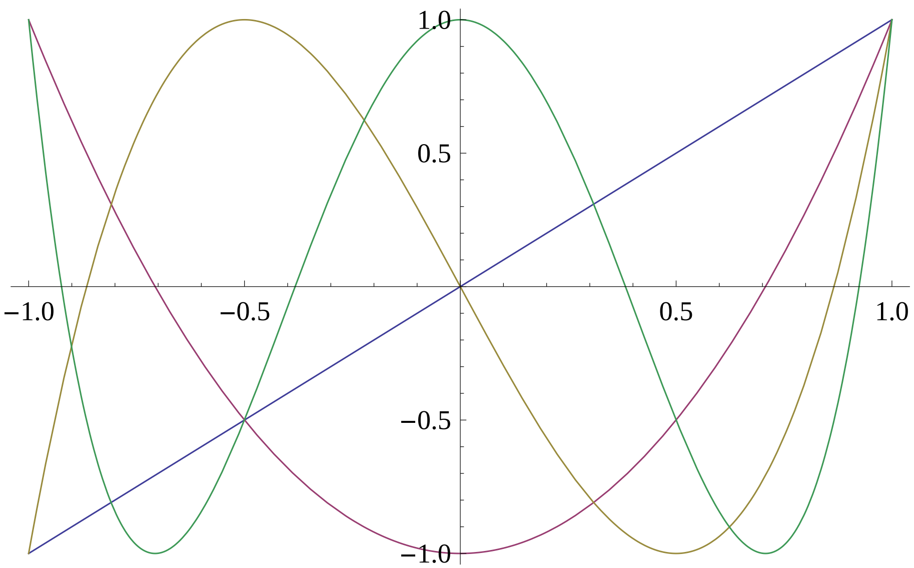
Первые 4 многочлена Чебышева имеют вид x, $2x^2-1$, $4x^3-3x$, $8x^4-8x^2+1$.



МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

Многочлены Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Первые 4 многочлена Чебышева имеют вид x, $2x^2-1$, $4x^3-3x$, $8x^4-8x^2+1$.



Многочлен Чебышева степени n имеет n простых корней на отрезке $[-1, 1]$.

Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1,1]$.

Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Они удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

Многочлены Чебышева первого рода ортогональны с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на отрезке $[-1, 1]$.

Они удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

Монический многочлен Чебышева степени n уклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$ меньше прочих многочленов данной степени.

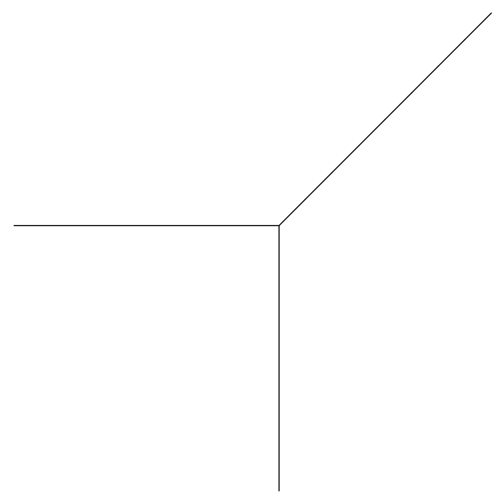
ПРИМЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ВКЛЮЧАЮТ ...

ПРИМЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ВКЛЮЧАЮТ ...

... Appell Polynomials, Affine q-Krawtchouk polynomials, Affine root system, Al-Salam-Carlitz polynomials, Al-Salam-Chihara polynomials, Al-Salam-Ismail polynomials, Askey-Wilson polynomials, Associated Legendre polynomials, Bateman polynomials, Bender-Dunne polynomials, Bessel polynomials, Big q-Jacobi polynomials, Big q-Laguerre polynomials, Big q-Legendre polynomials, Biorthogonal polynomial, Brenke-Chihara polynomials, Charlier Polynomials, Chebyshev Polynomials of the Second Kind, Gegenbauer Polynomials, Hahn Polynomials, Hermite Polynomials, Jack Polynomials, Jacobi Polynomials, Krawtchouk Polynomials, Laguerre Polynomials, Legendre Polynomials, Meixner-Pollaczek Polynomials, Pollaczek Polynomials, Spherical Harmonics, Stieltjes-Wigert Polynomials, Schur polynomials, Sieved Jacobi polynomials, Sieved orthogonal polynomials, Sieved Pollaczek polynomials, Sieved ultraspherical polynomials, Stieltjes polynomials, Stieltjes-Wigert polynomials, Szego polynomials, Zernike Polynomials etc etc ...

