

О некоторых алгоритмически неразрешимых задачах, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных

С. В. Пармонов

s.v.paramonov@yandex.ru

Московский Государственный Университет
факультет вычислительной математики и кибернетики

2016

Мы будем рассматривать вопросы алгоритмической неразрешимости для задач распознавания существования решений некоторых видов для линейных уравнений в частных производных (или разностях) с полиномиальными коэффициентами.

- ▶ Рациональные функции
- ▶ Формальные лорановы ряды
- ▶ Аналитические функции
- ▶ Бесконечно дифференцируемые функции
- ▶ Конечно дифференцируемые функции

Линейный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами:

$$L = \sum_{n \in S} p_n(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_m^{n_m}} \quad (1)$$

- ▶ S — конечное подмножество $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$
- ▶ x_1, \dots, x_m — вектор из m независимых переменных (для краткости будем обозначать его через \mathbf{x})
- ▶ $p_n \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- ▶ $|n| = n_1 + \dots + n_m$

Кольцо таких операторов будем обозначать через $\mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}]$

Линейный разностный оператор с полиномиальными коэффициентами:

$$L = \sum_{n \in S} p_n(x_1, \dots, x_m) \Delta_1^{n_1} \dots \Delta_m^{n_m} \quad (2)$$

- ▶ S — конечное подмножество $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$
- ▶ $p_n \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- ▶ $\Delta_i y(x) = y(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_m) - y(x_1, \dots, x_m)$

Кольцо таких операторов будем обозначать через $\mathbb{Z}[\Delta, \mathbf{x}]$

При $m = 1$:

- ▶ дифференциальное уравнение $Ly(\mathbf{x}) = 0$ ($L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}]$) принимает вид

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad (3)$$

- ▶ разностное уравнение $Ly(\mathbf{x}) = 0$ ($L \in \mathbb{Z}[\Delta, \mathbf{x}]$) принимает вид

$$a_n(x)y(x+n) + a_{n-1}(x)y(x+n-1) + \dots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = 0 \quad (4)$$

Для таких уравнений известны эффективные алгоритмы

- ▶ поиска полиномиальных решений
- ▶ поиска решений в виде рациональных функций

Для случая $m \geq 2$ подобных универсальных алгоритмов нет

Исследования алгоритмических аспектов поиска решений в виде рациональных функций (универсального знаменателя) для уравнений в частных разностях:

- ▶ М. Kauers, С. Schneider. *Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations* (2010)
- ▶ М. Kauers, С. Schneider. *A Refined Denominator Bounding Algorithm for Multivariate Linear Difference Equations* (2011)

Алгоритмическая неразрешимость задач поиска решений в виде полиномов и формальных степенных рядов для уравнений в частных производных (или разностях):

- ▶ J. Denef, L. Lipshitz. *Power series solutions of algebraic differential equations* (1984)
- ▶ S. Abramov, M. Petkovšek. *On polynomial solutions of linear partial differential and (q-)difference equations* (2012)

$$\delta_i = \begin{cases} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, & \text{в дифференциальном случае,} \\ x_i \Delta_i, & \text{в разностном случае,} \end{cases} \quad (5)$$

$$\delta^n = \delta_1^{n_1} \dots \delta_m^{n_m} \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m.$$

$$\mathbf{x}^{(n)} = \begin{cases} \mathbf{x}^n, & \text{в дифференциальном случае,} \\ \mathbf{x}^{\bar{n}}, & \text{в разностном случае,} \end{cases} \quad (6)$$

$$n \in \mathbb{Z}^m, \quad \mathbf{x}^n = x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}, \quad \mathbf{x}^{\bar{n}} = x_1^{\bar{n}_1} \dots x_m^{\bar{n}_m}$$

$$x^{\bar{k}} = \begin{cases} x(x+1)\dots(x+k-1), & \text{если } k > 0, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-|k|)}, & \text{если } k < 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\delta_i \mathbf{x}^{(n)} = n_i \mathbf{x}^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}^m \quad (8)$$

$$\delta^k \mathbf{x}^{(n)} = n^k \mathbf{x}^{(n)}, \quad n, k \in \mathbb{Z}^m, \quad (9)$$

$$P(\delta_1, \dots, \delta_m) \mathbf{x}^{(n)} = P(n_1, \dots, n_m) \mathbf{x}^{(n)}, \quad P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]. \quad (10)$$

Из (10) следует, что уравнение

$$P(\delta_1, \dots, \delta_m) \mathbf{x}^{(n)} = 0, \quad P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \quad (11)$$

имеет решение $n \in \mathbb{Z}^m$ тогда и только тогда, когда n является решением диофантова уравнения

$$P(n_1, \dots, n_m) = 0. \quad (12)$$

Теорема (Матиясевич, 1970)

Не существует алгоритма, который по заданному произвольному диофантову уравнению определял бы наличие у него целочисленного решения.

