Математическое обеспечение систем символьных вычислений для задач, связанных с уравнениями в частных производных и разностях

Парамонов Сергей Валерьевич

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики

2016

Введение

Линейное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{n\in S} a_n(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_m^{n_m}} y(\mathbf{x}) = 0 \tag{1}$$

Линейное разностное уравнение с полиномиальными коэффициентами

$$\sum_{n\in S} a_n(\mathbf{x}) y(x_1 + n_1, \dots, x_m + n_m) = 0 \tag{2}$$

- S — конечное подмножество $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — вектор из m независимых переменных
- $y(\mathbf{x})$ — неизвестная функция,
- $a_n(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- $|n| = n_1 + \dots + n_m$

Введение

Для линейных обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами известны алгоритмы поиска решений различных видов: полиномов, рациональных функций и многих других. Также известны алгоритмы и для решения систем таких уравнений с несколькими неизвестными функциями.

В системе компьютерной алгебры Maple доступны, например, следующие процедуры:

- DETools[polysols] и DETools[ratsols] позволяют найти все полиномиальные решения и решения в виде рациональных функций соответственно для линейного дифференциального уравнения,
- LRETools[polysols] и LRETools[ratpolysols] позволяют найти все полиномиальные решения и решения в виде рациональных функций соответственно для линейного разностного уравнения,
- LinearFunctionalSystems[PolynomialSolution] и LinearFunctionalSystems[RationalSolution] позволяют находить полиномиальные решения и решения в виде рациональных функций соответственно для ситемы линейного дифференциальных, разностных или q-разностных уравнений.

Введение

Для уравнений в частных производных и разностях подобных универсальных алгоритмов нет, но ведутся исследования алгоритмических аспектов поиска решений различных видов:

– решений в виде рациональных функций (универсального знаменателя) для уравнений в частных разностях:

- M. Kauers, C. Schneider. *Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations* (2010)
- M. Kauers, C. Schneider. *A Refined Denominator Bounding Algorithm for Multivariate Linear Difference Equations* (2011)

– решений в виде формальных лорановых рядов для уравнений в частных производных:

- F. Aroca, J. M. Cano. *Formal solutions of linear PDE's and convex polyhedra* (2001)
- F. Aroca, J. M. Cano, F. R. Jung. *Power series solutions for non-linear PDE's* (2003)
- A. Aparicio Monforte, M. Kauers. *Formal Laurent Series in Several Variables* (2013)

Введение

J. Denef, L. Lipshitz. *Power series solutions of algebraic differential equations* (1984)

Доказана алгоритмическая неразрешимость проверки существования решений в виде формальных степенных рядов для дифференциальных уравнений вида

$$P\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)=\frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_m)},\qquad P\in Z[n_1,\dots,n_m] \tag{3}$$

S. Abramov, M. Petkovšek. *On polynomial solutions of linear partial differential and (q-)difference equations* (2012)

Доказана алгоритмическая неразрешимость проверки существования полиномиальных решений для линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

Доказательства опираются на теорему Девиса-Матиясевича-Патнема-Робинсон (1970), являющуюся решением в отрицательном смысле Десятой проблемы Гильберта.

Цель работы

Целью работы является исследование алгоритмической разрешимости задач распознавания существования решений различных видов для уравнений в частных производных и разностях с полиномиальными коэффициентами (в том числе для дифференциальных уравнений с граничными условиями), поскольку эти вопросы представляют интерес для компьютерной алгебры.

Решения в виде рациональных функций

Теорема 1

Не существует алгоритма, определяющего, имеет ли данное линейное однородное уравнение в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами ненулевое решение в виде рациональной функции.

Теорема 2

Не существует алгоритма проверки существования универсального знаменателя для произвольного линейного однородного уравнения в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами.

Решения в виде формальных лорановых рядов

Предлагается подход к определению поля формальных лорановых рядов, обобщающий различные существующие подходы:

Λ — поле формальных лорановых рядов переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, если

$$\mathbb{K}[[\mathbf{x}^{\pm 1}]] \subset \Lambda \subset \mathbb{K}[[x_1, ..., x_m, x_1^{-1}, ..., x_m^{-1}]], \tag{4}$$

где $\mathbb{K}[[\mathbf{x}^{\pm 1}]] = \mathbb{K}[[x_1^{d_1}, \ldots, x_m^{d_m}]]$, $d_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема 3

(i) Пусть Λ — поле лорановых рядов от m переменных. Тогда при $m \geqslant 11$ задача проверки существования ненулевого решения в поле Λ для заданного линейного однородного уравнения в частных производных с полиномиальными коэффициентами алгоритмически неразрешима.
(ii) Пусть M — некоторое непустое множество полей лорановых рядов от m переменных. Тогда при $m \geqslant 11$ алгоритмически неразрешима задача проверки существования поля $\Lambda \in M$, в котором заданное линейное однородное уравнение в частных производных с полиномиальными коэффициентами имеет ненулевое решение.