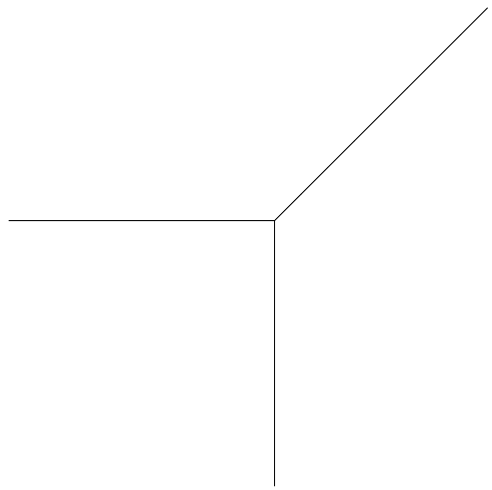
ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Тропическая прямая

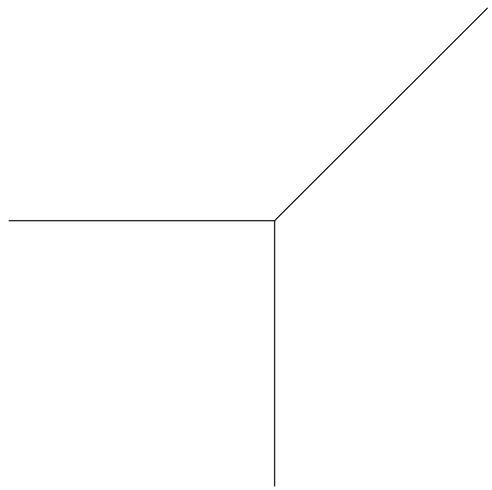
ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Тропическая прямая

Тропический многочлен – это непрерывная вогнутая кусочно-линейная функция.

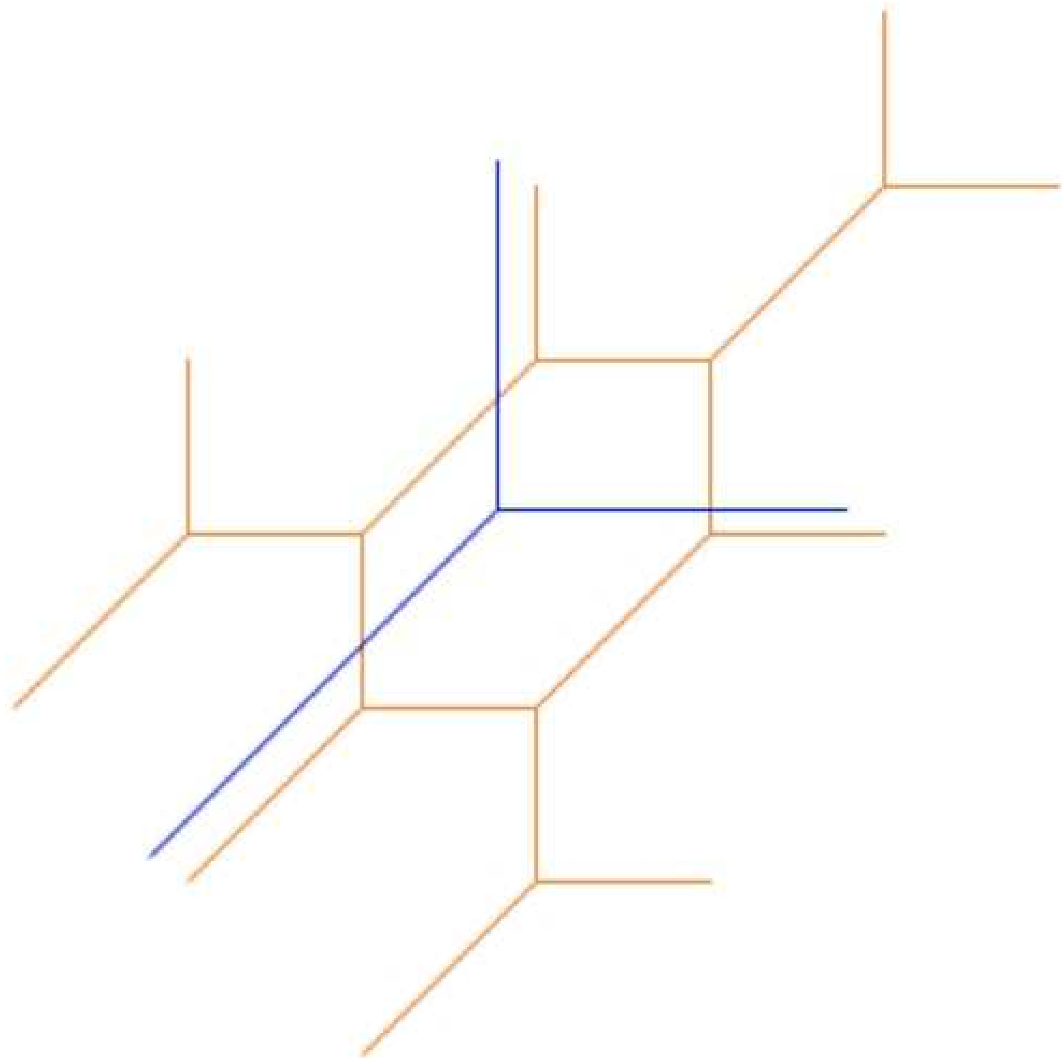
ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Тропическая прямая

Тропический многочлен – это непрерывная вогнутая кусочно-линейная функция.

