Символьное решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Рябенко Анна Андреевна

Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А.Дородницина РАН

2012 год

$$x(3x-1)^2y'''(x)+(81x^2-36x+3)y''(x)+(162x-36)y'(x)+54y(x)=0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n\,(x+1)^n = C_0+C_1(x+1)+C_2(x+1)^2+ \\ +\left(\frac{9}{16}C_0-\frac{33}{16}C_1+\frac{5}{2}C_2\right)(x+1)^3+\cdots$$

$$16n(2-n)(n-1)v_n+40n(n-2)(n-1)v_{n-1}- \\ 33n(n-2)(n-1)v_{n-2}+9n(n-2)(n-1)v_{n-3}=0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n\,x^n = C_0+C_1x+(6C_1-9C_0)x^2+(27C_1-54C_0)x^3+\cdots$$

$$(-n+n^3)v_n+(-6n^3+6n)v_{n-1}+(9n^3-9n)v_{n-2}=0$$

$$x(3x-1)^2y'''(x)+(81x^2-36x+3)y''(x)+(162x-36)y'(x)+54y(x)=0$$

С.А. Абрамов, М. Петковшек [1996, 2000]

$$v_n \in \mathbb{K}[n]: \quad C_0\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty}(C_0+n\,C_1)\left(x+\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \in \mathbb{K}(n): \quad \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}C_2\left(\frac{3}{4}\right)^n n + C_1\left(\frac{3}{4}\right)^n + C_0\right)(x+1)^n \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n\left(C_0+\frac{1}{3}C_1 n\right)x^n; \quad C_0\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n\left(x-\frac{1}{3}\right)^n \end{array}$$

$$(x-1)y'(x)-(x-2)y(x)=0$$

С.А. Абрамов, М. Баркату [2009]

$$x_0 \neq 1: \quad C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \right) \frac{(x-x_0)^n}{(1-x_0)^n}$$

$$x(3x-1)^2y'''(x)+(81x^2-36x+3)y''(x)+(162x-36)y'(x)+54y(x)=0$$

С.А. Абрамов [1997, 1998, 2000]

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty} v_{2n}\left(x-\frac{1}{6}\right)^{2n} \qquad v_{2n}-36v_{2n-2}=0$$

$$C_1\left(x-\frac{1}{6}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} v_{2n+1}\left(x-\frac{1}{6}\right)^{2n+1} \qquad v_{2n+1}-36v_{2n-1}=0$$

$$C_0\sum_{n=0}^{\infty} 36^n\left(x-\frac{1}{6}\right)^{2n}+C_1\sum_{n=0}^{\infty} 36^n\left(x-\frac{1}{6}\right)^{2n+1}$$

Цель работы

Разработка новых и реализация (как новых, так и известных) компьютерно-алгебраических алгоритмов решения с помощью формальных степенных рядов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, однородных и неоднородных.

Пусть

$$Ly(x) = f(x),$$

где $L \in \mathbb{C}[x, D]$ и $\exists M \in \mathbb{C}[x, D]$: $Mf(x) = 0$.
Требуется найти

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (x - x_0)^n.$$

$$\begin{array}{ccc}
M\,f(x) = 0 & \Rightarrow & f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
M \circ Ly(x) = 0 & & R_2 v_n = f_n \\
\Downarrow & & \\
R_1 v_n = 0 & &
\end{array}$$

$\mathrm{ord} R_1 > \mathrm{ord} R_2$.

Предложение 1

Если для неоднородного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами и правой частью такой, что известен аннулирующий ее дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами, какая-либо обыкновенная точка является гипергеометрической, то и все обыкновенные точки являются гипергеометрическими.

