О некоторых алгоритмически неразрешимых задачах, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных

С. В. Парамонов
s.v.paramonov@yandex.ru

Московский Государственный Университет
факультет вычислительной математики и кибернетики

2016

Введение

Мы будем рассматривать вопросы алгоритмической неразрешимости для задач распознавания существования решений некоторых видов для линейных уравнений в частных производных (или разностях) с полиномиальными коэффициентами.

- Рациональные функции
- Формальные лорановы ряды
- Аналитические функции
- Бесконечно дифференцируемые функции
- Конечно дифференцируемые функции

Введение

Линейный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами:

$$L = \sum_{n \in S} p_n(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_m^{n_m}} \tag{1}$$

- S — конечное подмножество $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$
- $x_1, \dots, x_m$ — вектор из m независимых переменных (для краткости будем обозначать его через $\mathbf{x}$)
- $p_n \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- $|n| = n_1 + \dots + n_m$

Кольцо таких операторов будем обозначать через $\mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}]$

Введение

Линейный разностный оператор с полиномиальными коэффициентами:

$$L = \sum_{n \in S} p_n(x_1, \ldots, x_m) \Delta_1^{n_1} \ldots \Delta_m^{n_m} \tag{2}$$

- S — конечное подмножество $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m$
- $p_n \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$
- $\Delta_i y(x) = y(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_m) - y(x_1, \ldots, x_m)$

Кольцо таких операторов будем обозначать через $\mathbb{Z}[\Delta, \mathbf{x}]$

Введение

При $m = 1$:

- дифференциальное уравнение $Ly(\mathbf{x}) = 0 \quad (L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}])$ принимает вид

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{3}$$

- разностное уравнение $Ly(\mathbf{x}) = 0 \quad (L \in \mathbb{Z}[\Delta, \mathbf{x}])$ принимает вид

$$a_n(x)y(x+n) + a_{n-1}(x)y(x+n-1) + \cdots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{4}$$

Для таких уравнений известны эффективные алгоритмы

- поиска полиномиальных решений
- поиска решений в виде рациональных функций

Введение

Для случая $m \geqslant 2$ подобных универсальных алгоритмов нет

Исследования алгоритмических аспектов поиска решений в виде рациональных функций (универсального знаменателя) для уравнений в частных разностях:

- M. Kauers, C. Schneider. *Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations* (2010)
- M. Kauers, C. Schneider. *A Refined Denominator Bounding Algorithm for Multivariate Linear Difference Equations* (2011)

Алгоритмическая неразрешимость задач поиска решений в виде полиномов и формальных степенных рядов для уравнений в частных производных (или разностях):

- J. Denef, L. Lipshitz. *Power series solutions of algebraic differential equations* (1984)
- S. Abramov, M. Petkovšek. *On polynomial solutions of linear partial differential and (q-)difference equations* (2012)

Введение

$$\delta_i = \begin{cases} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, & \text{в дифференциальном случае,} \\ x_i \Delta_i, & \text{в разностном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

$$\delta^n = \delta_1^{n_1} \dots \delta_m^{n_m} \qquad \text{при } n \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}.$$

$$\mathbf{x}^{\langle n \rangle} = \begin{cases} \mathbf{x}^n, & \text{в дифференциальном случае,} \\ \mathbf{x}^{\overline{n}}, & \text{в разностном случае,} \end{cases} \tag{6}$$

$$n \in \mathbb{Z}^m, \qquad \mathbf{x}^n = x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}, \qquad \mathbf{x}^{\overline{n}} = x_1^{\overline{n_1}} \dots x_m^{\overline{n_m}}$$

$$x^{\overline{k}} = \begin{cases} x(x+1)\dots(x+k-1), & \text{если } k > 0, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-|k|)}, & \text{если } k < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Введение

$$\delta_i \mathbf{x}^{\langle n \rangle} = n_i \mathbf{x}^{\langle n \rangle}, \qquad n \in \mathbb{Z}^m \tag{8}$$

$$\delta^k \mathbf{x}^{\langle n \rangle} = n^k \mathbf{x}^{\langle n \rangle}, \qquad n, k \in \mathbb{Z}^m, \tag{9}$$

$$P(\delta_1, \ldots, \delta_m) \mathbf{x}^{\langle n \rangle} = P(n_1, \ldots, n_m) \mathbf{x}^{\langle n \rangle}, \qquad P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]. \tag{10}$$