Рациональные функции

Рациональные функции

$$o(\mathbf{x}^n) = \sum_{s \prec n, s \in \mathbb{Z}^m} c_s \mathbf{x}^s, \quad n \in \mathbb{Z}^m, \quad \prec \text{ — отношение лексикографического порядка}$$

Утверждение 1

Если $n, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, $1 \leq i \leq m$, то

$$\delta_i \frac{\mathbf{x}^n + o(\mathbf{x}^n)}{\mathbf{x}^d + o(\mathbf{x}^d)} = \frac{(n_i - d_i) \mathbf{x}^{n+d} + o(\mathbf{x}^{n+d})}{\mathbf{x}^{2d} + o(\mathbf{x}^{2d})}. \quad (13)$$

Утверждение 2

$$\delta^s \frac{\mathbf{x}^n + o(\mathbf{x}^n)}{\mathbf{x}^d + o(\mathbf{x}^d)} = \frac{(n - d)^s \mathbf{x}^{n+r} + o(\mathbf{x}^{n+r})}{\mathbf{x}^{d+r} + o(\mathbf{x}^{d+r})}, \quad (14)$$

где $s, n, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, $r = (2^{s_1} + \dots + 2^{s_m} - 1)d$.

Утверждение 3

Если рациональная функция $\frac{x^n + o(x^n)}{x^d + o(x^d)}$ является решением уравнения

$$P(\delta_1, \dots, \delta_m)y(\mathbf{x}) = 0, \quad P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m], \quad (15)$$

то $\mathbf{x}^{\langle n-d \rangle}$ также является его решением.

Теорема 1

Не существует алгоритма, определяющего, имеет ли данное линейное однородное уравнение в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами ненулевое рациональное решение.

Формальные лорановы ряды

Формальные лорановы ряды

В случае одной переменной x формальным лорановым рядом с коэффициентами из поля \mathbb{K} называется выражение вида

$$\sum_{n=z}^{\infty} a_n x^n, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \mathbb{K} \quad (16)$$

Множество всех таких рядов образует поле, обозначаемое $\mathbb{K}((x))$, которое является полем отношений для кольца формальных степенных рядов $\mathbb{K}[[x]]$.

В случае нескольких переменных x_1, \dots, x_m существуют различные вариации определения лорановых рядов. Один из способов:

$$\mathbb{K}((x_1))((x_2)) \dots ((x_m)) \quad (17)$$

Формальные лорановы ряды

Второй способ определения лорановых рядов

A. Aparicio Monforte, M. Kauers. *Formal Laurent series in several variables* (2013)

C — конус в \mathbb{R}^m :

$$C = \{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m\}$$
$$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^m, \quad \forall u \in C \setminus \{0\} : -u \notin C$$

\preceq — отношение порядка, совместное с C :

$$\forall i, j, k \in \mathbb{Z}^m : i \preceq j \Rightarrow i + k \preceq j + k, \quad \forall u \in C \cap \mathbb{Z}^m : 0 \preceq u$$

$$\mathbb{K}_C[[x]] = \left\{ \sum_{n \in C \cap \mathbb{Z}^m} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{K} \right\},$$

$$\mathbb{K}_{\preceq}[[x]] = \bigcup_{C \in \Upsilon} \mathbb{K}_C[[x]], \quad \mathbb{K}_{\preceq}((x)) = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} x^\gamma \mathbb{K}_{\preceq}[[x]]$$

Формальные лорановы ряды

Второй подход к определению поля лорановых рядов в некотором смысле более гибкий, чем первый: при $m > 1$ существует бесконечное число возможностей для выбора отношения порядка \preceq и лишь $m!$ возможностей выбора порядка переменных.

Пример

- ▶ Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n}y^{-n} + x^{-n}y^{2n})$ принадлежит $\mathbb{K}_{\preceq}((x, y))$, но не принадлежит $\mathbb{K}((x))((y))$
- ▶ Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n y^{n^2} + x^n y^{-n^2})$ принадлежит $\mathbb{K}((y))((x))$, но не принадлежит $\mathbb{K}_{\preceq}((x, y))$

Формальные лорановы ряды

Обобщая два описанных подхода, назовем полем формальных лорановых рядов переменных x_1, x_2, \dots, x_m над полем \mathbb{K} такое поле Λ , что

$$\mathbb{K}[[\mathbf{x}^{\pm 1}]] \subset \Lambda \subset \mathbb{K}[[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]], \quad (18)$$

$\mathbb{K}[[\mathbf{x}^{\pm 1}]] = \mathbb{K}[[x_1^{d_1}, \dots, x_m^{d_m}]]$, где $d_i = \pm 1$,

$\mathbb{K}[[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]] = \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_m, x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1}]]$ — кольцо всех формальных сумм $\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n \mathbf{x}^n$.

