Сателлитные компоненты решений линейных дифференциальных систем с выделенными неизвестными

Панфёров Антон Александрович

ВМК МГУ, ВЦ РАН

1 марта 2017 г.

Введение

- K — дифференциальное поле характеристики 0 с производной $'$.
- Поле констант $\mathrm{Const}(K) := \{c \in K \mid c' = 0\}$ алгебраически замкнуто.
- Рассматривается дифференциальная система вида

$$S\colon y' = Ay, \tag{1}$$

$$A \in K^{m\times m} \qquad y = (y_1, \ldots, y_m)^T$$

  Размер системы: $|S| = m$.
- Некоторые неизвестные выделены:

$$s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\} \quad (1 \leq k < m)$$

Расширение Пикара–Вессио

$$S\colon y' = Ay$$

Определение

Дифференциальное расширение $K_S \supseteq K$ называется *расширением Пикара–Вессио* для системы S, если

- поле констант $\mathrm{Const}(K_S) = \mathrm{Const}(K)$;
- для системы S существует обратимая матрица $B \in K_S^{m\times m}$: $B' = AB$ (B — фундаментальная матрица S);
- K_S порождено K и элементами B.

Сателлитные неизвестные

$$S\colon y' = Ay, \quad s = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$$ — выделенные неизвестные

Определение

Пространство решений $V_S := \{y \in K_S^m \mid y' = Ay\}$.

Рассмотрим дифференциальное расширение F_s $(K \subseteq F_s \subseteq K_S)$:

- $\pi_s(V_S) \subseteq F_s^k$;
- является минимальным: $\forall F \supseteq K, \pi_s(V_S) \subseteq F^k \Longrightarrow F \supseteq F_s$.

Определение

Невыделенная неизвестная y_j системы S называется сателлитной для множества выделенных неизвестных s, если j-я компонента любого решения системы S принадлежит F_s.

Распознавание сателлитных неизвестных

Для заданной системы

$$S\colon y' = Ay$$

и множеству выделенных неизвестных найти все сателлитные неизвестные.

$$\Updownarrow$$

Проверить, является ли невыделенная неизвестная y_j сателлитной для s.

Предложение

Для $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$ задача распознавания сателлитных неизвестных алгоритмически разрешима.

AB-алгоритм

- С. А. Абрамов, М. Бронштейн *Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных* (2006)

$$S\colon y' = Ay, \quad s \text{ — выделенные неизвестные}$$

AB-алгоритм (алгоритм Абрамова–Бронштейна) позволяет для выделенных компонент s построить новую дифференциальную систему

$$S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz,$$

в которой компонентами z являются лишь выделенные компоненты y и, возможно, некоторые их производные.

AB-алгоритм: свойства

$$S\colon y' = Ay \quad \Longrightarrow \quad S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz$$

1. Проекции на s пространств решений в произвольном расширении K исходной системы S и системы S_s^{AB} совпадают.
2. Если решение системы S_s^{AB} таково, что его компоненты, соответствующие s, принадлежат некоторому расширению K, то и остальные его компоненты принадлежат этому расширению.
3. Если $|S| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$ и система S обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению K, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Алгоритм распознавания сателлитных неизвестных

Вход:
- Система S с множеством выделенных неизвестных s.
- Невыделенная неизвестная $y_j \notin s$.

Выход: «ДА», если y_j является сателлитной для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. Если $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, **return** «ДА».
5. Если $K_{S_s^{\mathrm{AB}}} \supseteq K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}$, **return** «ДА».
6. **Return** «НЕТ».

$K_{S_1} \supseteq K_{S_2}$?

Для случая $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$: алгоритм (H) из

- A. Minchenko, A. Ovchinnikov, M. F. Singer
  Reductive linear differential algebraic groups and the Galois groups of parameterized linear differential equations (2015)

основанный на алгоритме из

- E. Hrushovski
  Computing the Galois group of a linear differential equation (2002)

Предложение

Проблема проверки вложения расширений Пикара–Вессио двух заданных дифференциальных систем эквивалентна проблеме распознавания сателлитных неизвестных.

Сателлитные компоненты решений

$$S\colon y' = Ay, \quad s \text{ — множество выделенных неизвестных}$$

- Пусть $\overset{\circ}{y} = (\overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m)^T$ некоторое решение S.
- Расширение $F_s \supseteq K$ можно рассматривать как линейное пространство над K.
- Пусть $F_s(\overset{\circ}{y})$ — минимальное подпространство F_s, содержащее выделенные компоненты решения $\overset{\circ}{y}$.

Определение

Невыделенная неизвестная y_j называется сателлитной по отношению к решениям для множества выделенных неизвестных s в S, если для любого решения $\overset{\circ}{y}$ его j-я компонента принадлежит $F_s(\overset{\circ}{y})$.

Свойства сателлитных по решениям неизвестных

Пусть y_j — сателлитная по отношению к решениям для s в S. Тогда:

1. Для любого решения S с нулевыми выделенными компонентами, j-я компонента равна нулю.
2. y_j — сателлитная неизвестная для s в S.

Пример

Пусть $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

$$y' = \begin{bmatrix} 1/x & 1/(2x) & -1/x \\ 2/x & 3/x & -2/x \\ 1/x & 3/(2x) & -1/x \end{bmatrix} y \tag{2}$$

Все компоненты всех решений системы являются рациональными функциями $\Rightarrow$ любая неизвестная y_j является сателлитной для любого непустого множества выделенных неизвестных $s \subseteq \{y_1, y_2, y_3\} \setminus \{y_j\}$.

В частности, y_2 является сателлитной для $\{y_1\}$.