Множество точек, где тропический многочлен не является дифференцируемой функцией, называется связанной с ним *тропической алгебраической гиперповерхностью.*



Трансверсальное пересечение тропических прямой и кубики

Pandanus Tectorius

Monstera

Лист монстеры вблизи

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И АМЕБЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть f – многочлен Лорана

$$f = \sum_{\alpha \in S} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\ x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Его амебой $\mathcal{A}_f$ называется образ гиперповерхности $\{f = 0\}$ при отображении

$$\mathrm{Log} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\log|x_1|, \ldots, \log|x_n|).$$

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА И АМЕБЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть f – многочлен Лорана

$$f = \sum_{\alpha \in S} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

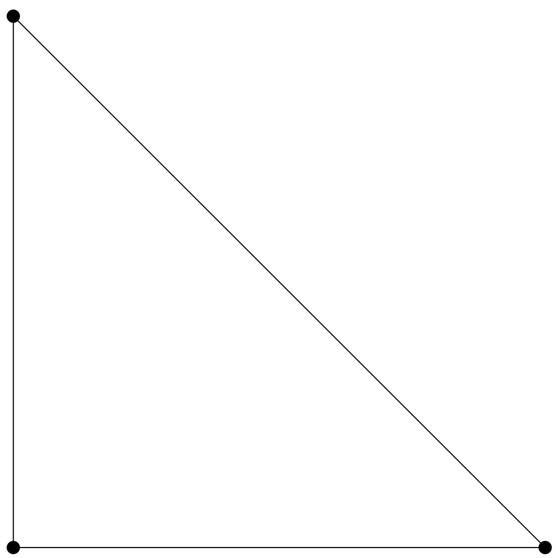
Его амебой $\mathcal{A}_f$ называется образ гиперповерхности $\{f = 0\}$ при отображении

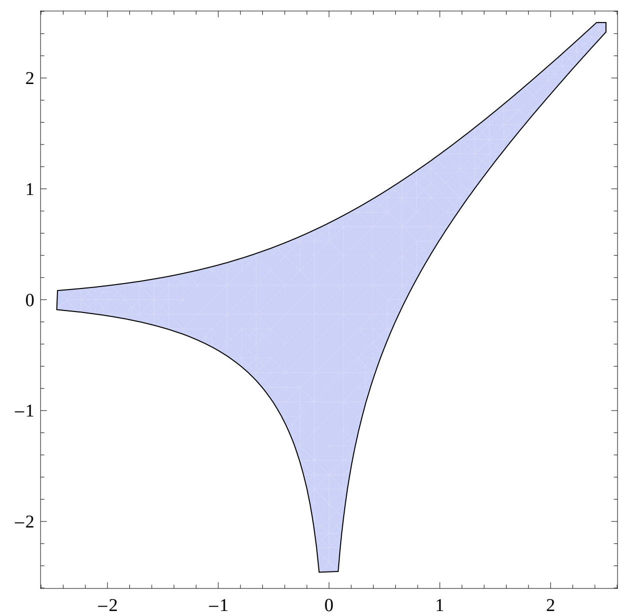
$$\mathrm{Log} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\log|x_1|, \ldots, \log|x_n|).$$

Многогранник Ньютона многочлена f есть выпуклая оболочка множества S.

ПРИМЕР. Амеба комплексной прямой.

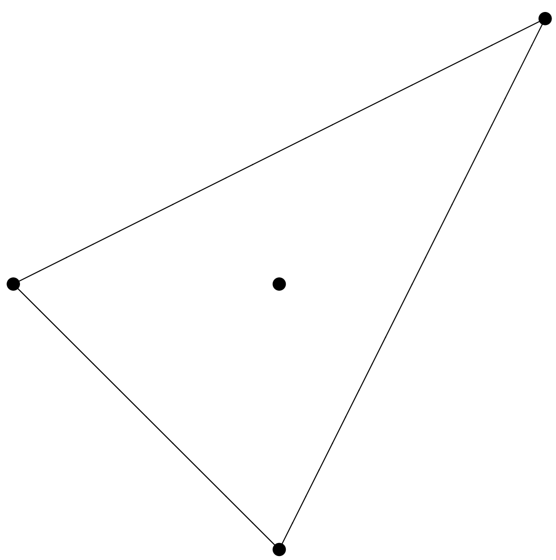
$$p(x, y) = 1 + x + y$$

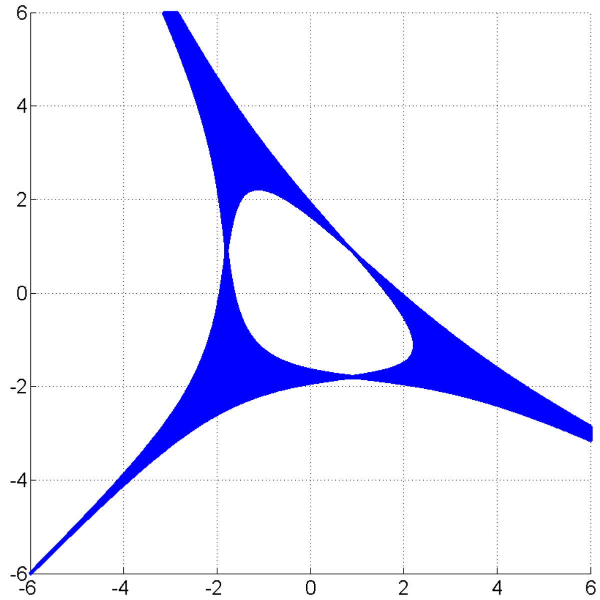




ПРИМЕР.