Утверждение

Для любого аддитивного отношения порядка \preceq на \mathbb{Z}^m поле $\Lambda = \mathbb{K}_{\preceq}((\mathbf{x}))$ при некоторых $d_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяет условию (18).

Теорема

Пусть Λ — некоторое поле лорановых рядов от m переменных ($m \geq 11$). Тогда алгоритмически неразрешима задача проверки существования решений в поле Λ для заданного дифференциального уравнения $Ly(\mathbf{x}) = 0$, $L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}]$.

Аналитические функции

Уравнения с граничными условиями

Важный класс задач составляют дифференциальные уравнения в частных производных с граничными условиями.

Обозначения

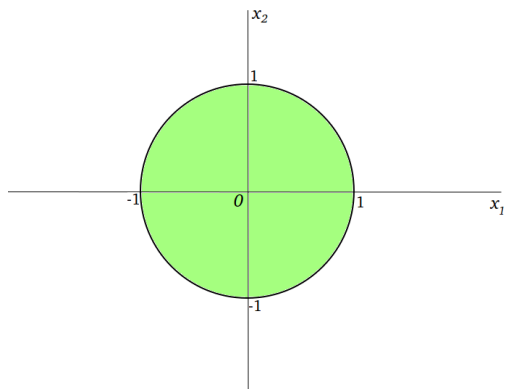
\mathbb{K} — либо поле комплексных чисел \mathbb{C} , либо поле действительных чисел \mathbb{R}

U — открытая область в \mathbb{K}^m

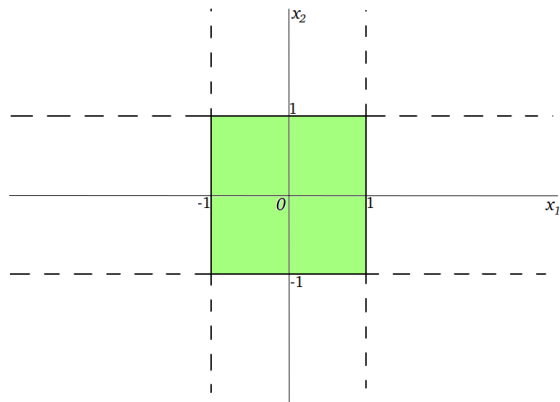
\bar{U} — замыкание области U

Будем говорить, что открытая область U , имеющая непустую границу и содержащая $(0, \dots, 0)$, *согласована с полиномом* $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, если в любой точке на границе U полином $q(\mathbf{x})$ принимает нулевое значение.

Примеры области



$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$



$$q(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_1 - 1)(x_2 - 1)$$

Уравнения с граничными условиями

$f(\mathbf{x})$ — некоторая функция, определенная в U

$\bar{f}(\mathbf{x})$ — та же функция, дополненная нулем на границе U

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{если } (\mathbf{x}) \in U \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \bar{U} \setminus U \end{cases} \quad (19)$$

$f_\alpha(\mathbf{x})$ — частная производная $f(\mathbf{x})$

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m \quad (20)$$

$\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})$ — частная производная $f(\mathbf{x})$, дополненная нулем на границе U

Уравнения с граничными условиями

Пусть U — некоторая область в \mathbb{K}^m , согласованная с полиномом $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$.

Задача ЗС (zero condition)

Для следующих исходных данных:

- ▶ непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$,
- ▶ полином $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ и область U ,
- ▶ дифференциальный оператор $L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, x]$,

требуется определить, существует ли у однородного дифференциального уравнения $L(f) = 0$ такое ненулевое решение $f(\mathbf{x})$, что:

- функция $f(\mathbf{x})$ аналитична в области U
- для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна в \overline{U}

Примеры задачи

- ▶ $A = \{(0, \dots, 0)\}$
- ▶ U — шар радиуса 1 в \mathbb{R}^m с центром в нуле
- ▶ $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1$
- ▶ $L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$

Получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x})}{\partial x_m^2} &= 0, \\ y(\mathbf{x})|_{x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1} &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

которая не имеет ненулевых решений.