С.А. Абрамов [1997, 1998, 2000]

$$y(x) = x + x^2 + \frac{1}{360}x^6 + \frac{1}{1814400}x^{10} + \frac{1}{43589145600}x^{14} + \cdots$$

является решением $Ly(x) = 0$, где

$$L = -(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 9) + (x^5 + 5x^4 + 16x^3 + 28x^2 + 25x + 9)D - (x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 1)D^2 + (x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 9)D^4 - (x^5 + 5x^4 + 16x^3 + 28x^2 + 25x + 9)D^5 + (x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 1)D^6.$$

Коэффициенты ряда, для $n \geqslant 6$, удовлетворяют

$$n(n-1)(n-2)(n-3)v_n - v_{n-4} = 0.$$

$$y(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{8^n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(4k+5)(2k+3)(4k+3)(k+1)}.$$

$D^4 - 1$ является правым делителем L.

Построение m-разреженного правого множителя

Для L, $\mathrm{ord}\, L = 6$.

m L'	2 $D^4 - 1$	3 1	4 $D^4 - 1$	5 1	6 1
модулярный алгоритм	.040	.016	.028	.008	.004
вычисления с параметром	.076	3.888	.028	1.940	.156

Здесь и далее приводится время (в сек.) счета в системе компьютерной алгебры Maple 14, Ubuntu 8.04.4 LTS, AMD Athlon(tm) 64 Processor 3700+, 3GB.

Для $L \circ L$, $\mathrm{ord} L^2 = 12$.

m L'	2 $D^4 - 1$	3 1	4 $D^4 - 1$	5 1	6 1
модулярный алгоритм	.260	.032	.296	.032	.992
вычисления с параметром	227.683	39402.790	264.121	13672.842	6486.574

Модулярный алгоритм поиска для дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами его m-разреженного правого делителя с постоянными коэффициентами получает тот же результат, что и алгоритм, основанный на вычислениях НОД с параметром, за лучшее время.

Поиск конечного множества m-кандидатов

$$L = (x^8 - 4x^6 - 2x^4 + 4x^2 + 1)D^2 + (4x^7 - 24x^5 - 4x^3 - 8x)D + (2x^6 - 18x^4 - 18x^2 + 2)$$

Для $m = 2$. Существует одна 2-точка: $x = 0$.
Поиск кандидатов с помощью GCRDpar (П.Е.Глотов[1998]): за время 1.724 получаем множество из $N = 5$ значений.
Применение модулярно-вероятностого алгоритма

k	1	2	3	4	5	...	26
t	.272	.580	.728	.868	1.044		6.817
N	45	25	5	5	5	5	5
$p(k)$				.905	.930		

$$6x^3y''(x) + 2x^2y'(x) + (5x+8)y(x) = 0$$

Алгоритм многоугольников Ньютона, алгоритм Фробениуса.
Э. Турнье [1987], Э. Пфлюгель [1996]

$$x(t) = -\frac{4}{3}t^2, \quad y(t) = e^{-\frac{2}{t}}t^{\frac{7}{6}}\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$$

$$-144nv_n + (-113 - 36n^2 + 36n)v_{n-1} = 0$$

$$y(t) = t^{\frac{7}{6}}e^{-\frac{2}{t}}\left(1 - \frac{113}{144}t + \frac{20905}{41472}t^2 - \frac{6877745}{17915904}t^3 + O(t^4)\right)$$

$$y(t) = t^{\frac{7}{6}}e^{-\frac{2}{t}}C_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{144}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{113+36k+36k^2}{k+1}\right)t^n$$

$$(x^2+1)x\,y''(x)+(7x^2+1)\,y'(x)+8x\,y(x)=0$$

$$x=\frac{1}{t},\quad y(t)=t^2\left(\ln(t)\sum_{n=0}^{\infty}v_{0,n}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}v_{1,n}t^n\right)$$

$$(n^2-2n)v_{0,n}+n^2v_{0,n-2}=0$$

$$(n^2-2n)v_{1,n}+n^2v_{1,n-2}+(2n-2)v_{0,n}+2nv_{0,n-2}=0$$

$$y_1(t)=t^2(t^2-2t^4+O(t^6))$$

$$y_2(t)=t^2\left(-\frac{1}{2}+(1+\ln(t))\,t^2+\left(-\frac{3}{2}-2\ln(t)\right)t^4+O(t^6)\right)$$

$$y(t)=t^2\left(-C_0\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^nt^{2n}-C_1\left(\ln(t)\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^nt^{2n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\right)\right)$$