Из (10) следует, что уравнение

$$P(\delta_1, \ldots, \delta_m) \mathbf{x}^{\langle n \rangle} = 0, \qquad P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m] \tag{11}$$

имеет решение $n \in \mathbb{Z}^m$ тогда и только тогда, когда n является решением диофантова уравнения

$$P(n_1, \ldots, n_m) = 0. \tag{12}$$

Теорема (Матиясевич, 1970)

Не существует алгоритма, который по заданному произвольному диофантову уравнению определял бы наличие у него целочисленного решения.

Рациональные функции

Рациональные функции

$$o(\mathbf{x}^n) = \sum_{s \prec n,\ s \in \mathbb{Z}^m} c_s \mathbf{x}^s, \qquad n \in \mathbb{Z}^m, \qquad \prec \text{ — отношение лексикографического порядка}$$

Утверждение 1

Если $n, d \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, $1 \le i \le m$, то

$$\delta_i \frac{\mathbf{x}^n + o(\mathbf{x}^n)}{\mathbf{x}^d + o(\mathbf{x}^d)} = \frac{(n_i - d_i)\mathbf{x}^{n+d} + o(\mathbf{x}^{n+d})}{\mathbf{x}^{2d} + o(\mathbf{x}^{2d})}. \tag{13}$$

Утверждение 2

$$\delta^s \frac{\mathbf{x}^n + o(\mathbf{x}^n)}{\mathbf{x}^d + o(\mathbf{x}^d)} = \frac{(n-d)^s \mathbf{x}^{n+r} + o(\mathbf{x}^{n+r})}{\mathbf{x}^{d+r} + o(\mathbf{x}^{d+r})}, \tag{14}$$

где $s, n, d \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, $\quad r = (2^{s_1 + \cdots + s_m} - 1)d$.

Утверждение 3

Если рациональная функция $\frac{\mathbf{x}^n + o(\mathbf{x}^n)}{\mathbf{x}^d + o(\mathbf{x}^d)}$ является решением уравнения

$$P(\delta_1, \ldots, \delta_m) y(\mathbf{x}) = 0, \qquad P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m], \tag{15}$$

то $\mathbf{x}^{\langle n-d \rangle}$ также является его решением.

Теорема 1

Не существует алгоритма, определяющего, имеет ли данное линейное однородное уравнение в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами ненулевое рациональное решение.

Формальные лорановы ряды

Формальные лорановы ряды

В случае одной переменной x формальным лорановым рядом с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ называется выражение вида

$$\sum_{n=z}^{\infty} a_n x^n, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \mathbb{K} \tag{16}$$

Множество всех таких рядов образует поле, обозначаемое $\mathbb{K}((x))$, которое является полем отношений для кольца формальных степенных рядов $\mathbb{K}[[x]]$.