Примеры задачи

- ▶ $A = \{(0, \dots, 0)\}$
- ▶ U — шар радиуса 1 в \mathbb{R}^m с центром в нуле
- ▶ $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1$
- ▶ $L = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \dots + \frac{\partial^3}{\partial x_m^3}$

Получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y(\mathbf{x})}{\partial x_1^3} + \dots + \frac{\partial^3 y(\mathbf{x})}{\partial x_m^3} &= 0, \\ y(\mathbf{x})|_{x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1} &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

которая имеет решение $y(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1$.

Уравнения с граничными условиями

Задача ЗС связана с вопросом о единственности аналитического решения для случая ненулевых граничных условий: пусть для уравнения

$$L(f) = b(x), \quad L \in \mathbb{Z}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, x\right]$$

с какими-либо (необязательно нулевыми) граничными условиями известно одно аналитическое решение $f(x)$.

Как убедиться, что это решение единственно?

Оно является единственным тогда и только тогда, когда у однородного уравнения $L(f) = 0$ с нулевыми граничными условиями имеется только нулевое решение, т.е. когда ответ на вопрос, содержащийся в задаче ЗС, отрицателен.

Лемма

Пусть A — конечное подмножество $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ и U — область в \mathbb{K}^m , согласованная с полиномом $q(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$. Тогда диофантово уравнение

$$C(n_1, \dots, n_m) = 0, \quad C \in \mathbb{Z}[n_1, \dots, n_m] \quad (23)$$

имеет целочисленное решение $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}^m$ тогда и только тогда, когда существует такой вектор (u_1, \dots, u_m) , $u_i = \pm 1$, что дифференциальное уравнение $L(f) = 0$, где

$$L = C \left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \frac{1}{q^{s+1}(x_1, \dots, x_m)}, \quad s = \max\{|\alpha| : \alpha \in A\}, \quad (24)$$

имеет ненулевое решение $f(\mathbf{x})$ такое, что

- (а) оно аналитическое в области U ,
- (б) для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна в \overline{U} .

Идея доказательства

Пусть уравнение $C(n_1, \dots, n_m) = 0$ имеет целочисленное решение (z_1, \dots, z_m) .

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i \geq 0, \\ -1, & \text{если } z_i < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда уравнение

$$C\left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{y(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})} = 0 \quad (26)$$

имеет решение $y(x_1, \dots, x_m) = x_1^{u_1 z_1} \dots x_m^{u_m z_m} q^{s+1}(\mathbf{x})$, которое удовлетворяет требуемым условиям.

Идея доказательства

Пусть существует (u_1, \dots, u_m) , $u_i = \pm 1$, такой, что уравнение

$$C \left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) \frac{y(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})} = 0 \quad (27)$$

имеет ненулевое аналитическое решение $f(x_1, \dots, x_m)$.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} a_n x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}, \quad f(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_m]] \quad (28)$$

Тогда уравнение $C \left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) y(\mathbf{x}) = 0$ имеет ненулевое решение

$$g(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})}, \quad g(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}((x_1)) \dots ((x_m)), \quad (29)$$

а значит имеет также решение в виде монома.

Уравнения с граничными условиями

Теорема

Задача ZС алгоритмически неразрешима.

Идея доказательства

Предположим, что алгоритм решения задачи ZС существует.

Тогда с помощью этого алгоритма мы можем для произвольного диофантова уравнения $C(n_1, \dots, n_m) = 0$ выяснять, существует ли у него целочисленное решение.

Для этого достаточно будет проверить существование аналитического решения у 2^m дифференциальных уравнений.

Алгоритма, проверяющего наличие решения у диофантова уравнения, не существует. Следовательно, не существует и алгоритма, решающего задачу ZС.

Бесконечно дифференцируемые решения

Бесконечно дифференцируемые решения

При доказательстве неразрешимости задачи ZС используется факт, что диофантово уравнение $C(n_1, \dots, n_m) = 0$ имеет целочисленное неотрицательное решение тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение $C\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(\mathbf{x}) = 0$ имеет ненулевое аналитическое решение в некоторой окрестности нуля. Заметим, что для бесконечно дифференцируемых решений это утверждение неверно

Пример

Диофантово уравнение $3n_1 - 3n_2 - 1 = 0$ не имеет целочисленных решений, в то время как дифференциальное уравнение

$$3x_1 \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1} - 3x_2 \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2} - y(x_1, x_2) = 0 \quad (30)$$

имеет бесконечно дифференцируемое решение $y(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{x_1^2 x_2^2}}$

Бесконечно дифференцируемые решения

J. Denef, L. Lipshitz

Power series solutions of algebraic differential equations (1984)

Диофантово уравнение $C(n_1, \dots, n_m) = 0$, $C \in \mathbb{Z}[n_1, \dots, n_m]$ имеет решение $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$C \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) y(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{(1-x_1) \dots (1-x_m)} \quad (31)$$

не имеет решения в виде формального степенного ряда.

