

Линейные дифференциально-алгебраические системы с выделенными неизвестными

Панфёров Антон Александрович

ВМК МГУ

27 января 2016 г.

Дифференциальные системы с выделенными неизвестными

Пусть K — дифференциальное поле характеристики 0 с производной ∂ .

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L(y) = 0, \quad (1)$$

где $L \in K[\partial]^{m \times m}$ — дифференциальный оператор полного ранга,
 $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ — вектор неизвестных.

Пусть некоторые компоненты вектора неизвестных y являются **выделенными**, т. е. представляют бóльший интерес.

Можно рассматривать следующие задачи:

- проверка существования решений, выделенные компоненты которых принадлежат заданным классам;
- поиск решений только для выделенных компонент;
- частичная устойчивость по выделенным компонентам и др.

АВ-алгоритм

Рассмотрим *нормальную* дифференциальную систему вида

$$y' = Ay, \quad (2)$$

где y — вектор неизвестных, $A \in K^{m \times m}$.

Для таких систем С. А. Абрамовым и М. Бронштейном был разработан алгоритм (АВ-алгоритм), позволяющий для выделенных компонент вектора неизвестных строить новую нормальную дифференциальную систему

$$z' = Bz, \quad (3)$$

в которой компоненты z суть выделенные компоненты y и, возможно, некоторые их производные.

AB-алгоритм

$$y' = Ay \implies z' = Bz$$

- i Проекции на выделенные неизвестные пространств решений в произвольном расширении исходного дифференциального поля исходной системы $y' = Ay$ и системы $z' = Bz$ совпадают.
- ii Если решение системы $z' = Bz$ таково, что его компоненты, соответствующие выделенным компонентам исходной системы, принадлежат некоторому расширению исходного дифференциального поля, то и все его компоненты принадлежат этому расширению.
- iii Если размер B равен размеру A и исходная система обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению исходного дифференциального поля, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

Примеры работы

AB-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_3)^T$$

Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_3)^T$$

Пример 2: $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y$$

Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1: $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_3)^T$$

Пример 2: $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_1')^T$$

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (4)$$
$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (4)$$

$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$\Downarrow A_r$ — обратима

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_m \\ -A_r^{-1} A_0 & -A_r^{-1} A_1 & \dots & -A_r^{-1} A_{r-1} \end{bmatrix} Y$$

где I_m — единичная матрица $m \times m$,

$$Y = \left(y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(r-1)}, \dots, y_m^{(r-1)} \right)^T$$

Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (4)$$

$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_m & & & 0 \\ & I_m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix} Y' + \begin{bmatrix} 0 & -I_m & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & -I_m \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{r-1} \end{bmatrix} Y = 0$$

где I_m — единичная матрица $m \times m$,

$$Y = \left(y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(r-1)}, \dots, y_m^{(r-1)} \right)^T$$

Алгоритм Extract

Рассматривается дифференциальная система вида

$$A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (5)$$

где $A_1, A_0 \in K^{m \times m}$ — ведущая и трейлинговая матрицы,

$y = (y_1, \dots, y_m)^T$ — вектор неизвестных, часть из которых *выделены*.

Рассмотрим случай, когда $A_1 \neq 0$, но $\det A_1 \equiv 0$.

Такие системы называются **дифференциально-алгебраическими**.

Алгоритм Extract для таких систем позволяет получить новую нормальную дифференциальную систему

$$\tilde{y}' = A \tilde{y} \quad (6)$$

для некоторой части компонент y ($\tilde{y} \subset y$).


При этом те выделенные компоненты y , которые не вошли в \tilde{y} , линейно выражаются через вошедшие в \tilde{y} выделенные компоненты.

Алгоритм Extract

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

Алгоритм Extract

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$


$$S_d: \tilde{y}' = A \tilde{y}$$

$(\tilde{y} \subset y)$

Алгоритм Extract



Пример работы алгоритма Extract

$$S: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} y = 0$$

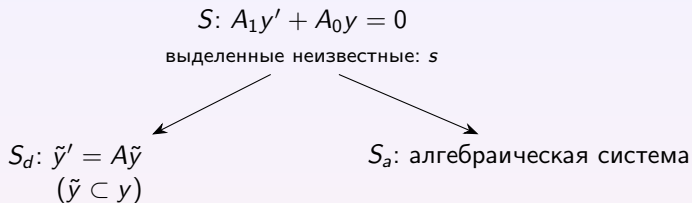
$y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, y_3, y_4)^T$, выделены y_1, y_2

