Линейные дифференциально-алгебраические системы с выделенными неизвестными

Панфёров Антон Александрович

ВМК МГУ

27 января 2016 г.

Дифференциальные системы с выделенными неизвестными

Пусть K — дифференциальное поле характеристики 0 с производной ∂.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L(y) = 0, \tag{1}$$

где $L \in K[\partial]^{m \times m}$ — дифференциальный оператор полного ранга,
$y = (y_1, \dots, y_m)^T$ — вектор неизвестных.

Пусть некоторые компоненты вектора неизвестных y являются ***выделенными***, т. е. представляют бóльший интерес.

Можно рассматривать следующие задачи:

- проверка существования решений, выделенные компоненты которых принадлежат заданным классам;
- поиск решений только для выделенных компонент;
- частичная устойчивость по выделенным компонентам и др.

АВ-алгоритм

Рассмотрим *нормальную* дифференциальную систему вида

$$y' = Ay, \tag{2}$$

где y — вектор неизвестных, $A \in K^{m \times m}$.

Для таких систем С. А. Абрамовым и М. Бронштейном был разработан алгоритм (АВ-алгоритм), позволяющий для выделенных компонент вектора неизвестных строить новую нормальную дифференциальную систему

$$z' = Bz, \tag{3}$$

в которой компоненты z суть выделенные компоненты y и, возможно, некоторые их производные.

AB-алгоритм

$$y' = Ay \quad \Longrightarrow \quad z' = Bz$$

1. Проекции на выделенные неизвестные пространств решений в произвольном расширении исходного дифференциального поля исходной системы $y' = Ay$ и системы $z' = Bz$ совпадают.
2. Если решение системы $z' = Bz$ таково, что его компоненты, соответствующие выделенным компонентам исходной системы, принадлежат некоторому расширению исходного дифференциального поля, то и все его компоненты принадлежат этому расширению.
3. Если размер B равен размеру A и исходная система обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению исходного дифференциального поля, то *все* компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Примеры работы

AB-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, \boldsymbol{y_3})^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

Примеры работы

AB-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, \boldsymbol{y_3})^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \quad \Longrightarrow \quad z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_3})^T$$

Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку Maple в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, \boldsymbol{y_3})^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \quad \Longrightarrow \quad z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_3})^T$$

Пример 2: $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y$$

Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, \boldsymbol{y_3})^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \quad \Longrightarrow \quad z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_3})^T$$

Пример 2: $y = (\boldsymbol{y_1}, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y \quad \Longrightarrow \quad z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_1'})^T$$

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{4}$$

$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \ldots, y_m)^T$$

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{4}$$

$$A_i \in K^{m\times m}, y = (y_1, \ldots, y_m)^T$$

$$\Downarrow A_r \text{ — обратима}$$

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & I_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I_m \\ -A_r^{-1}A_0 & -A_r^{-1}A_1 & \ldots & -A_r^{-1}A_{r-1} \end{bmatrix} Y$$

где I_m — единичная матрица $m \times m$,

$$Y = \left(y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(r-1)}, \ldots, y_m^{(r-1)}\right)^T$$

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{4}$$

$$A_i \in K^{m\times m}, y = (y_1, \ldots, y_m)^T$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_m & & & 0 \\ & I_m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix} Y' + \begin{bmatrix} 0 & -I_m & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & -I_m \\ A_0 & A_1 & \ldots & A_{r-1} \end{bmatrix} Y = 0$$

где I_m — единичная матрица $m \times m$,

$$Y = \left(y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m', \ldots, y_1^{(r-1)}, \ldots, y_m^{(r-1)}\right)^T$$

Алгоритм Extract

Рассматривается дифференциальная система вида

$$A_1 y' + A_0 y = 0, \tag{5}$$

где $A_1, A_0 \in K^{m \times m}$ — ведущая и трейлинговая матрицы,
$y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор неизвестных, часть из которых *выделены*.

Рассмотрим случай, когда $A_1 \not\equiv 0$, но $\det A_1 \equiv 0$.

Такие системы называются ***дифференциально-алгебраическими***.

Алгоритм `Extract` для таких систем позволяет получить новую нормальную дифференциальную систему

$$\tilde{y}' = A\tilde{y} \tag{6}$$

для некоторой части компонент y ($\tilde{y} \subset y$).
При этом те выделенные компоненты y, которые не вошли в $\tilde{y}$, линейно выражаются через вошедшие в $\tilde{y}$ выделенные компоненты.

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y}$$
$$(\tilde{y} \subset y)$$

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

$S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y}$

$(\tilde{y} \subset y)$

S_a: алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y, не вошедших в $\tilde{y}$)

Пример работы алгоритма Extract

$$S\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

$$S_d\colon \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ -1/x^2 & 1/x \end{bmatrix} \tilde{y}$$

$$\tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3)^T$$

$$S_a\colon \boldsymbol{y_1} = -x\,\boldsymbol{y_2}$$

Алгоритм Extract

S: $A_1 y' + A_0 y = 0$

выделенные неизвестные: s

S_d: $\tilde{y}' = A\tilde{y}$ $(\tilde{y} \subset y)$

S_a: алгебраическая система

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

выделенные неизвестные: $s = s_1 \cup s_2$ $(s_1 \cap s_2 = \varnothing)$

(s_1)

S_d: $\tilde{y}' = A\tilde{y}$
$(\tilde{y} \subset y)$

(s_2)

S_a: алгебраическая система

$$y_{s_2} = R\, y_{s_1} \tag{7}$$

R — матрица над K

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

выделенные неизвестные: $s = s_1 \cup s_2$ $(s_1 \cap s_2 = \varnothing)$

(s_1)

$$S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y}$$
$$(\tilde{y} \subset y)$$

(s_2)

S_a: алгебраическая система

$$y_{s_2} = R\, y_{s_1} \tag{7}$$

R — матрица над K

Определение

Системы S_d, S_a называются *согласованными* с (S, s), если проекция пространства решений S на s совпадает с проекцией на выделенные неизвестные пространства решений систем S_d, S_a в произвольном расширении исходного дифференциального поля.