FPseries, FTseries — построение решения в виде степенного ряда в заданной точке

candidate_points, candidate_mpoints — построение множества точек кандидатов

polynomial_series_sol, rational_series_sol, hypergeom_series_sol, dAlembertian_series_sol — построение решения в виде ряда с коэффициентами заданного типа

msparse_series_sol, mhypergeom_series_sol — построение разреженных решений

hypergeom_formal_sol, mhypergeom_formal_sol, dAlembertian_formal_sol — построение формальных экспоненциально-логарифмических решений с коэффициентами заданного типа

http://www.maplesoft.com/support/help/

Публикации по теме диссертации:

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 7 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК и 3 статьи в сборниках трудов конференций.

1. Рябенко А. А. Maple-пакет символьного построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в виде степенных рядов // Программирование. 1999. №5. С. 71–80.
2. Abramov S. A., Petkovsek M., Ryabenko A. A. Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Mathematics. 2000. Vol. 210. Pp. 3–25.
3. Митичкина А. М., Рябенко А. А. Представление алгебраических функций в виде степенных и дробно-степенных рядов специального вида // Программирование. 2001. №1. С. 10–17.
4. Рябенко А. А. Формальные решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие m-гипергеометрические ряды // Программирование. 2002. №2. С. 49–60.
5. Абрамов С. А., Рябенко А. А. Разреженные степенные ряды и параметризованные линейные операторы // Программирование. 2004. №2. С. 36–41.
6. Рябенко А. А. Символьное решение неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов // Программирование. 2006. №2. С. 78–80.
7. Абрамов С. А., Рябенко А. А. Об одной компьютерно-алгебраической технологии // Программирование. 2008. №2. С. 9–13.

Апробация работы:

Основные результаты по теме диссертации были представлены в докладах на

- международной конференции «Computational Modeling and Computing in Physics», 1996, г. Дубна;
- международной конференции «Modern Trends in Computational Physics», 1998, г. Дубна;
- объединенном семинаре «Компьютерная алгебра» МГУ и ЛИТ ОИЯИ, 1998, 2003, 2005, 2007, г. Дубна;
- семинаре МГУ «Компьютерная алгебра», 1999, г. Москва;
- международной конференции «Formal Power Series and Algebraic Combinatorics», 2000, г. Москва;
- международной конференции «Computer Algebra and its Application to Physics», 2001, г. Дубна;
- международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 106-летию со дня рождения И.Г. Петровского, 2007, г. Москва.

Основные результаты:

1. Алгоритмы построения решений в виде рядов и алгоритмы поиска точек для случая однородного л.о.д.у. перенесены на случай неоднородного уравнения.

2. Разработан модулярно-вероятностный алгоритм построения множества m-кандидатов для однородного л.о.д.у.

3. Разработан алгоритм поиска гипергеометрических и даламберовых решений системы рекуррентных соотношений, возникающей в задаче построения в особой точке л.о.д.у. формальных экспоненциально-логарифмических решений.

4. В системе компьютерной алгебры `MAPLE` реализован пакет `Slode`.

Пример использования Slode

$$x - y^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{\mathrm{RootOf}(1-a+\_Z^2)}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(1-a)^n\,\Gamma(n+1)}(x-a)^n$$

$$(-1-x^6+2\,x^3)\,y^2+(-2+2\,x^3)\,y+x^{11}-2\,x^8+x^5-1=0$$

$$y(x) = -x^{\frac{5}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$$