В то же время, $(0, x^2, x^2/2)^T$ является решением (2) $\Rightarrow$ y_2 не является сателлитной по решениям для $\{y_1\}$.

Распознавание неизвестных, сателлитных по решениям

Предложение

Задача распознавания неизвестных, сателлитных по отношению к решениям, алгоритмически разрешима.

Алгоритм распознавания неизвестных, сателлитных по отношению к решениям

Вход:
- Система S с множеством выделенных неизвестных s.
- Невыделенная неизвестная $y_j \notin s$.

Выход: «ДА», если y_j является сателлитной по отношению к решениям для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.
2. Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. Если $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, **return** «ДА».
5. **Return** «НЕТ».

Алгоритм распознавания неизвестных, сателлитных по отношению к решениям

Вход:
- Система S с множеством выделенных неизвестных s.
- Невыделенная неизвестная $y_j \notin s$.

Выход: «ДА», если y_j является сателлитной по отношению к решениям для s в S, и «НЕТ» иначе.

1. Построить систему S_s^{AB}.

$1\frac{1}{2}$. Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |s|$, **return** «НЕТ».

2. Если $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, **return** «ДА».
3. Построить систему $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, где $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. Если $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, **return** «ДА».
5. **Return** «НЕТ».

Пример

$K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$, $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, y_3)^T$, $s = \{y_1\}$, $\tilde{s} = s \cup \{y_2\}$

$$S:\ y' = \begin{bmatrix} 1/x & 1/(2x) & -1/x \\ 2/x & 3/x & -2/x \\ 1/x & 3/(2x) & -1/x \end{bmatrix} y$$

$$S_s^{AB}:\ f' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f \qquad S_{\tilde{s}}^{AB}:\ g' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2/x \end{bmatrix} g$$

где $f = (y_1, y_1')^T$, $g = (y_1, y_1', y_2)^T$.

Тем самым $|S_s^{AB}| = 2 \neq |S_{\tilde{s}}^{AB}| = 3 \Rightarrow y_2$ не является сателлитной по решениям для $\{y_1\}$.

Пример

$K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$, $y = (y_1, y_2, \boldsymbol{y_3})^T$, $s = \{y_3\}$

$$S\colon y' = \begin{bmatrix} 1/x & 1/(2x) & -1/x \\ 2/x & 3/x & -2/x \\ 1/x & 3/(2x) & -1/x \end{bmatrix} y$$

$$S_s^{\mathrm{AB}}\colon z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_3, y_3', y_3'')^T.$$

$|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S| = 3 \Rightarrow$ для $\{y_3\}$ и y_1, и y_2 являются сателлитными по решениям.

Реализация в Maple

Реализация АВ-алгоритма входит в стандартную поставку Maple (процедура `ReducedSystem` пакета `OreTools:-Consequences`).

```
SolSatelliteTesting := proc (A::Matrix, s::set(posint), v::posint)
  local R, S1, S2;
  R := OreTools:-SetOreRing(x, 'differential');
  S1 := OreTools:-Consequences:-ReducedSystem(A, s, R)[1];
  if op(1, A) = op(1, S1) then return true end if;
  S2 := OreTools:-Consequences:-ReducedSystem(A, s union {v}, R)[1];
  if op(1, S1) = op(1, S2) then return true end if;
  return false
end proc
```

Параметры:

- `A` — матрица дифференциальной системы
- `s` — множество индексов выделенных неизвестных
- `v` — индекс тестируемой неизвестной

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + A_0 y = 0, \quad y = (y_1, \ldots, y_m)^T \tag{3}$$

$$Y = \left(y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \;\ldots,\; y_1^{(r-1)}, \ldots, y_m^{(r-1)}\right)^T$$

$$\Downarrow$$

- A_r обратима:

$$Y' = \tilde{A} Y' \tag{4}$$

- A_r вырождена:

$$\tilde{A}_1 Y' + \tilde{A}_0 Y = 0 \tag{5}$$

Алгоритм Extract

- А. А. Панферов
  Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных (2015)

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{6}$$

s — выделенные неизвестные

1. дифференциальная система $S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y},\ \tilde{y} \subseteq y$
2. алгебраическая система $S_a\colon y_{s_2} = By_{s_1}$
   $(s = s_1 \cup s_2,\ s_1 \cap s_2 = \varnothing,\ y_{s_1} \subset \tilde{y})$

Пример

$K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$

$$\begin{cases} -y_1' + xy_3' - xy_4' - y_3 + y_5 + y_6 = 0 \\ (x+1)xy_4' + xy_6' - y_5 - (x+1)y_6 = 0 \\ xy_4' + y_5' + y_6' - y_5 - y_6 = 0 \\ x^2y_4' - y_3 = 0 \\ y_1 - y_5 - y_6 = 0 \\ y_1 + xy_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & x & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+1)x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & x & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+1)x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> SolSatelliteDetermination([A1, A0], {1})
```

$$\{2, 3\}$$

```
> Extract(A1, A0, {1,2,3}, R)
```

$$\begin{bmatrix} 1 - 1/x & 1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x & 0 & 0 \\ 0 & 1/x^2 & 0 & 0 \\ 1 & (x+1)/x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \{[2,1],[3,2]\}, \quad \begin{bmatrix} -x & 0 \end{bmatrix}, \{[1,1]\}$$

```
> ReducedSystem(%[1], {1,2}, R)
```

$$\begin{bmatrix} 1 - 1/x & 1/x^2 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix}, \{[1,1],[2,2]\}$$

```
> SeriesDSolveN(%[1])
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{24c_1 - c_2}{x} + 24c_1 + 12xc_1 + O(x^2) \\ xc_2 + O(x^3) \end{bmatrix}$$