О задаче проверки единственности аналитических решений уравнений в частных производных с граничными условиями

С. В. Парамонов
s.v.paramonov@yandex.ru

Московский Государственный Университет
факультет вычислительной математики и кибернетики

2014

Обозначения

Частная производная: $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Линейные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами:

$$\mathbb{Z}[D,x] = \{L : L = \sum_{n \in S} a_n(x_1, ..., x_m) D_1^{n_1} \dots D_m^{n_m}, \quad a_n \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]\}$$

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$L(y) = 0, \qquad L \in \mathbb{Z}[D,x]$$

Связанные вопросы

Алгоритмическая неразрешимость задачи проверки существования решений различных видов у дифференциальных уравнений в частных производных:

J. Denef, L. Lipshitz. Power series solutions of algebraic differential equations (1984)

$L(y(x_1,\dots,x_m)) = 1, \qquad L \in \mathbb{Z}[D,x],$ решения в виде формальных степенных рядов

S. Abramov, M. Petkovsek. On polynomial solutions of linear partial differential and (q-)difference equations (2012)

$L(y(x_1,\dots,x_m)) = 0, \qquad L \in \mathbb{Z}[D,x],$ решения в виде полиномов

С. Парамонов. О рациональных решениях линейных уравнений с частными производными или разностями (2013)

$L(y(x_1,\dots,x_m)) = 0, \qquad L \in \mathbb{Z}[D,x],$ решения в виде рациональных функций

Связанные вопросы неразрешимости

С. Парамонов. Задача проверки существования решений дифференциальных уравнений в частных производных в полях лорановых рядов (2014)

$$L(y(x_1,\dots,x_m)) = 0, \qquad L \in \mathbb{Z}[D,x], \qquad \text{решения в виде формальных лорановых рядов}$$

Под полями формальных лорановых рядов в данном случае подразумеваются такие поля Λ, которые удовлетворяют условию

$$K[[x_1,...,x_m]] \subset \Lambda \subset K[[x_1,...,x_m,x_1^{-1},...,x_m^{-1}]],$$

что позволяет включить в рассмотрение различные способы определения лорановых рядов в случае многих переменных.

F. Aroca, J. M. Cano, F. R. Jung. Power series solutions for non-linear PDE's (2003)
A. Aparicio Monforte, M. Kauers. Formal Laurent Series in Several Variables (2012)

Обозначения

K — либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо поле действительных чисел $\mathbb{R}$
U — открытая область в K^m
$\overline{U}$ — замыкание области U

$f(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторая функция, определенная в U

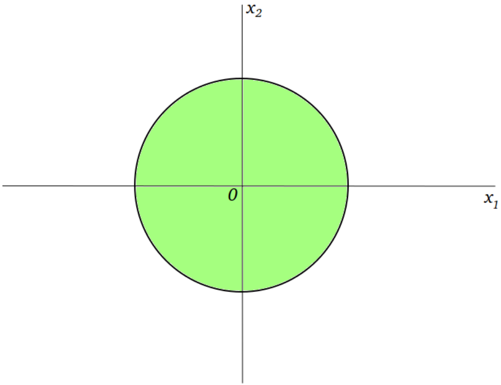
$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_m), & \text{если } (x_1, \ldots, x_m) \in U \\ 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_m) \in \overline{U} \backslash U \end{cases}$$

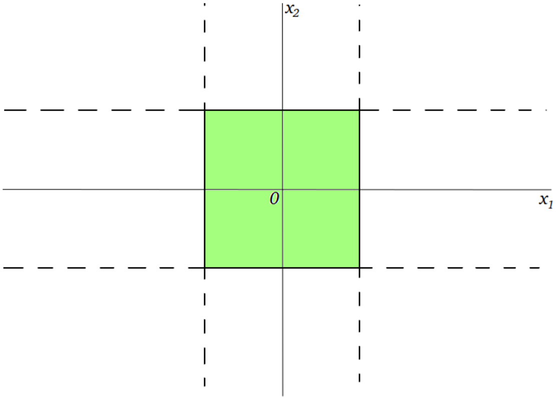
$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_m} x_m}, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$$

