Алгоритмы компьютерной алгебры для линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными

Панфёров Антон Александрович

ВЦ ФИЦ ИУ РАН
ВМК МГУ, кафедра алгоритмических языков

18 апреля 2018 г.

Нормальные дифференциальные системы

- K — дифференциальное поле характеристики 0 с производной $\partial = {}'$.
- Поле констант $\mathrm{Const}(K) := \{c \in K \mid c' = 0\}$ алгебраически замкнуто.
- Нормальная дифференциальная система — система вида

$$S\colon y' = Ay, \tag{1}$$

$$A \in K^{m\times m} \qquad y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

Размер системы: $|S| = m$ (число уравнений в системе).

Расширение Пикара–Вессио

$$S\colon y' = Ay$$

Определение

Дифференциальное расширение $K_S \supseteq K$ называется **расширением Пикара–Вессио** для системы S, если

- поле констант $\operatorname{Const}(K_S) = \operatorname{Const}(K)$;
- для системы S существует обратимая матрица $B \in K_S^{m\times m}$:

$$B' = AB \tag{2}$$

  (B — фундаментальная матрица S);
- K_S порождено над K элементами B.

Эквивалентные системы

Определение

Две системы $y' = Ay$ и $z' = Bz$ $(A, B \in K^{m\times m})$ называются эквивалентными (над K), если существует такая обратимая матрица $T \in K^{m\times m}$, что $T' = AT - TB$ и $z = Ty$.

Расширения Пикара–Вессио эквивалентных систем совпадают.

Дифференциальные системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0 \qquad (3)$$

где $r \in \mathbb{N}$ — порядок системы;
$A_i \in K^{m \times m}$ $(0 \le i \le r)$, $A_r \ne 0$;
$y = (y_1, \dots, y_m)^T$.

Предполагается, что система (3) имеет *полный ранг*,
т. е. её уравнения независимы над $K[\partial]$.

Дифференциальные системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = 0 \tag{3}$$

Известно, что введением новых неизвестных

$$Y = (y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_1^{(r-1)}, \ldots, y_m^{(r-1)})^T$$

система (3) сводится к системе первого порядка:

- A_r — обратима ⇒ нормальная дифференциальная система

$$Y' = AY, \quad A \in K^{rm \times rm}$$

- A_r — вырождена ⇒ линейная дифференциально-алгебраическая система

$$\tilde{A}_1 Y' + \tilde{A}_0 Y = 0, \quad \tilde{A}_1, \tilde{A}_0 \in K^{rm \times rm}$$

Дифференциальные системы с выделенными неизвестными

$$S\colon y' = Ay, \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

Пусть часть компонент вектора неизвестных y являются выделенными:

$$s = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\} \quad (1 \leq k \leq m)$$

Для выделенных неизвестных могут рассматриваться разные задачи:

- проверка существования решений, выделенные компоненты которых принадлежат заданным классам;
- поиск решений только для выделенных компонент;
- частичная устойчивость по выделенным компонентам и др.

АВ-алгоритм

- С. А. Абрамов, М. Бронштейн *Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных* (2006)

$$S\colon y' = Ay, \quad s \text{ — выделенные неизвестные}$$

АВ-алгоритм (алгоритм Абрамова–Бронштейна) позволяет для выделенных компонент s построить новую дифференциальную систему

$$S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz,$$

в которой компонентами z являются лишь выделенные компоненты y и, возможно, некоторые их производные.

АВ-алгоритм: свойства

$$S\colon y' = Ay \quad \Longrightarrow \quad S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz$$

1. Проекции на s пространств решений в произвольном расширении K исходной системы S и системы S_s^{AB} совпадают.
2. Если решение системы S_s^{AB} таково, что его компоненты, соответствующие s, принадлежат некоторому расширению K, то и остальные его компоненты принадлежат этому расширению.
3. Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$ и система S обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению K, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Обобщение на системы произвольного порядка

Для обобщения AB-алгоритма на линейные однородные дифференциальные системы произвольного порядка, достаточно рассмотреть случай линейной дифференциально-алгебраической системы

$$A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{4}$$

где A_1 — вырожденная матрица.

Для работы с линейными дифференциально-алгебраическими системами с выделенными неизвестными предназначен алгоритм **Extract**.

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0 \tag{4}$$

Алгоритм **Extract** по линейной дифференциально-алгебраической системе S позволяет получить новую нормальную дифференциальную систему

$$\tilde{y}' = A\tilde{y} \tag{5}$$

для некоторой части компонент y ($\tilde{y} \subset y$).
При этом те выделенные компоненты y, которые не вошли в $\tilde{y}$, линейно выражаются через выделенные компоненты $\tilde{y}$.

Алгоритм Extract

Вход: линейная дифференциально-алгебраическая система $A_1 y' + A_0 y = 0$, приведённая по строкам, и множество выделенных неизвестных.