Решения в мономов с вещественными показателями степеней

Показано, что задача распознавания существования решений вида $x^t,\ t \in \mathbb{R}^m$ для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с полиномиальными коэффициентами алгоритмически разрешима.

Предложен алгоритм решения этой задачи с помощью метода цилиндрических разбиений.

Задача ZC (Zero Condition).
Пусть $U \in \mathbb{R}^m$ — некоторая открытая область, содержащая 0, для которой существует ненулевой полином $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, принимающий нулевое значение во всех точках границы U. Для следующих исходных данных:

1° полином $q(\mathbf{x})$,

2° непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$,

3° однородное линейное уравнение в частных производных с полиномиальными коэффициентами,

требуется определить, существует ли у этого уравнения такое ненулевое решение $f(\mathbf{x})$ в области U, что:
(a) функция $f(\mathbf{x})$ аналитична в области U,
(b) для любого $\alpha \in A$ функция $\frac{\partial^{|n|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_m^{n_m}}$ равна 0 на границе области U.

Дифференциальные уравнения с граничными условиями

Задача ZCD (Zero Condition for infinitely Differentiable solutions).
Пусть $U \in \mathbb{R}^m$ — некоторая открытая область, содержащая 0, для которой существует ненулевой полином $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$, принимающий нулевое значение во всех точках границы U. Для следующих исходных данных:

1° полином $q(\mathbf{x})$,

2° непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$,

3° линейное уравнение в частных производных с полиномиальными коэффициентами,

требуется определить, существует ли у этого уравнения такое ненулевое решение $f(\mathbf{x})$ в области U, что:

(a) функция $f(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируема в области U,

(b) для любого $\alpha \in A$ функция $\frac{\partial^{|n|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_m^{n_m}}$ равна 0 на границе области U.

Дифференциальные уравнения с граничными условиями

Теорема 4

Задача ZC алгоритмически неразрешима.

Теорема 5

Задача ZCD алгоритмически неразрешима.

Показано, что задачи ZC и ZCD являются неразрешимыми, даже если область U и множество A, соответствующее набору граничных условий, фиксированы, а входом гипотетического алгоритма является только дифференциальное уравнение. При этом количество переменных $x_1, \ldots, x_m$ должно быть достаточно большим ($m \geqslant 11$).

Публикации по теме диссертации

Материалы диссертации опубликованы в 6 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах перечня ВАК и 2 статьи в сборнике трудов конференций.

1. Парамонов С. В. О проверке существования бесконечно дифференцируемых решений уравнений в частных производных с граничными условиями // Программирование. 2016. №2. С. 49–54.
2. Paramonov S. V. Undecidability of existence of certain solutions of partial differential and difference equations // Computer Algebra in Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science. 2014. Vol. 8660. P. 350–356.
3. Парамонов С. В. Задача проверки существования решений дифференциальных уравнений в частных производных в полях лорановых рядов // Программирование. 2014. №2. С. 26–31.
4. Парамонов С. В. О рациональных решениях линейных уравнений с частными производными или разностями // Программирование. 2013. №2. С. 11–14.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации были представлены в докладах на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция «Компьютерная алгебра», 2016, г. Москва
- Международная конференция «Functional Equations in Limoges», 2016, г. Лимож
- Международная конференция «Computer Algebra in Scientific Computing», 2014, г. Варшава
- Международная конференция «Mathematical Modeling and Computational Physics», 2013, г. Дубна
- Семинар «Algebra and Discrete Mathematics», 2016, г. Линц
- Семинар «Компьютерная алгебра» ВМК МГУ и ВЦ РАН, 2014, 2016, г. Москва
- Международное рабочее совещание по компьютерной алгебре ЛИТ ОИЯИ, 2012, 2014, 2015, 2016, г. Дубна

Основные результаты

1. Доказана алгоритмическая неразрешимость проверки существования решений в виде рациональных функций для линейных уравнений в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами, а также неразрешимость проверки существования универсального знаменателя для таких уравнений.
2. Алгоритмическая неразрешимость проверки существования решений в виде формальных лорановых рядов для линейных однородных уравнений в частных производных с полиномиальными коэффициентами установлена относительно различных известных определений поля формальных лорановых рядов нескольких переменных.
3. Установлена алгоритмическая разрешимость проверки существования решений в виде мономов с вещественными показателями степеней и предложен алгоритм, решающий эту задачу.
4. Доказана алгоритмическая неразрешимость задачи проверки единственности аналитического решения и задачи проверки существования бесконечно дифференцируемых решений для линейных дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями.

Перспективные направления дальнейших исследований

- Исследование разрешимости проверки существования ненулевых бесконечно дифференцируемых решений для однородных уравнений в частных производных.
- Исследование разрешимости аналогичных задач для решений в виде функций, дифференцируемых конечное число раз.
- Исследование вопросов существования и построения алгоритмов, позволяющих решать рассмотренные задачи при добавлении некоторых дополнительных условий на входные данные.