Будем говорить, что открытая область U, имеющая непустую границу, согласована с полиномом $q(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, если выполнены следующие условия:

- в любой точке на границе U полином $q(x_1, \ldots, x_m)$ принимает нулевое значение
- $q(0, \ldots, 0) \neq 0$
- $(0, \ldots, 0) \in U$

Примеры области





$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$q(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_1 - 1)(x_2 - 1)$$

Задача ZC

Пусть U — некоторая область, согласованная с полиномом $q(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$.
Рассмотрим задачу, в которой для следующих исходных данных:

- число $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ (количество независимых переменных),
- непустое конечное множество $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$,
- полином $q(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$ и, возможно, некоторая дополнительная информация об области U,
- дифференциальный оператор $L \in \mathbb{Z}[D, x]$,

требуется определить, существует ли у однородного дифференциального уравнения $L(f) = 0$ такое ненулевое решение $f(x_1, ..., x_m)$, что:
(a) функция $f(x_1, ..., x_m)$ аналитична в области U
(b) для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(x_1, ..., x_m)$ существует и непрерывна в $\overline{U}$

Примеры задачи

- $m = 2$
- $A = \{(0,0)\}$
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1,$ $\quad U$ — круг радиуса 1 с центром в нуле
- $L = D_1^2 + D_2^2$

Получаем задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$y(x_1,x_2)\big|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0$$

Она имеет единственное решение — нулевое.

Примеры задачи

- $m = 2$
- $A = \{(0,0)\}$
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad U$ — круг радиуса 1 с центром в нуле
- $L = D_1^2 + D_2^2$

Получаем задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$y(x_1, x_2)|_{x_1^2 + x_2^2 = 1} = 0$$

Она имеет единственное решение — нулевое.

Примеры задачи

- $m = 2$
- $A = \{(0, 0)\}$
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad U$ — круг радиуса 1 с центром в нуле
- $L = D_1^2 + D_2^2$

Получаем задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$y(x_1, x_2)|_{x_1^2 + x_2^2 = 1} = 0$$

Она имеет единственное решение — нулевое.

Примеры задачи

- $m = 2$
- $A = \{(0,0),(1,1)\}$
- $q(x_1, x_2) = x_1 - 1, \quad U$ — полуплоскость в R^2, отделяемая прямой $x_1 = 1$
- $L = D^2 - x_1 D_1 - (x_1 + x_2) D_1 D_2 + 2 = 0$

Получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1} - (x_1 + x_2)\frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + 2y(x_1,x_2) = 0$$

$$y(x_1,x_2)|_{x_1=1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}|_{x_1=1} = 0$$

Она имеет ненулевые аналитические решения, например $y(x_1,x_2) = x_1^2 - 1$.

Примеры задачи

- $m = 2$
- $A = \{(0,0),(1,1)\}$
- $q(x_1,x_2) = x_1 - 1, \quad U$ — полуплоскость в R^2, отделяемая прямой $x_1 = 1$
- $L = D^2 - x_1 D_1 - (x_1 + x_2) D_1 D_2 + 2 = 0$

Получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1} - (x_1+x_2)\frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + 2y(x_1,x_2) = 0$$

$$y(x_1,x_2)|_{x_1=1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}|_{x_1=1} = 0$$

Она имеет ненулевые аналитические решения, например $y(x_1,x_2) = x_1^2 - 1$.

Примеры задачи

- $m = 2$
- $A = \{(0,0),(1,1)\}$
- $q(x_1,x_2) = x_1 - 1, \quad U$ — полуплоскость в R^2, отделяемая прямой $x_1 = 1$
- $L = D^2 - x_1 D_1 - (x_1 + x_2) D_1 D_2 + 2 = 0$

Получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1} - (x_1 + x_2) \frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + 2y(x_1,x_2) = 0$$

$$y(x_1,x_2)|_{x_1=1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}|_{x_1=1} = 0$$

Она имеет ненулевые аналитические решения, например $y(x_1,x_2) = x_1^2 - 1$.

Неразрешимость задачи ZC

Теорема 1. Задача ZC алгоритмически неразрешима.