$$p(x,y) = x + y + 6xy + x^2y^2$$





ТЕОРЕМА. (М. Форсберг, М. Пассаре и А. Цих, 2000)

$$\#\,\mathrm{vert}\,\boldsymbol{\mathcal{N}_f} \;\le\; \#\,{}^c\!\boldsymbol{\mathcal{A}_f} \;\le\; \#\,\boldsymbol{\mathcal{N}_f} \cap \mathbf{Z}^n.$$

Амеба называется *оптимальной*, если достигается оценка сверху.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Гипергеометрический ряд Гаусса:

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, $$

где $(\alpha)_k = \Gamma(\alpha + k)/\Gamma(\alpha)$ – символ Похгаммера.

Его частные случаи включают:

$$ z \cdot {}_2F_1(1, 1; 2; -z) = \ln(1 + z), $$

$$ {}_2F_1(a, 1; 1; z) = (1 - z)^{-a}, $$

$$ z \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \arcsin z; $$

алгебраические функции

$$ 1 - z \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 2; 4z\right) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4z}}{2}, $$

функции Лежандра

$$
{}_2F_1(a, 1-a; c; z) = \Gamma(c)\, z^{\frac{1-c}{2}} (1-z)^{\frac{c-1}{2}} P_{-a}^{1-c}(1-2z),
$$

полные эллиптические интегралы

$$\frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right) = K(z),$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right) = E(z),$$

многочлены Чебышева и Гегенбауэра, эллиптические модулярные функции.

ПРОЧИЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ:

Гипергеометрическое уравнение Гаусса:

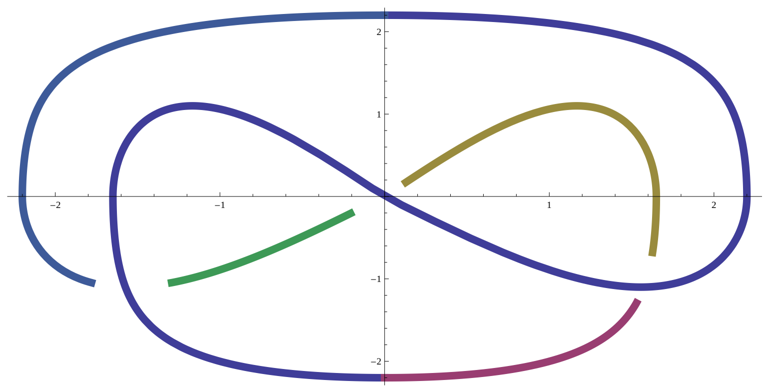
$$\boldsymbol{x(x-1)y''(x) + ((\alpha+\beta+1)x-\gamma)y'(x) + \alpha\beta y(x) = 0.} \qquad (1)$$

Особая точка $\boldsymbol{a}$ дифференциального уравнения называется правильной (регулярной), если любое его решение имеет не более чем полиномиальный рост в произвольном секторе с вершиной в точке $\boldsymbol{a}$. Любое линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с тремя правильными особыми точками на сфере Римана может быть приведено к виду (1).

Гипергеометрический интеграл:

$$\int\limits_{C} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tx)^{-a}\,dt,$$

где контур интегрирования C – цикл Похгаммера, разделяющий точки $0, 1, \infty$ на сфере Римана:



РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Корень уравнения

$$x^5 - x + z = 0$$

может быть представлен в виде

$$x = z \cdot {}_4F_3\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5};\ \ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4};\ \ \frac{5^5}{4^4} \cdot z\right).$$

Росток решения приведенного алгебраического уравнения с независимыми коэффициентами

$$y^m + x_1 y^{m_1} + \ldots + x_n y^{m_n} - 1 = 0$$

допускает представление в виде суммы кратного ряда

$$y(x) =$$

$$\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n \geq 0} \frac{(-1)^{|\nu|}}{m^{|\nu|}} \frac{\prod_{\mu=1}^{|\nu|-1}(m_1\nu_1 + \ldots + m_n\nu_n - m\mu + 1)}{\nu_1! \ldots \nu_n!} \; x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}.$$

Здесь $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, а пустое произведение считается равным 1.