В случае нескольких переменных $x_1, ..., x_m$ существуют различные вариации определения лорановых рядов. Один из способов:

$$\mathbb{K}((x_1))((x_2))\dots((x_m)) \tag{17}$$

Формальные лорановы ряды

Второй способ определения лорановых рядов
A. Aparicio Monforte, M. Kauers. *Formal Laurent series in several variables* (2013)

C — конус в $\mathbb{R}^m$:

$$C = \{c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^m_{\geqslant 0}\}$$
$$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^m, \qquad \forall u \in C \setminus \{0\} : -u \notin C$$

$\preceq$ — отношение порядка, совместное с C:

$$\forall i, j, k \in \mathbb{Z}^m : i \preceq j \Rightarrow i + k \preceq j + k, \qquad \forall u \in C \cap \mathbb{Z}^m : 0 \preceq u$$

$$\mathbb{K}_C[[x]] = \{\sum_{n \in C \cap \mathbb{Z}^m} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{K}\},$$
$$\mathbb{K}_{\preceq}[[x]] = \bigcup_{C \in \Upsilon} \mathbb{K}_C[[x]], \qquad \mathbb{K}_{\preceq}((x)) = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} x^{\gamma} \mathbb{K}_{\preceq}[[x]]$$

Формальные лорановы ряды

Второй подход к определению поля лорановых рядов в некотором смысле более гибкий, чем первый: при $m > 1$ существует бесконечное число возможностей для выбора отношения порядка $\preceq$ и лишь $m!$ возможностей выбора порядка переменных.

Пример

- Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{2n}y^{-n} + x^{-n}y^{2n})$ принадлежит $\mathbb{K}_{\preceq}((x, y))$, но не принадлежит $\mathbb{K}((x))((y))$
- Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^{n}y^{n^2} + x^{n}y^{-n^2})$ принадлежит $\mathbb{K}((y))((x))$, но не принадлежит $\mathbb{K}_{\preceq}((x, y))$

Формальные лорановы ряды

Обобщая два описанных подхода, назовем полем формальных лорановых рядов переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ над полем $\mathbb{K}$ такое поле Λ, что

$$\mathbb{K}[[\mathbf{x}^{\pm 1}]] \subset \Lambda \subset \mathbb{K}[[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]], \tag{18}$$

$\mathbb{K}[[\mathbf{x}^{\pm 1}]] = \mathbb{K}[[x_1^{d_1}, \ldots, x_m^{d_m}]]$, где $d_i = \pm 1$,
$\mathbb{K}[[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]] = \mathbb{K}[[x_1, ..., x_m, x_1^{-1}, ..., x_m^{-1}]]$ — кольцо всех формальных сумм $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n \mathbf{x}^n$.

Утверждение

Для любого аддитивного отношения порядка $\preceq$ на $\mathbb{Z}^m$ поле $\Lambda = \mathbb{K}_{\preceq}((\mathbf{x}))$ при некоторых $d_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяет условию (18).

Теорема

Пусть Λ — некоторое поле лорановых рядов от m переменных $(m \geqslant 11)$. Тогда алгоритмически неразрешима задача проверки существования решений в поле Λ для заданного дифференциального уравнения $Ly(\mathbf{x}) = 0,\ L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}]$.

Аналитические функции

Уравнения с граничными условиями

Важный класс задач составляют дифференциальные уравнения в частных производных с граничными условиями.

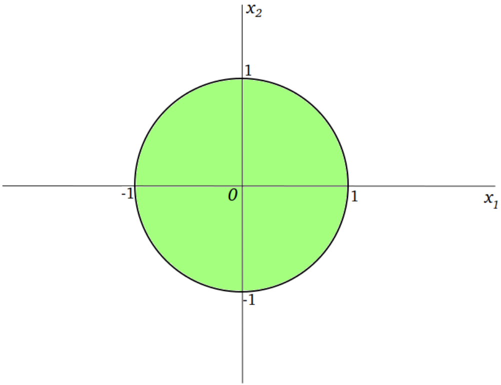
Обозначения

$\mathbb{K}$ — либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$

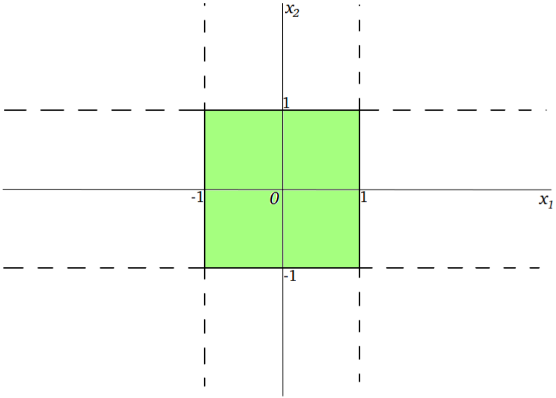
U — открытая область в $\mathbb{K}^m$
$\overline{U}$ — замыкание области U