Доказательство основано на том, что для любого $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, любого полинома $q(x_1, \ldots, x_m)$ и любой области U, согласованной с ним, диофантово уравнение

$$C(n_1, \ldots, n_m) = 0, \qquad C \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$$

имеет целочисенное решение $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение $L(f(x_1, \ldots, x_m)) = 0$, где

$$L = C\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{1}{q^{s+1}(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad s = \max\{|\alpha| : \alpha \in A\},$$

имеет решение $f(x_1, \ldots, x_m)$, аналитическое в U, и для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(x_1, \ldots, x_m)$ существует и непрерывна в $\overline{U}$.

Неразрешимость задачи ZC

Теорема 1. Задача ZC алгоритмически неразрешима.

Доказательство основано на том, что для любого $A \subset \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, любого полинома $q(x_1, ..., x_m)$ и любой области U, согласованной с ним, диофантово уравнение

$$C(n_1, ..., n_m) = 0, \qquad C \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$$

имеет целочисенное решение $(n_1, ..., n_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ тогда и только тогда, когда дифференциальное уравнение $L(f(x_1, ..., x_m)) = 0$, где

$$L = C\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \frac{1}{q^{s+1}(x_1, ..., x_m)}, \qquad s = \max\{|\alpha| : \alpha \in A\},$$

имеет решение $f(x_1, ..., x_m)$, аналитическое в U, и для любого $\alpha \in A$ функция $\overline{f_\alpha}(x_1, ..., x_m)$ существует и непрерывна в $\overline{U}$.

Неразрешимость задачи ZC

В свою очередь, задача проверки существования решения диофантова уравнения $C(n_1, ..., n_m) = 0$ алгоритмически неразрешима.

Десятая проблема Гильберта
Теорема Девиса-Матиясевича-Патнема-Робинсон (1970)

На данный момент неразрешимость этой задачи доказана для:

- диофантовых уравнений четвертого порядка
- диофантовых уравнений с девятью переменными

Используя это, можно также утверждать о неразрешимости задачи ZC, в которой оператор L ограничен одним из двух способов:

- дифференциальные операторы $L \in \mathbb{Z}[D, x]$ четвертого порядка
- дифференциальные операторы $L \in \mathbb{Z}[D, x]$ с девятью переменными

Неразрешимость задачи ZC

В свою очередь, задача проверки существования решения диофантова уравнения $C(n_1, ..., n_m) = 0$ алгоритмически неразрешима.

Десятая проблема Гильберта
Теорема Девиса-Матиясевича-Патнема-Робинсон (1970)

На данный момент неразрешимость этой задачи доказана для:

- диофантовых уравнений четвертого порядка
- диофантовых уравнений с девятью переменными

Используя это, можно также утверждать о неразрешимости задачи ZC, в которой оператор L ограничен одним из двух способов:

- дифференциальные операторы $L \in \mathbb{Z}[D, x]$ четвертого порядка
- дифференциальные операторы $L \in \mathbb{Z}[D, x]$ с девятью переменными

Неразрешимость задачи ZC

В свою очередь, задача проверки существования решения диофантова уравнения $C(n_1, ..., n_m) = 0$ алгоритмически неразрешима.

Десятая проблема Гильберта
Теорема Девиса-Матиясевича-Патнема-Робинсон (1970)

На данный момент неразрешимость этой задачи доказана для:

- диофантовых уравнений четвертого порядка
- диофантовых уравнений с девятью переменными

Используя это, можно также утверждать о неразрешимости задачи ZC, в которой оператор L ограничен одним из двух способов:

- дифференциальные операторы $L \in \mathbb{Z}[D, x]$ четвертого порядка
- дифференциальные операторы $L \in \mathbb{Z}[D, x]$ с девятью переменными

Ненулевые условия

Задача ZC связана с вопросом о единственности аналитического решения для случая ненулевых граничных условий: пусть найдено какое-то одно аналитическое решение, можно ли быть уверенным, что это решение единственно?

Оно является единственным тогда и только тогда, когда у однородного уравнения с нулевыми граничными условиями имеется только нулевое решение (т.е. ответ на вопрос, содержащийся в задаче ZC, отрицателен).