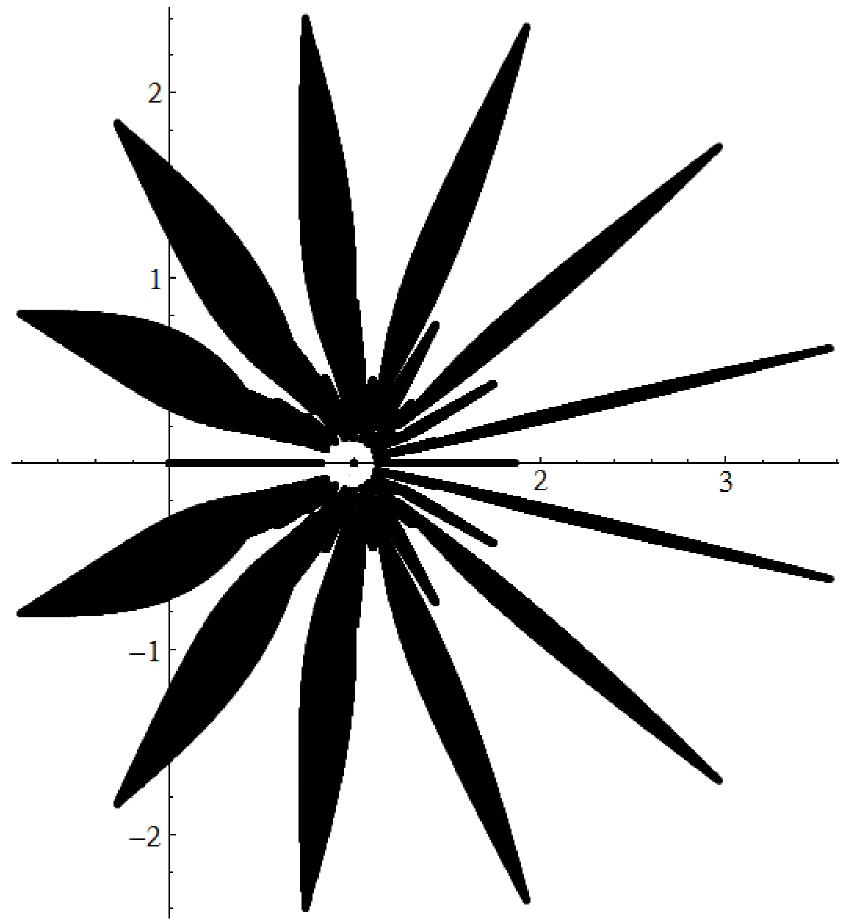
ВОПРОС:

КАКИМИ СВОЙСТВАМИ ОБЛАДАЮТ НУЛИ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

ОДНОГО И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ?

ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ



Гипергеометрическая астра: нули многочленов ${}_2F_1\left(-12, b; c; x\right)$ для $b, c \in \left\{\frac{k}{1000} : k = 100, \ldots, 4000\right\}$

КАК ОПРЕДЕЛИТЬ

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ?

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

1. Эти многочлены плотны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

1. Эти многочлены плотны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

2. Коэффициенты гипергеометрического многочлена удовлетворяют линейному разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

1. Эти многочлены плотны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

2. Коэффициенты гипергеометрического многочлена удовлетворяют линейному разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

3. В одномерном случае существует, как правило, единственный (с точностью до нормализации) представитель заданной степени в гипергеометрическом семействе.

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

1. Эти многочлены плотны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

2. Коэффициенты гипергеометрического многочлена удовлетворяют линейному разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

3. В одномерном случае существует, как правило, единственный (с точностью до нормализации) представитель заданной степени в гипергеометрическом семействе.

4. Все многочлены семейства удовлетворяют дифференциальному уравнению фиксированного порядка с полиномиальными коэффициентами (или же системе таких уравнений).

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

1. Эти многочлены плотны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

2. Коэффициенты гипергеометрического многочлена удовлетворяют линейному разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

3. В одномерном случае существует, как правило, единственный (с точностью до нормализации) представитель заданной степени в гипергеометрическом семействе.

4. Все многочлены семейства удовлетворяют дифференциальному уравнению фиксированного порядка с полиномиальными коэффициентами (или же системе таких уравнений).

5. Корни гипергеометрического многочлена одного переменного различны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

Большинство представителей многообразия семейств гипергеометрических многочленов одного и нескольких переменных обладают следующими свойствами:

1. Эти многочлены плотны (возможно, после подходящей мономиальной замены переменных).

2. Коэффициенты гипергеометрического многочлена удовлетворяют линейному разностному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

3. В одномерном случае существует, как правило, единственный (с точностью до нормализации) представитель заданной степени в гипергеометрическом семействе.

4. Все многочлены семейства удовлетворяют дифференциальному уравнению фиксированного порядка с полиномиальными коэффициентами (или же системе таких уравнений).

5. Корни гипергеометрического многочлена одного переменного различны (возможно, после подходящей замены переменных).