Лемма

Пусть

- ▶ $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ — некоторый ненулевой полином,
- ▶ U — открытая ограниченная область в \mathbb{R}^m , такая, что $0 \in U$ и $q(\mathbf{x})$ принимает нулевое значение во всех точках границы U ,
- ▶ A — конечное подмножество $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$,
- ▶ $s = \max\{|\alpha| : \alpha \in A\}$.

Тогда диофантово уравнение $C(n_1, \dots, n_m) = 0$, $C \in \mathbb{Z}[n_1, \dots, n_m]$, имеет решение $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$\left(1 - \frac{x_1}{r}\right) \dots \left(1 - \frac{x_m}{r}\right) C \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{y(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})} = 1, \quad (32)$$

$$r = \lceil \sup_{x \in U} (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}} \rceil + 1,$$

не имеет такого бесконечно дифференцируемого в U решения $f(\mathbf{x})$, что для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна во всех точках границы области U .

Бесконечно дифференцируемые решения

Пусть U — некоторая ограниченная область в \mathbb{R}^m , согласованная с полиномом $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$.

Задача ZCD (Zero Condition for infinitely Differentiable solutions)

Для следующих исходных данных:

- ▶ непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$,
- ▶ полином $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ и область U ,
- ▶ дифференциальное уравнение

$$Ly = b(\mathbf{x}), \quad L \in \mathbb{Z}\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right], \quad b(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}], \quad (33)$$

требуется определить, существует ли у однородного дифференциального уравнения $L(f) = 0$ такое ненулевое решение $f(\mathbf{x})$, что:

- функция $f(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируема в области U
- для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна в \overline{U}

Бесконечно дифференцируемые решения

Теорема

Задача ZCD алгоритмически неразрешима.

Идея доказательства

Предположим, что алгоритм решения задачи ZCD существует.

Тогда с помощью этого алгоритма мы можем для произвольного диофантова уравнения $C(n_1, \dots, n_m) = 0$ выяснять, существует ли у него целочисленное неотрицательное решение.

Для этого достаточно будет проверить существование бесконечно дифференцируемого решения у соответствующего дифференциального уравнения.

Алгоритма, проверяющего наличие решения у диофантова уравнения, не существует.

Следовательно, не существует и алгоритма, решающего задачу ZCD.

Конечно дифференцируемые решения

Конечно дифференцируемые решения

Доказательство неразрешимости задачи ZCD использует тот факт, что диофантово уравнение $C(n_1, \dots, n_m) = 0$ имеет целочисленное неотрицательное решение тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$C \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) y(\mathbf{x}) = b(x_1, \dots, x_m), \quad (34)$$

$$b(x_1, \dots, x_m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m} a_n x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}, \quad a_n \neq 0,$$

не имеет бесконечно дифференцируемых решений в области, содержащей 0.

Это, в свою очередь, опирается на тот факт, что уравнение

$$P \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) y(\mathbf{x}) = x^n, \quad P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m], \quad n \in \mathbb{Z}^m \quad (35)$$

имеет бесконечно дифференцируемое решение тогда и только тогда, когда $P(n_1, \dots, n_m) \neq 0$.

Конечно дифференцируемые решения

Если же рассматривать решения, дифференцируемые конечное число раз, то для них эти утверждения неверны даже в случае одной переменной.

Пример

Пусть $P(n) = n - k$, где $k \geq 2$.

Соответствующее дифференциальное уравнение $xy'(x) - ky(x) = x^k$ имеет $k - 1$ раз дифференцируемое решение

$$y(x) = \begin{cases} x^k \ln |x|, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Конечно дифференцируемые решения

Пример

Пусть

- ▶ $k \geq 2$ — некоторое целое число,
- ▶ $b(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ — степенной ряд, сходящийся в интервале $(-t, t)$.

Диофантово уравнение $u - k = 0$ имеет решение $u = k$.

Соответствующее ему дифференциальное уравнение $xy'(x) - ky(x) = b(x)$ также имеет решение

$$y(x) = \begin{cases} a_k x^k \ln|x| + \sum_{n \geq 0, n \neq k} \frac{a_n}{n-k} x^n, & \text{при } x \neq 0, \\ -\frac{a_0}{k}, & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (37)$$

которое будет дифференцируемым $k - 1$ раз в интервале $(-t, t)$.