Алгоритмы символьных вычислений в системах компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными

Панфёров Антон Александрович

ВЦ ФИЦ ИУ РАН

28 ноября 2018 г.

Пример

$$y' = Ay, \tag{1}$$

где $A \in K^{m\times m}$ — матрица системы,
$y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных

$$A := \begin{bmatrix} 1-1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> LinearFunctionalSystems:-RationalSolution(A, x, 'differential')
```

$$[0, \_c_1, 0, 0]$$

Пример

$$y' = Ay, \tag{1}$$

где $A \in K^{m \times m}$ — матрица системы,
$y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных

$$A := \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> LinearFunctionalSystems:-RationalSolution(A, x, 'differential')
```

$$[0, \_c_1, 0, 0]$$

Пример

$$y' = Ay, \tag{1}$$

где $A \in K^{m\times m}$ — матрица системы,
$y = (y_1, \dots, y_m)^T$ — вектор неизвестных

$$A := \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> LinearFunctionalSystems:-RationalSolution(A, x, 'differential')
```

$$[0, \_c_1, 0, 0]$$

AB-алгоритм

- С. А. Абрамов, М. Бронштейн
  Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных (2006)

$S\colon y' = Ay, \quad s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}$ — выделенные неизвестные

AB-алгоритм (алгоритм Абрамова–Бронштейна) позволяет для выделенных компонент s построить новую дифференциальную систему

$$S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz,$$

в которой компонентами z являются лишь выделенные компоненты y и, возможно, некоторые их производные.

AB-алгоритм: свойства

$$S\colon y' = Ay \quad\Longrightarrow\quad S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz$$

1. Проекции на выделенные неизвестные пространств решений в произвольном расширении поля K исходной системы S и системы S_s^{AB} совпадают.
2. Если решение системы S_s^{AB} таково, что его выделенные компоненты принадлежат некоторому расширению поля K, то и остальные его компоненты принадлежат этому расширению.
3. Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$ и система S обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению поля K, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Пример (продолжение)

$$y' = Ay, \quad y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, y_3, y_4)^T$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> LinearFunctionalSystems:-RationalSolution(A, x, 'differential')
```

$$[0, \_c_1, 0, 0]$$

```
> R:=OreTools:-SetOreRing(x, 'differential'):
> OreTools:-Consequences:-ReducedSystem(A, {1}, R)
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x} & \frac{x-2}{x} \end{bmatrix}, \{[1, 1]\}\right]$$