6. Экстремальные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гипергеометрическим многочленом многих переменных* с носителем в выпуклом целочисленном многограннике $P \in R^n$, $n \geq 2$ мы будем понимать многочлен

$$\sum_{s \in P \cap Z^n} \psi_P(s) x^s, \tag{2}$$

где $\psi_P(s)$ задано в виде

$$\psi_P(s) := \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - \langle B_j, s\rangle - c_j)}. \tag{3}$$

Здесь $\langle B_j, s\rangle + c_j = 0$, $j = 1, \ldots, q$ – уравнения гиперплоскостей, содержащих грани (максимальной размерности) многогранника P, B_j – внешняя нормаль к соответствующей грани.

ПРИМЕР 1. Зададим $\psi_P(s)$ в виде

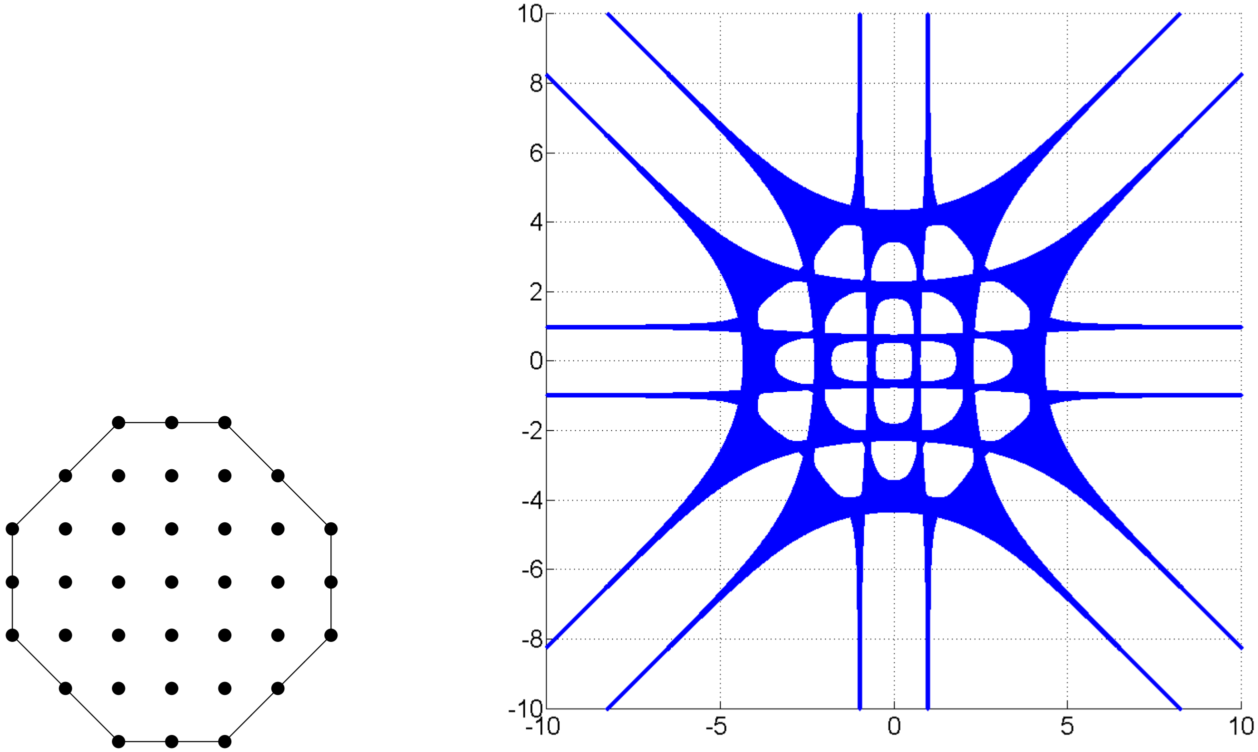
$$\psi_P(s) =$$

$$\Gamma(s-6)\Gamma(s+t-10)\Gamma(t-6)\Gamma(-s+t-4)\Gamma(-s)\Gamma(-s-t+2)\Gamma(-t)\Gamma(s-t-4).$$

Решением соответствующей гипергеометрической системы является многочлен

$$p_1(x,y) =$$

$$21x^2+64x^3+21x^4+126xy+2016x^2y+4704x^3y+2016x^4y+126x^5y+ 21y^2+2016xy^2+22050x^2y^2+47040x^3y^2+22050x^4y^2+2016x^5y^2+ 21x^6y^2+64y^3+4704xy^3+47040x^2y^3+98000x^3y^3+47040x^4y^3+ 4704x^5y^3+64x^6y^3+21y^4+2016xy^4+22050x^2y^4+47040x^3y^4+ 22050x^4y^4+2016x^5y^4+21x^6y^4+126xy^5+2016x^2y^5+4704x^3y^5+ 2016x^4y^5+126x^5y^5+21x^2y^6+64x^3y^6+21x^4y^6.$$