Будем говорить, что открытая область U, имеющая непустую границу и содержащая $(0, ..., 0)$, *согласована с полиномом* $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$, если в любой точке на границе U полином $q(\mathbf{x})$ принимает нулевое значение.

Примеры области



$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$



$$q(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_1 - 1)(x_2 - 1)$$

Уравнения с граничными условиями

$f(\mathbf{x})$ — некоторая функция, определенная в U

$\overline{f}(\mathbf{x})$ — та же функция, дополненная нулем на границе U

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{если } (\mathbf{x}) \in U \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \overline{U} \backslash U \end{cases} \tag{19}$$

$f_\alpha(\mathbf{x})$ — частная производная $f(\mathbf{x})$

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \tag{20}$$

$\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ — частная производная $f(\mathbf{x})$, дополненная нулем на границе U

Уравнения с граничными условиями

Пусть U — некоторая область в $\mathbb{K}^m$, согласованная с полиномом $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$.

Задача ZC (zero condition)

Для следующих исходных данных:

- непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$,
- полином $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$ и область U,
- дифференциальный оператор $L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, x]$,

требуется определить, существует ли у однородного дифференциального уравнения $L(f) = 0$ такое ненулевое решение $f(\mathbf{x})$, что:
(a) функция $f(\mathbf{x})$ аналитична в области U
(b) для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна в $\overline{U}$

Примеры задачи

- $A = \{(0, \ldots, 0)\}$
- U — шар радиуса 1 в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле
- $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_m^2 - 1$
- $L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$

Получаем задачу

$$\frac{\partial^2 y(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 y(\mathbf{x})}{\partial x_m^2} = 0, \tag{21}$$

$$y(\mathbf{x})|_{x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1} = 0,$$

которая не имеет ненулевых решений.

Примеры задачи

- $A = \{(0, \dots, 0)\}$
- U — шар радиуса 1 в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле
- $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1$
- $L = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \dots + \frac{\partial^3}{\partial x_m^3}$

Получаем задачу

$$\frac{\partial^3 y(\mathbf{x})}{\partial x_1^3} + \dots + \frac{\partial^3 y(\mathbf{x})}{\partial x_m^3} = 0, \tag{22}$$

$$y(\mathbf{x})|_{x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1} = 0,$$

которая имеет решение $y(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1$.

Уравнения с граничными условиями

Задача ZC связана с вопросом о единственности аналитического решения для случая ненулевых граничных условий: пусть для уравнения

$$L(f) = b(x), \qquad\qquad L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, x]$$

с какими-либо (необязательно нулевыми) граничными условиями известно одно аналитическое решение $f(x)$.

Как убедиться, что это решение единственно?

Оно является единственным тогда и только тогда, когда у однородного уравнения $L(f) = 0$ с нулевыми граничными условиями имеется только нулевое решение, т.е. когда ответ на вопрос, содержащийся в задаче ZC, отрицателен.

Лемма

Пусть A — конечное подмножество $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ и U — область в $\mathbb{K}^m$, согласованная с полиномом $q(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$. Тогда диофантово уравнение

$$C(n_1, ..., n_m) = 0, \qquad C \in \mathbb{Z}[n_1, ..., n_m] \tag{23}$$

имеет целочисленное решение $(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{Z}^m$ тогда и только тогда, когда существует такой вектор $(u_1, ..., u_m)$, $u_i = \pm 1$, что дифференциальное уравнение $L(f) = 0$, где

$$L = C\left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{1}{q^{s+1}(x_1, ..., x_m)}, \qquad s = \max\{|\alpha| : \alpha \in A\}, \tag{24}$$

имеет ненулевое решение $f(\mathbf{x})$ такое, что

(a) оно аналитическое в области U,

(b) для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна в $\overline{U}$.