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ -1/x^2 & 1/x \end{bmatrix} \tilde{y}$$

$\tilde{y} = (\mathbf{y}_2, y_3)^T$

$$S_a: \mathbf{y}_1 = -x \mathbf{y}_2$$

Алгоритм Extract



Алгоритм Extract

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

выделенные неизвестные: $s = s_1 \cup s_2$ ($s_1 \cap s_2 = \emptyset$)

(s_1)

$$S_d: \tilde{y}' = A \tilde{y}$$

($\tilde{y} \subset y$)

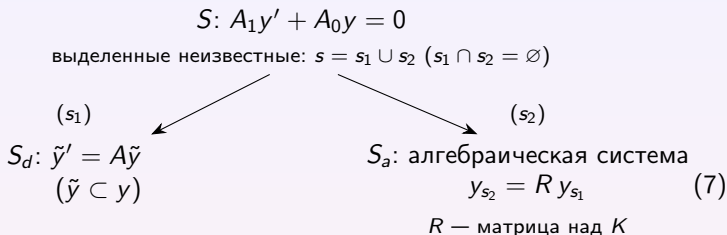
(s_2)

$$S_a: \text{алгебраическая система}$$

$$y_{s_2} = R y_{s_1} \quad (7)$$

R — матрица над K

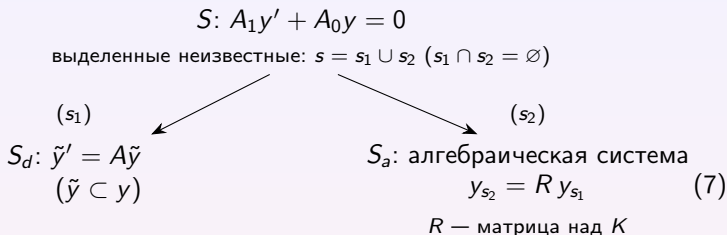
Алгоритм Extract



Определение

Системы S_d, S_a называются *согласованными* с (S, s) , если проекция пространства решений S на s совпадает с проекцией на выделенные неизвестные пространства решений систем S_d, S_a в произвольном расширении исходного дифференциального поля.

Алгоритм Extract



Определение

Системы S_d, S_a называются *согласованными* с (S, s) , если проекция пространства решений S на s совпадает с проекцией на выделенные неизвестные пространства решений систем S_d, S_a в произвольном расширении исходного дифференциального поля.

Предложение

Пусть системы S_d, S_a согласованы с (S, s) . Тогда размер S_a определяется однозначно исходной системой S и множеством выделенных неизвестных s .

Пример работы

$$K = \mathbb{Q}(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0,$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ — все компоненты выделены.

➊ результат Extract:

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2)^T$$

$$S_a: y_3 = x y_1$$

➋ несогласованные системы для поиска рациональных решений:

$$S_d: y_1' = \frac{1}{x} y_1 \quad S_a: \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = x y_1 \end{cases}$$

Пример работы

$$K = \mathbb{Q}(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0,$$

где $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ — все компоненты выделены.

1 результат Extract:

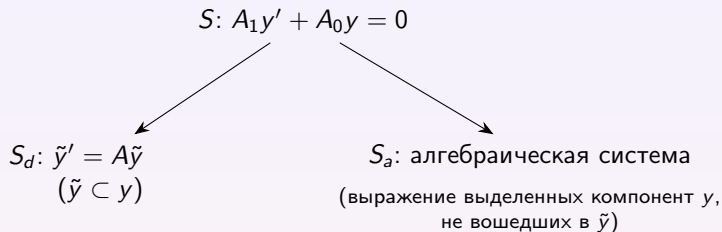
$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2)^T$$

$$S_a: y_3 = x y_1$$

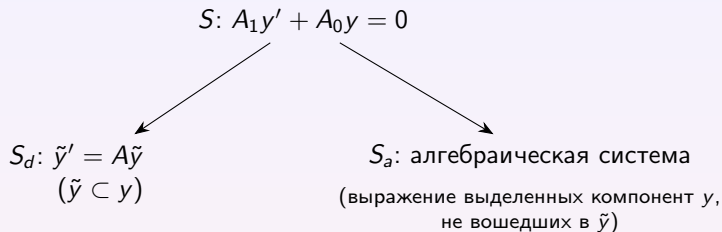
2 несогласованные системы для поиска рациональных решений:

$$S_d: y_1' = \frac{1}{x} y_1 \quad S_a: \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = x y_1 \end{cases}$$

Алгоритм Extract



Алгоритм Extract



Для заданной дифференциально-алгебраической системы S и множества выделенных неизвестных s существует бесконечное число пар согласованных систем S_d, S_a . При этом размеры систем S_d не ограничены.