Многоугольник Ньютона многочлена $p_1(x, y)$ и его амеба

ПРИМЕР 2. Определим $\psi_P(s)$ как

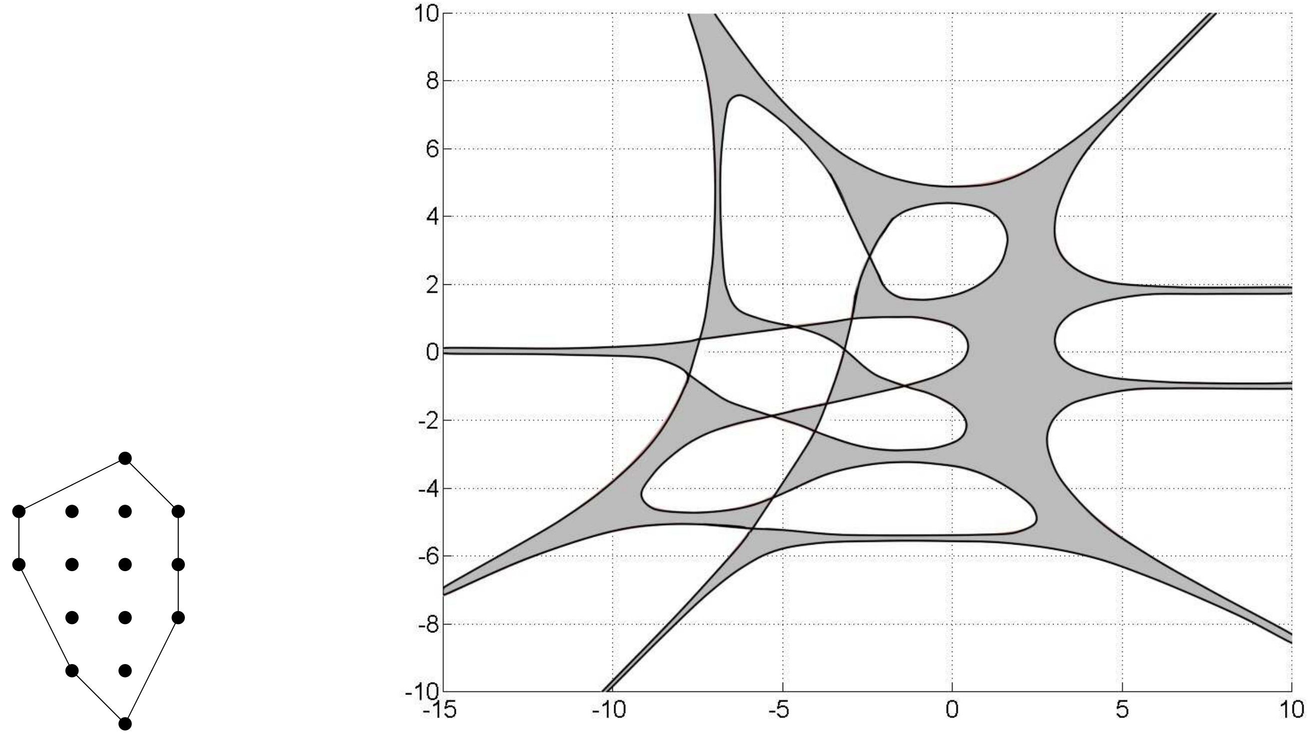
$$\psi_P(s) =$$

$$\Gamma(s+t-3)\Gamma(-s+2t-6)\Gamma(-3s-2t-5)\Gamma(3s-t-3)\Gamma(2s+t-5).$$

Решением соответствующей гипергеометрической системы является многочлен

$$p_2(x,y) =$$

$$528x^2-396xy-138600x^2y+55440xy^2+3104640x^2y^2+475200x^3y^2-165y^3-369600xy^3-8316000x^2y^3-1330560x^3y^3+160y^4+166320xy^4+2217600x^2y^4+201600x^3y^4-20160x^2y^5.$$



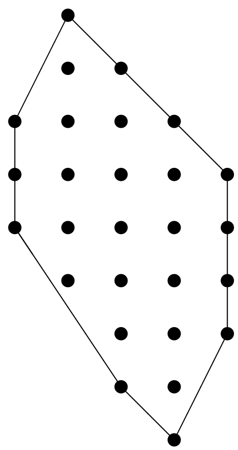
Многоугольник Ньютона многочлена $p_2(x, y)$ и его амеба