Идея доказательства

Пусть уравнение $C(n_1, ..., n_m) = 0$ имеет целочисленное решение $(z_1, ..., z_m)$.

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } z_i < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Тогда уравнение

$$C\left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{y(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})} = 0 \tag{26}$$

имеет решение $y(x_1, ..., x_m) = x_1^{u_1 z_1} ... x_m^{u_m z_m} q^{s+1}(\mathbf{x})$, которое удовлетворяет требуемым условиям.

Идея доказательства

Пусть существует $(u_1, ..., u_m)$, $u_i = \pm 1$, такой, что уравнение

$$C\left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{y(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})} = 0 \tag{27}$$

имеет ненулевое аналитическое решение $f(x_1, ..., x_m)$.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m} a_n x_1^{n_1} ... x_m^{n_m}, \qquad f(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}[[x_1, ..., x_m]] \tag{28}$$

Тогда уравнение $C\left(u_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., u_m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(\mathbf{x}) = 0$ имеет ненулевое решение

$$g(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})}, \quad g(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}((x_1))...((x_m)), \tag{29}$$

а значит имеет также решение в виде монома.

Уравнения с граничными условиями

Теорема

Задача ZC алгоритмически неразрешима.

Идея доказательства

Предположим, что алгоритм решения задачи ZC существует.
Тогда с помощью этого алгоритма мы можем для произвольного диофантова уравнения $C(n_1, ..., n_m) = 0$ выяснять, существует ли у него целочисленное решение.
Для этого достаточно будет проверить существование аналитического решения у 2^m дифференциальных уравнений.

Алгоритма, проверяющего наличие решения у диофантова уравнения, не существует.
Следовательно, не существует и алгоритма, решающего задачу ZC.

Бесконечно дифференцируемые решения

Бесконечно дифференцируемые решения

При доказательстве неразрешимости задачи ZC используется факт, что диофантово уравнение $C(n_1, \ldots, n_m) = 0$ имеет целочисленное неотрицательное решение тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение $C\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(\mathbf{x}) = 0$ имеет ненулевое аналитическое решение в некоторой окрестности нуля. Заметим, что для бесконечно дифференцируемых решений это утверждение неверно

Пример

Диофантово уравнение $3n_1 - 3n_2 - 1 = 0$ не имеет целочисленных решений, в то время как дифференциальное уравнение

$$3x_1 \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1} - 3x_2 \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2} - y(x_1, x_2) = 0 \tag{30}$$

имеет бесконечно дифференцируемое решение $y(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{x_1^2 x_2^2}}$

Бесконечно дифференцируемые решения

J. Denef, L. Lipshitz
Power series solutions of algebraic differential equations (1984)

Диофантово уравнение $C(n_1, \ldots, n_m) = 0, \quad C \in \mathbb{Z}[n_1, \ldots, n_m]$ имеет решение $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$C\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{(1 - x_1) \ldots (1 - x_m)} \qquad (31)$$

не имеет решения в виде формального степенного ряда.

Лемма

Пусть

- $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ — некоторый ненулевой полином,
- U — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, такая, что $0 \in U$ и $q(\mathbf{x})$ принимает нулевое значение во всех точках границы U,
- A — конечное подмножество $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$,
- $s = \max\{|\alpha| : \alpha \in A\}$.