Алгоритм состоит из трёх этапов:

1. исключение (из дифференциальной части системы) невыделенных неизвестных;
2. исключение выделенных неизвестных;
3. выражение исключённых выделенных неизвестных через оставшиеся в дифференциальной системе выделенные неизвестные.

Выход: матрицы новой дифференциальной и алгебраической систем.

Алгоритм Extract

$$S\colon\ A_1 y' + A_0 y = 0$$

выделенные неизвестные: $s = s_1 \cup s_2$ $(s_1 \cap s_2 = \varnothing)$

(s_1) (s_2)

$S_d\colon\ \tilde{y}' = A\tilde{y}$ $(\tilde{y} \subset y)$

S_a: алгебраическая система

$$y_{s_2} = R\, y_{s_1} \tag{6}$$

R — матрица над K

Алгоритм реализован в Maple, исходный код процедуры доступен по адресу: `http://www.ccas.ru/ca/extract`

Сателлитные неизвестные: мотивация

Третье свойство AB-алгоритма

$$S : y' = Ay \quad \Longrightarrow \quad S_s^{\mathrm{AB}} : z' = Bz$$

- Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$ и система S обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению K, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| < |S|$, можно ли указать невыделенные неизвестные, соответствующие которым компоненты решений всегда принадлежат тому же дифференциальному расширению, что и выделенные компоненты?

Сателлитные неизвестные

$$S\colon y' = Ay, \quad s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\} \text{ — выделенные неизвестные}$$

Определение

Пространство решений $V_S := \{y \in K_S^m \mid y' = Ay\}$.

Рассмотрим дифференциальное расширение F_s $(K \subseteq F_s \subseteq K_S)$:

- $\pi_s(V_S) \subseteq F_s^k$;
- является минимальным: $\forall F \supseteq K, \pi_s(V_S) \subseteq F^k \implies F \supseteq F_s$.

Определение

Невыделенная неизвестная y_j системы S называется сателлитной для множества выделенных неизвестных s, если j-я компонента любого решения системы S принадлежит F_s.

Алгоритм распознавания сателлитных неизвестных

Вход:
- Система S с множеством выделенных неизвестных s.
- Невыделенная неизвестная $y_j \notin s$.

Выход: «ДА», если y_j является сателлитной для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. Если $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, **return** «ДА».
5. Если $K_{S_s^{\mathrm{AB}}} \supseteq K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}$, **return** «ДА».
6. **Return** «НЕТ».

$K_{S_1} \supseteq K_{S_2}$?

Для случая $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$: алгоритм (H) из

- A. Minchenko, A. Ovchinnikov, M. F. Singer
  Reductive linear differential algebraic groups and the Galois groups of parameterized linear differential equations (2015)

основанный на алгоритме из

- E. Hrushovski
  Computing the Galois group of a linear differential equation (2002)

Частичные алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных реализованы в Maple в виде пакета `Satellite`:
`http://www.ccas.ru/ca/satellite`

Обобщение на линейные дифференциально-алгебраические системы

Используем алгоритм **Extract**:

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0, \quad \tilde{s} = s \cup \{y_j\} = s_1 \cup s_2$$

- $S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y} \quad (s_1$ — выделенные неизвестные$)$
- $S_a\colon y_{s_2} = B y_{s_1}$

Если y_j входит в S_a с ненулевым коэффициентом

$\Rightarrow y_j$ является сателлитной для s в S.

Иначе $y_j \in s_1$, и задача сводится к задаче для системы S_d.

Линейно сателлитные неизвестные: мотивация

Третье свойство AB-алгоритма

$$S : y' = Ay \quad \Longrightarrow \quad S_s^{\mathrm{AB}} : z' = Bz$$

- Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$ и система S обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению K, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Это свойство может быть сформулировано в более сильной форме:

- Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, то системы S и S_s^{AB} эквивалентны.

($|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}| \Rightarrow$ любая компонента любого решения S может быть выражена линейно через выделенные компоненты этого решения и их производные)

Линейно сателлитные неизвестные

$$S\colon y' = Ay, \quad s \text{ — множество выделенных неизвестных}$$

- Пусть $\mathring{y} = (\mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_m)^T$ некоторое решение S.
- Расширение $F_s \supseteq K$ можно рассматривать как линейное пространство над K.
- Пусть $F_s(\mathring{y})$ — минимальное подпространство F_s, содержащее выделенные компоненты решения $\mathring{y}$ и их производные.

Определение

Невыделенная неизвестная y_j называется линейно сателлитной для множества выделенных неизвестных s в S, если для любого решения $\mathring{y}$ его j-я компонента принадлежит $F_s(\mathring{y})$.

Алгоритм распознавания линейно сателлитных неизвестных

Вход:
- Система S с множеством выделенных неизвестных s.
- Невыделенная неизвестная $y_j \notin s$.

Выход: «ДА», если y_j является линейно сателлитной для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. Если $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, **return** «ДА».
5. **Return** «НЕТ».