Extract: пример

Дифференциальная система S_d , получаемая алгоритмом Extract, не всегда имеет минимальный размер.

$$S: \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, выделены y_1, y_2

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$S_a: \emptyset$

Extract: пример

Дифференциальная система S_d , получаемая алгоритмом Extract, не всегда имеет минимальный размер.

$$S: \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0$$

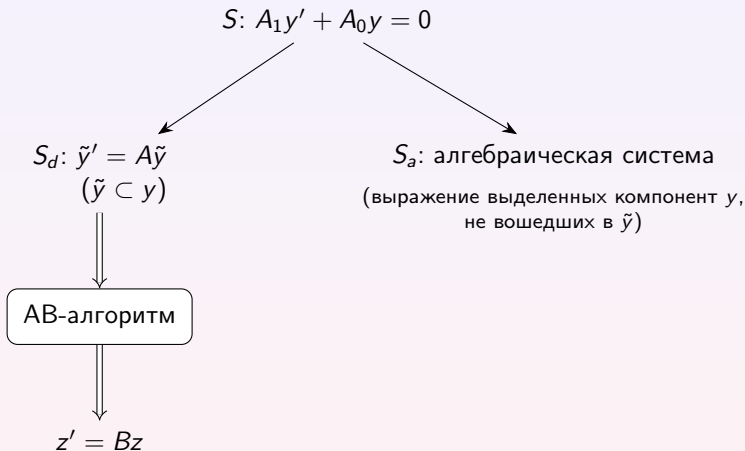
$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, выделены y_1, y_2

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$\tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2)^T$$

 $S_a: \emptyset$

ExtrAB = Extract + AB-алгоритм



Алгоритм ExtrAB

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$S_d^{AB}: z' = Bz$$

(z — часть выделенных компонент y
и некоторые их производные)

S_a : алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y ,
не вошедших в z)

Алгоритм ExtrAB

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$S_d^{AB}: z' = Bz$$

(z — часть выделенных компонент y
и некоторые их производные)

S_a : алгебраическая система

(выражение выделенных компонент y ,
не вошедших в z)

Теорема

Получаемые алгоритмом ExtrAB системы S_d^{AB} и S_a

- 1 являются согласованными с (S, s) ;
- 2 имеют минимально возможные размеры.

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Данная система не имеет лорановых решений, с ненулевыми y_1, y_2 . Однако у неё есть решения, в которых y_1, y_2 представляются ненулевыми лорановыми рядами. Для их поиска используем алгоритм ExtrAB.

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Шаг 1: Extract

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_2, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a: y_1 = -x y_2$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$, выделены y_1, y_2

Шаг 1: Extract

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_2, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a: y_1 = -x y_2$$

Шаг 2: AB-алгоритм

$$S_d \implies S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (y_2, y_2')^T$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$, выделены y_1, y_2

Построенные системы:

$$S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (y_2, y_2')^T \quad S_a: y_1 = -x y_2$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2')^T \quad S_a: \mathbf{y}_1 = -x \mathbf{y}_2$$

Рациональные решения для компонент y_1, y_2 :

$$S_d^{AB} \Rightarrow \mathbf{y}_2 = C/x, \quad S_a \Rightarrow \mathbf{y}_1 = C$$

Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2')^T \quad S_a: \mathbf{y}_1 = -x \mathbf{y}_2$$

Рациональные решения для компонент y_1, y_2 :

$$S_d^{AB} \Rightarrow \mathbf{y}_2 = C/x, \quad S_a \Rightarrow \mathbf{y}_1 = C$$

Лорановы решения для компонент y_1, y_2 :

$$S_d^{AB} \Rightarrow \mathbf{y}_2 = (C_1 e^x + C_2)/x, \quad S_a \Rightarrow \mathbf{y}_1 = C_1 e^x + C_2$$

Реализация

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$, выделены y_1, y_2

> Extract(A1, A0, {1,2}, R)

$$\begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x + 1 & 1 \end{bmatrix}, \{[2, 1]\}, [-x], \{[1, 1]\}$$

> ReducedSystem(%[1], {1}, R)

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix}, \{[1, 1]\} \right]$$