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

выделенные неизвестные: $s = s_1 \cup s_2$ $(s_1 \cap s_2 = \varnothing)$

(s_1)

$$S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y} \quad (\tilde{y} \subset y)$$

(s_2)

S_a: алгебраическая система

$$y_{s_2} = R\, y_{s_1} \tag{7}$$

R — матрица над K

Определение

Системы S_d, S_a называются *согласованными* с (S, s), если проекция пространства решений S на s совпадает с проекцией на выделенные неизвестные пространства решений систем S_d, S_a в произвольном расширении исходного дифференциального поля.

Предложение

Пусть системы S_d, S_a согласованы с (S, s). Тогда размер S_a определяется однозначно исходной системой S и множеством выделенных неизвестных s.

Пример работы

$K = \mathbb{Q}(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0,$$

где $y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3})^T$ — все компоненты выделены.

1. результат Extract:

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2})^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_3} = x\, \boldsymbol{y_1}$$

2. несогласованные системы для поиска рациональных решений:

$$S_d : \boldsymbol{y_1'} = \frac{1}{x} \boldsymbol{y_1} \qquad S_a : \begin{cases} \boldsymbol{y_2} = 0 \\ \boldsymbol{y_3} = x\, \boldsymbol{y_1} \end{cases}$$

Пример работы

$K = \mathbb{Q}(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0,$$

где $y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3})^T$ — все компоненты выделены.

1. результат Extract:

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2})^T$$
$$S_a : \boldsymbol{y_3} = x\, \boldsymbol{y_1}$$

2. несогласованные системы для поиска рациональных решений:

$$S_d : \boldsymbol{y_1'} = \frac{1}{x} \boldsymbol{y_1} \qquad S_a : \begin{cases} \boldsymbol{y_2} = 0 \\ \boldsymbol{y_3} = x\, \boldsymbol{y_1} \end{cases}$$

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

↙ ↘

$S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y}$
$(\tilde{y} \subset y)$

S_a: алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y,
не вошедших в $\tilde{y}$)

Алгоритм Extract

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

S_d: $\tilde{y}' = A\tilde{y}$
$(\tilde{y} \subset y)$

S_a: алгебраическая система
(выражение выделенных компонент y, не вошедших в $\tilde{y}$)

Для заданной дифференциально-алгебраической системы S и множества выделенных неизвестных s существует бесконечное число пар согласованных систем S_d, S_a. При этом размеры систем S_d не ограничены.

Extract: пример

Дифференциальная система S_d, получаемая алгоритмом Extract, не всегда имеет минимальный размер.

$$S: \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3)^T$$

$$S_a : \varnothing$$

Extract: пример

Дифференциальная система S_d, получаемая алгоритмом Extract, не всегда имеет минимальный размер.

$$S\colon \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

$$S_d\colon \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3)^T$$

$$S_a\colon \varnothing$$

$$\tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2})^T$$

ExtrAB = Extract + AB-алгоритм

$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$

$S_d\colon \tilde{y}' = A\tilde{y}$

$(\tilde{y} \subset y)$

AB-алгоритм

$z' = Bz$

S_a: алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y,
не вошедших в $\tilde{y}$)

Алгоритм ExtrAB

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

$S_d^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz$

(z — часть выделенных компонент y
и некоторые их производные)

S_a: алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y,
не вошедших в z)

Алгоритм ExtrAB

$$S\colon A_1 y' + A_0 y = 0$$

$S_d^{\mathrm{AB}}\colon z' = Bz$

(z — часть выделенных компонент y и некоторые их производные)

S_a: алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y, не вошедших в z)

Теорема

Получаемые алгоритмом ExtrAB системы S_d^{AB} и S_a

1. являются согласованными с (S, s);
2. имеют минимально возможные размеры.

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Данная система не имеет лорановых решений, с ненулевыми y_1, y_2. Однако у неё есть решения, в которых y_1, y_2 представляются ненулевыми лорановыми рядами. Для их поиска используем алгоритм ExtrAB.

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d : \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (\boldsymbol{y_2}, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a : \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Шаг 2: AB-алгоритм

$$S_d \Longrightarrow S_d^{\mathrm{AB}} : z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{\mathrm{AB}}\colon z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T \qquad S_a\colon \boldsymbol{y_1} = -x\,\boldsymbol{y_2}$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{\mathrm{AB}}\colon z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T \qquad S_a\colon \boldsymbol{y_1} = -x\, \boldsymbol{y_2}$$

Рациональные решения для компонент y_1, y_2:

$$S_d^{\mathrm{AB}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = C/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = C$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{\mathrm{AB}}\colon z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_2'})^T \qquad S_a\colon \boldsymbol{y_1} = -x\,\boldsymbol{y_2}$$

Рациональные решения для компонент y_1, y_2:

$$S_d^{\mathrm{AB}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = C/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = C$$

Лорановы решения для компонент y_1, y_2:

$$S_d^{\mathrm{AB}} \Rightarrow \boldsymbol{y_2} = (C_1 e^x + C_2)/x, \qquad S_a \Rightarrow \boldsymbol{y_1} = C_1 e^x + C_2$$

Реализация

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

```
> Extract(A1, A0, {1,2}, R)
```

$$\begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix}, \{[2,1]\}, [-x], \{[1,1]\}$$

```
> ReducedSystem(%[1], {1}, R)
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix}, \{[1,1]\}\right]$$