Тогда диофантово уравнение $C(n_1, \dots, n_m) = 0, \quad C \in \mathbb{Z}[n_1, \dots, n_m]$, имеет решение $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$\left(1 - \frac{x_1}{r}\right) \dots \left(1 - \frac{x_m}{r}\right) C\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{y(\mathbf{x})}{q^{s+1}(\mathbf{x})} = 1, \tag{32}$$

$$r = \lceil \sup_{x \in U} (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}} \rceil + 1,$$

не имеет такого бесконечно дифференцируемого в U решения $f(\mathbf{x})$, что для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна во всех точках границы области U.

Бесконечно дифференцируемые решения

Пусть U — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, согласованная с полиномом $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$.

Задача ZCD (Zero Condition for infinitely Differentiable solutions)

Для следующих исходных данных:

- непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$,
- полином $q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$ и область U,
- дифференциальное уравнение

$$Ly = b(\mathbf{x}), \qquad L \in \mathbb{Z}[\frac{\partial}{\partial x}, x], \qquad b(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}], \tag{33}$$

требуется определить, существует ли у однородного дифференциального уравнения $L(f) = 0$ такое ненулевое решение $f(\mathbf{x})$, что:

(a) функция $f(\mathbf{x})$ бесконечно дифференцируема в области U

(b) для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(\mathbf{x})$ непрерывна в $\overline{U}$

Бесконечно дифференцируемые решения

Теорема

Задача ZCD алгоритмически неразрешима.

Идея доказательства

Предположим, что алгоритм решения задачи ZCD существует.
Тогда с помощью этого алгоритма мы можем для произвольного диофантова уравнения $C(n_1, ..., n_m) = 0$ выяснять, существует ли у него целочисленное неотрицательное решение.
Для этого достаточно будет проверить существование бесконечно дифференцируемого решения у соответствующего дифференциального уравнения.

Алгоритма, проверяющего наличие решения у диофантова уравнения, не существует.
Следовательно, не существует и алгоритма, решающего задачу ZCD.

Конечно дифференцируемые решения

Конечно дифференцируемые решения

Доказательство неразрешимости задачи ZCD использует тот факт, что диофантово уравнение $C(n_1, \ldots, n_m) = 0$ имеет целочисленное неотрицательное решение тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение

$$C\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(\mathbf{x}) = b(x_1, \ldots x_m), \tag{34}$$

$$b(x_1, \ldots x_m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}} a_n x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m}, \qquad a_n \neq 0,$$

не имеет бесконечно дифференцируемых решений в области, содержащей 0.

Это, в свою очередь, опирается на тот факт, что уравнение

$$P\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(\mathbf{x}) = x^n, \qquad P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m], \qquad n \in \mathbb{Z}^m \tag{35}$$

имеет бесконечно дифференцируемое решение тогда и только тогда, когда $P(n_1, \ldots, n_m) \neq 0$.

Конечно дифференцируемые решения

Если же рассматривать решения, дифференцируемые конечное число раз, то для них эти утверждения неверны даже в случае одной переменной.

Пример

Пусть $P(n) = n - k$, где $k \geqslant 2$.
Соответствующее дифференциальное уравнение $xy'(x) - ky(x) = x^k$ имеет $k-1$ раз дифференцируемое решение

$$y(x) = \begin{cases} x^k \ln|x|, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Конечно дифференцируемые решения

Пример

Пусть

- $k \geqslant 2$ — некоторое целое число,
- $b(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ — степенной ряд, сходящийся в интервале $(-t, t)$.

Диофантово уравнение $u - k = 0$ имеет решение $u = k$.
Соответствующее ему дифференциальное уравнение $xy'(x) - ky(x) = b(x)$ также имеет решение

$$y(x) = \begin{cases} a_k x^k \ln|x| + \sum\limits_{n \geqslant 0,\ n \neq k} \frac{a_n}{n-k} x^n, & \text{при } x \neq 0, \\ -\frac{a_0}{k}, & \text{при } x = 0, \end{cases} \tag{37}$$

которое будет дифференцируемым $k - 1$ раз в интервале $(-t, t)$.