(отличается от алгоритма распознавания сателлитных неизвестных отсутствием шага проверки вложений расширений Пикара–Вессио)

Частичное решение дифференциальных систем

$K = \overline{\mathbb{Q}}(x), \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$

$$\begin{cases} y_1' - xy_5 = 0 \\ xy_2' - y_2 = 0 \\ x^2 y_3' + (x+1)y_2 - x^2 y_3 + x^2 y_5 = 0 \\ x^2 y_4' - y_2 = 0 \\ x^2 y_5' - y_2 - x(x-1)y_5 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Некоторые средства Maple построения решений дифференциальных систем в виде рядов:

- встроенный решатель `dsolve` с параметром `series`;
- процедура `SeriesSolution` из пакета `LinearFunctionalSystems`.

Частичное решение дифференциальных систем

$$y' = Ay, \quad \text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1/x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(x+1)/x^2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x^2 & 0 & 0 & (x-1)/x \end{bmatrix}$$

```
> LinearlySatellite(A, {1})
```

$$\{2, 5\}$$

```
> ReducedSystem(A, {1,2,5}, R)
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 1/x^2 & (x-1)/x \end{bmatrix}, \{[1,1],[2,2],[5,3]\} \right]$$

```
> Vector(SeriesSolution(%[1], x, 'differential'))
```

$$\begin{bmatrix} 30x^4 c_3 + 120x^3 c_3 + 360x^2 c_3 + x c_2 + c_1 + O(x^5) \\ x(720c_3 - c_2) + O(x^4) \\ c_2 x^{-1} + 720c_3 + 360x c_3 + 120x^2 c_3 + O(x^3) \end{bmatrix}$$

Частичная устойчивость автономных систем

Рассмотрим классическую постановку задачи устойчивости по части переменных:

$$S\colon \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{8}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))^T$, $A \in K^{m\times m}$.

Переменные, входящие в $\mathbf{y}$, разбиваются на две группы:

1. переменные $y_1, \ldots, y_k$ $(1 \leq k < m)$, по отношению к которым исследуется устойчивость положения равновесия (невозмущённого движения) $\mathbf{y} = 0$;
2. оставшиеся переменные $y_{k+1}, \ldots, y_m$ — неконтролируемые.

Частичная устойчивость автономных систем

Обозначим $s = \{y_1, \ldots, y_k\}$ — множество *выделенных* неизвестных, $\mathbf{y}_s = (y_1, \ldots, y_k)^T$; $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ решение системы (8), определённое начальными условиями $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0; t_0, \mathbf{y}_0)$; $\|\mathbf{y}\| = \left(\sum y_i^2\right)^{1/2}$.

Невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (8) называется:

- устойчивым по отношению к выделенным неизвестным (кратко $\mathbf{y}_s$-устойчивым), если для любых чисел $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$ следует $\|\mathbf{y}_s(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;
- асимптотически $\mathbf{y}_s$-устойчивым, если оно $\mathbf{y}_s$-устойчиво и, кроме того, для каждого $t_0 \geq 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что решение $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ с $\|\mathbf{y}_0\| < \Delta$ удовлетворяет условию
$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{y}_s(t; t_0, \mathbf{y}_0)\| = 0.$$

Частичная устойчивость автономных систем

$$S\colon \mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{8}$$

Если система (8) является автономной (A — постоянная матрица), то справедливо утверждение:

Предложение

Пусть невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (8) $\mathbf{y}_s$-устойчиво (асимптотически $\mathbf{y}_s$-устойчиво) и пусть невыделенная неизвестная $y_j \notin s$ является линейно сателлитной для s. Тогда невозмущённое движение $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ будет также $\mathbf{y}_{s\cup\{y_j\}}$-устойчиво (асимптотически $\mathbf{y}_{s\cup\{y_j\}}$-устойчиво).

Основные результаты

- Разработан и реализован алгоритм **Extract**, позволивший обобщить АВ-алгоритм на случай полноранговых линейных однородных дифференциальных систем произвольного порядка.
- Представлена концепция сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах с выделенными неизвестными. Разработаны алгоритмы распознавания сателлитных неизвестных.
- Реализация алгоритмов работы с сателлитными неизвестными выполнена в виде пакета `Satellite` для системы компьютерной алгебры Maple.

Основные публикации

1. Панферов А.А. Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование, 2015, № 2, стр. 26–36.
2. Панфёров А.А. О разбиениях множества выделенных неизвестных в линейных дифференциально-алгебраических системах // Программирование, 2016, № 2, стр. 41–48.
3. Panferov A.A. Selected and satellite unknowns in linear differential systems // Advances in Applied Mathematics, 2017, vol. 85, p. 1–11.
4. Панфёров А.А. Частичные алгоритмы определения сателлитных неизвестных // Программирование, 2017, № 2, стр. 72–80.
5. Panferov A.A. (2018) Linearly satellite unknowns in linear differential systems. In: Schneider C., Zima E. (eds) Advances in Computer Algebra. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 226, p. 215–227. Springer, Cham.
6. Панфёров А.А. Сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах// Программирование, 2018, № 2, стр. 42–50.