```
> LinearFunctionalSystems:-RationalSolution(Matrix2Eqs(%[1]))
```

$$\left[-\frac{\_c_1}{x}, \frac{\_c_1}{x^2}\right]$$

Дифференциальные системы

- Нормальная дифференциальная система:

$$y' = Ay, \tag{2}$$

$$A \in K^{m\times m}, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

- Линейная однородная дифференциальная система порядка r:

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0 \tag{3}$$

$$A_i \in K^{m\times m}, \quad A_r \neq 0, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$$\Downarrow$$

$$Y = (y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(r-1)}, \dots, y_m^{(r-1)})^T$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A}_1 Y' + \tilde{A}_0 Y = 0 \tag{4}$$

Дифференциальные системы

- Нормальная дифференциальная система:

$$y' = Ay, \tag{2}$$

$$A \in K^{m\times m}, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

- Линейная однородная дифференциальная система порядка r:

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0 \tag{3}$$

$$A_i \in K^{m\times m}, \quad A_r \neq 0, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$$\Downarrow$$

$$Y = (y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(r-1)}, \dots, y_m^{(r-1)})^T$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A}_1 Y' + \tilde{A}_0 Y = 0 \tag{4}$$

Обобщение на системы произвольного порядка

Для обобщения AB-алгоритма на линейные однородные дифференциальные системы произвольного порядка, достаточно рассмотреть случай линейной дифференциально-алгебраической системы

$$A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{5}$$

где A_1 — вырожденная матрица.

Для работы с линейными дифференциально-алгебраическими системами с выделенными неизвестными предназначен алгоритм **Extract**.

(A1) Extract

Вход: дифференциально-алгебраическая система S с выделенными неизвестными s
Выход: S_d, S_a

1. исключение невыделенных неизвестных;
2. исключение выделенных неизвестных;
3. построение матриц систем S_d, S_a.

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$s = s_1 \cup s_2 \ (s_1 \cap s_2 = \varnothing)$$

$$\begin{tikzcd} & s = s_1 \cup s_2 \arrow[dl, "(s_1)"'] \arrow[dr, "(s_2)"] & \\ S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y} & & S_a\colon y_{s_2} = B y_{s_1} \end{tikzcd}$$

$(\tilde{y} \subset y)$

B — матрица над K

Определение

Системы S_d, S_a называются согласованными с (S, s), если они позволяют находить выделенные компоненты решений S в произвольном расширении поля K.

(A2) ExtrAB=Extract+AB

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{выделенные неизвестные: } s = s_1 \cup s_2 \ (s_1 \cap s_2 = \varnothing) \arrow[dl, "(s_1)"'] \arrow[dr, "(s_2)"] & \\ (S_d)^{\mathrm{AB}}_{s_1}\colon z' = \tilde{A} z & & S_a\colon y_{s_2} = B y_{s_1} \end{tikzcd}$$

Теорема

Получаемые алгоритмом ExtrAB системы $(S_d)^{\mathrm{AB}}_{s_1}$ *и* S_a

- *являются согласованными с* (S, s)*;*
- *имеют минимально возможные размеры.*

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Шаг 2: AB-алгоритм

$$S_d \Longrightarrow (S_d)^{AB}_{\{y_2\}} : z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T$$

Рациональные решения для y_1, y_2:

$$(S_d)^{AB}_{\{y_2\}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = C/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = -C$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Шаг 2: AB-алгоритм

$$S_d \Longrightarrow (S_d)^{AB}_{\{y_2\}} : z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T$$

Рациональные решения для y_1, y_2:

$$(S_d)^{AB}_{\{y_2\}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = C/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = -C$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Шаг 2: AB-алгоритм

$$S_d \Longrightarrow (S_d)^{AB}_{\{y_2\}} : z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T$$

Рациональные решения для y_1, y_2:

$$(S_d)^{AB}_{\{y_2\}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = C/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = -C$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Шаг 2: AB-алгоритм

$$S_d \Longrightarrow (S_d)^{\mathrm{AB}}_{\{y_2\}} : z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T$$

Рациональные решения для y_1, y_2:

$$(S_d)^{\mathrm{AB}}_{\{y_2\}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = C/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = -C$$

Сателлитные неизвестные: мотивация

Третье свойство AB-алгоритма

$$S: y' = Ay \quad \Longrightarrow \quad S_s^{\mathrm{AB}}: z' = Bz$$

- Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$ и система S обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению поля K, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| < |S|$, можно ли указать невыделенные неизвестные, соответствующие которым компоненты решений

- всегда принадлежат тому же дифференциальному расширению, что и выделенные компоненты?
- выражаются линейно над K через выделенные компоненты и их производные?

Сателлитные неизвестные

$$S : y' = Ay, \quad \text{выделенные неизвестные } s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}$$

Определение

- Неизвестная $y_j \notin s$ называется сателлитной для s в S, если j-я компонента любого решения S принадлежит тому же минимальному дифференциальному расширению, что и все выделенные компоненты всех решений системы.
- Неизвестная $y_j \notin s$ называется линейно сателлитной для s в S, если j-я компонента любого решения S может быть выражена линейно с коэффициентами из K через выделенные компоненты этого решения и их производные.

Теорема

Для $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$ задача распознавания сателлитных (линейно сателлитных) неизвестных алгоритмически разрешима.

Алгоритмы распознавания

(А3) *Распознавание сателлитных неизвестных*

(А4) *Распознавание линейно сателлитных неизвестных*

Вход: Дифференциальная система S с множеством выделенных неизвестных s и невыделенная неизвестная y_j.

Выход: «ДА», если y_j является сателлитной для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S| \Rightarrow$ **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}| \Rightarrow$ **return** «ДА».
5. $K_{S_s^{\mathrm{AB}}} \supseteq K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}} \Rightarrow$ **return** «ДА».
6. **Return** «НЕТ».

Выход: «ДА», если y_j является линейно сателлитной для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S| \Rightarrow$ **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}| \Rightarrow$ **return** «ДА».
5. **Return** «НЕТ».

Алгоритмы распознавания

(A5) *Частичное распознавание сателлитных неизвестных*

(A4) *Распознавание линейно сателлитных неизвестных*

Вход: Дифференциальная система S с множеством выделенных неизвестных s и невыделенная неизвестная y_j.

Выход: «ДА», если y_j является сателлитной для s в S, или «НЕИЗВЕСТНО».

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S| \Rightarrow$ **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}| \Rightarrow$ **return** «ДА».
5. S_s^{AB} и $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$ рационально эквивалентны $\Rightarrow$ **return** «ДА».
6. **Return** «НЕИЗВЕСТНО».

Выход: «ДА», если y_j является линейно сателлитной для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S| \Rightarrow$ **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}| \Rightarrow$ **return** «ДА».
5. **Return** «НЕТ».

Обобщение на линейные дифференциально-алгебраические системы

(A6) Распознавание сателлитных (линейно сателлитных) неизвестных в дифференциально-алгебраических системах

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0, \quad \tilde{s} = s \cup \{y_j\} = s_1 \cup s_2$$

1. Применить алгоритм **Extract**:
   - $S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y} \quad (s_1$ — выделенные неизвестные)
   - $S_a\colon y_{s_2} = By_{s_1}$
2. Если y_j входит в S_a с ненулевым коэффициентом $\Rightarrow$ y_j является сателлитной (линейно сателлитной) для s в S.
3. Иначе $y_j \in s_1$, и задача сводится к задаче для системы S_d.

Приложения

Алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных могут быть использованы

- в задаче построения частичных решений дифференциальных систем

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad y_5 \text{ является линейно сателлитной для } \{y_1, y_2\}$$

- в задаче частичной устойчивости

Предложение

Пусть невозмущённое движение $y = \mathbf{0}$ автономной системы S $\mathbf{y}_s$-устойчиво (асимптотически $\mathbf{y}_s$-устойчиво) и пусть невыделенная неизвестная $y_j \notin s$ является линейно сателлитной для s. Тогда невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ будет также $\mathbf{y}_{s\cup\{y_j\}}$-устойчиво (асимптотически $\mathbf{y}_{s\cup\{y_j\}}$-устойчиво).

Реализация: процедура Extract

Алгоритм **Extract** реализован в Maple, исходный код процедуры доступен по адресу: `http://www.ccas.ru/ca/extract`. Реализация использует возможности, предоставляемые пакетом `OreTools`.

Пример: $K = \mathbb{Q}(x)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, $s = \{y_1, y_2\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ -1/x^2 & 1/x \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_2, y_3)^T \qquad S_a : y_1 = -x\, y_2$$