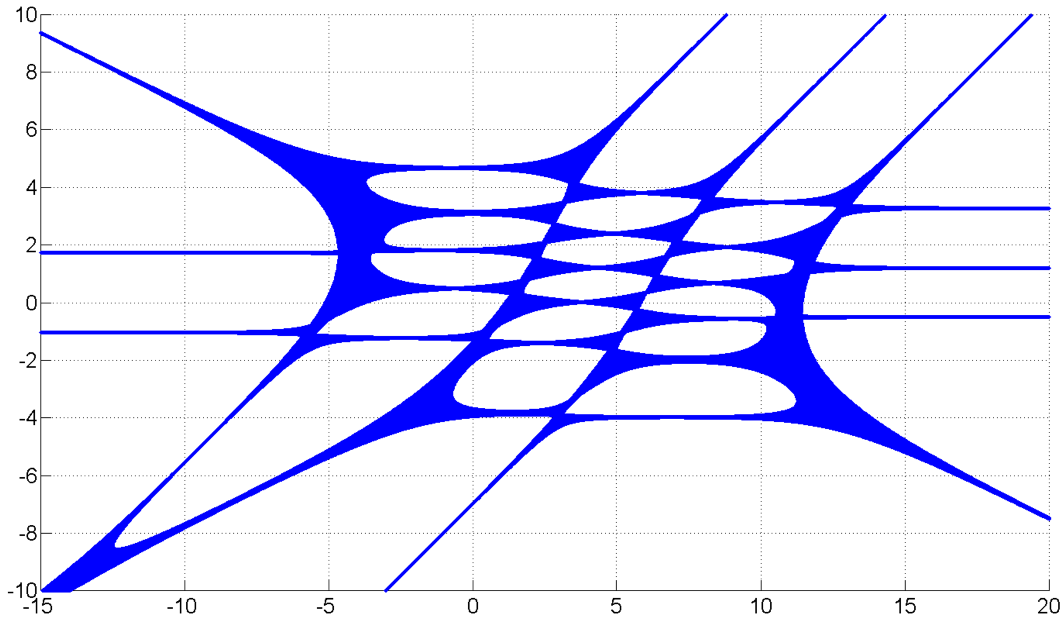
ПРИМЕР 3. Определим $\psi_P(s)$ как

$$\psi_P(s) = \Gamma(s+t-4)\Gamma(-4s+t-16)\Gamma(-3s-2t-5)\Gamma(3s-t-3)\Gamma(2s+t-5).$$

Решением соответствующей гипергеометрической системы является многочлен

$$p_3(x,y) = -456456x^3 + 488864376x^2y - 28756728x^3y + 25420947552x^2y^2 - 244432188x^3y^2 + 3003x^4y^2 - 119841609888xy^3 + 127104737760x^2y^3 - 465585120x^3y^3 + 6006x^4y^3 + 1396755360y^4 - 508418951040xy^4 + 139815211536x^2y^4 - 232792560x^3y^4 + 1729x^4y^4 + 4190266080y^5 - 355893265728xy^5 + 41611670100x^2y^5 - 29628144x^3y^5 + 57x^4y^5 + 698377680y^6 - 58663725120xy^6 + 3328933608x^2y^6 - 705432x^3y^6 - 2327925600xy^7 + 55023696x^2y^7 - 16930368xy^8.$$





Многоугольник Ньютона многочлена $p_3(x, y)$ и его амеба

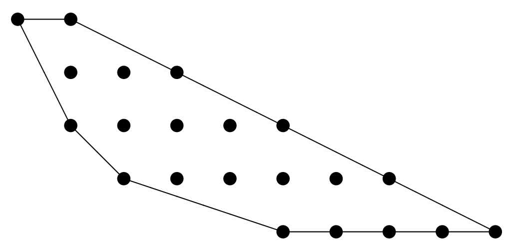
ПРИМЕР 4. Рассмотрим коэффициент гипергеометрического ряда

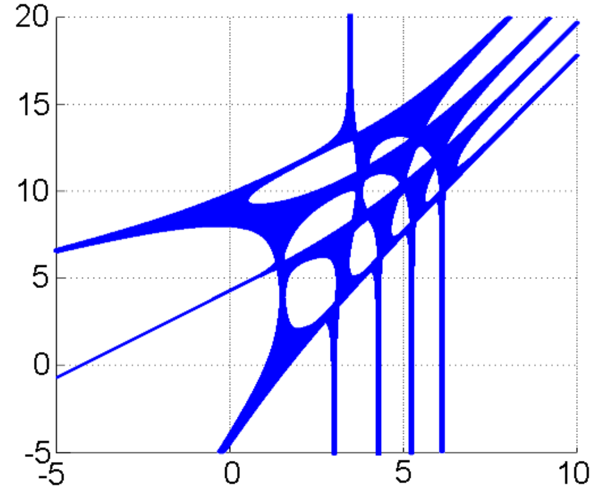
$$\Gamma\left(s+2t-5\right)\Gamma\left(-2s-t-4\right)\Gamma\left(-s-5t+1\right)$$

Решением соответствующей гипергеометрической системы является многочлен

$$p_4(x,y) =$$

$$2421619200x^5+172972800x^6+2882880x^7+14560x^8+20x^9+174356582400x^2y$$
$$48432384000x^3y+2421619200x^4y+34594560x^5y+160160x^6y+208x^7y+$$
$$2421619200xy^2+691891200x^2y^2+21621600x^3y^2+160160x^4y^2+$$
$$286x^5y^2+524160xy^3+14560x^2y^3+56x^3y^3+32y^4+xy^4.$$





Многоугольник Ньютона многочлена $p_4(x, y)$ и его амеба

ТЕОРЕМА. Гипергеометрические многочлены оптимальны.