```
> Extract(A1, A0, {1,2}, R)
```

$$\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}, \{[2,1]\}, \left[-x \right], \{[1,1]\} \right]$$

Реализация: пакет `Satellite`

Алгоритмы распознавания сателлитных и линейно сателлитных неизвестных реализованы в Maple в виде пакета `Satellite` (исходный код доступен `http://www.ccas.ru/ca/satellite`):

- частичные алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных
  - `Testing(A::Matrix, s::set, v::posint)`
  - `Determination(M, s::set)`
- алгоритмы распознавания линейно сателлитных неизвестных
  - `LinSatTesting(A::Matrix, s::set, v::posint)`
  - `LinearlySatellite(M, s::set)`

```
> Satellite:-LinearlySatellite([A1, A0], {1, 2})
```

$$\{5\}$$

Эксперимент

Для дифференциально-алгебраической системы

$$A_1 y' + A_0 y = 0,$$

где A_1, A_0 — $m \times m$-матрицы, элементами которых являются полиномы степени не выше 3 с целыми коэффициентами из диапазона $-99..+99$, определялось множество линейно сателлитных неизвестных для s.

Время в секундах работы процедуры `LinearlySatellite`

m	3	4	5	6	7	8	9	10
$s = \{1\}$	0,14	0,31	1,03	1,92	6,94	23,9	58,3	136
$s = \{1,2\}$	0,08	0,2	0,7	1,67	4,38	19,7	39,7	101
$s = \{1,2,3\}$	—	0,09	0,53	1,17	2,96	9,75	27,7	69

Maple 2015, Intel Core 2 Duo E8400 @ 3.00ГГц, 6Гб ОЗУ

Основные результаты

- Разработан алгоритм **Extract**, позволивший обобщить AB-алгоритм на случай линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка.
- Разработаны алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах с выделенными неизвестными.
- На основе предложенных алгоритмов разработан программный комплекс символьных вычислений, доступный для использования в среде компьютерной алгебры Maple. Исходный код доступен по адресу `http://www.ccas.ru/ca`

Основные публикации

1. Панферов А.А. Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование, 2015, № 2, стр. 26–36.
2. Панфёров А.А. О разбиениях множества выделенных неизвестных в линейных дифференциально-алгебраических системах // Программирование, 2016, № 2, стр. 41–48.
3. Panferov A.A. Selected and satellite unknowns in linear differential systems // Advances in Applied Mathematics, 2017, vol. 85, p. 1–11.
4. Панфёров А.А. Частичные алгоритмы определения сателлитных неизвестных // Программирование, 2017, № 2, стр. 72–80.
5. Panferov A.A. (2018) Linearly satellite unknowns in linear differential systems. In: Schneider C., Zima E. (eds) Advances in Computer Algebra. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 226, p. 215–227. Springer, Cham.
6. Панфёров А.А. Сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах// Программирование, 2018, № 2, стр. 42–50.