

# Линейные дифференциально-алгебраические системы с выделенными неизвестными

Панфёров Антон Александрович

ВМК МГУ

27 января 2016 г.

## Дифференциальные системы с выделенными неизвестными

Пусть  $K$  — дифференциальное поле характеристики 0 с производной  $\partial$ .

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L(y) = 0, \quad (1)$$

где  $L \in K[\partial]^{m \times m}$  — дифференциальный оператор полного ранга,  
 $y = (y_1, \dots, y_m)^T$  — вектор неизвестных.

Пусть некоторые компоненты вектора неизвестных  $y$  являются **выделенными**, т. е. представляют бóльший интерес.

Можно рассматривать следующие задачи:

- проверка существования решений, выделенные компоненты которых принадлежат заданным классам;
- поиск решений только для выделенных компонент;
- частичная устойчивость по выделенным компонентам и др.

# АВ-алгоритм

Рассмотрим *нормальную* дифференциальную систему вида

$$y' = Ay, \quad (2)$$

где  $y$  — вектор неизвестных,  $A \in K^{m \times m}$ .

Для таких систем С. А. Абрамовым и М. Бронштейном был разработан алгоритм (АВ-алгоритм), позволяющий для выделенных компонент вектора неизвестных строить новую нормальную дифференциальную систему

$$z' = Bz, \quad (3)$$

в которой компоненты  $z$  суть выделенные компоненты  $y$  и, возможно, некоторые их производные.

## AB-алгоритм

$$y' = Ay \implies z' = Bz$$

- i Проекции на выделенные неизвестные пространства решений в произвольном расширении исходного дифференциального поля исходной системы  $y' = Ay$  и системы  $z' = Bz$  совпадают.
- ii Если решение системы  $z' = Bz$  таково, что его компоненты, соответствующие выделенным компонентам исходной системы, принадлежат некоторому расширению исходного дифференциального поля, то и все его компоненты принадлежат этому расширению.
- iii Если размер  $B$  равен размеру  $A$  и исходная система обладает решением, выделенные компоненты которого принадлежат некоторому расширению исходного дифференциального поля, то все компоненты такого решения принадлежат этому расширению.

## Примеры работы

AB-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1:  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

## Примеры работы

AB-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1:  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_3)^T$$

## Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1:  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_3)^T$$

Пример 2:  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y$$

## Примеры работы

АВ-алгоритм входит в стандартную поставку MAPLE в виде процедуры `ReducedSystem` пакета `Consequences` стандартного пакета `OreTools`.

Пример 1:  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_3)^T$$

Пример 2:  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y \implies z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} z, \quad z = (y_1, y_1')^T$$



## Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (4)$$
$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

## Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (4)$$

$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$\Downarrow A_r$  — обратима

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_m \\ -A_r^{-1} A_0 & -A_r^{-1} A_1 & \dots & -A_r^{-1} A_{r-1} \end{bmatrix} Y$$

где  $I_m$  — единичная матрица  $m \times m$ ,

$$Y = \left( y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(r-1)}, \dots, y_m^{(r-1)} \right)^T$$

## Системы высоких порядков

$$A_r y^{(r)} + A_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (4)$$

$$A_i \in K^{m \times m}, y = (y_1, \dots, y_m)^T$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_m & & & 0 \\ & I_m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix} Y' + \begin{bmatrix} 0 & -I_m & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & -I_m \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{r-1} \end{bmatrix} Y = 0$$

где  $I_m$  — единичная матрица  $m \times m$ ,

$$Y = \left( y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', \dots, y_1^{(r-1)}, \dots, y_m^{(r-1)} \right)^T$$

# Алгоритм Extract

Рассматривается дифференциальная система вида

$$A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (5)$$

где  $A_1, A_0 \in K^{m \times m}$  — ведущая и трейлинговая матрицы,

$y = (y_1, \dots, y_m)^T$  — вектор неизвестных, часть из которых *выделены*.

Рассмотрим случай, когда  $A_1 \neq 0$ , но  $\det A_1 \equiv 0$ .

Такие системы называются **дифференциально-алгебраическими**.

Алгоритм Extract для таких систем позволяет получить новую нормальную дифференциальную систему

$$\tilde{y}' = A \tilde{y} \quad (6)$$

для некоторой части компонент  $y$  ( $\tilde{y} \subset y$ ).


При этом те выделенные компоненты  $y$ , которые не вошли в  $\tilde{y}$ , линейно выражаются через вошедшие в  $\tilde{y}$  выделенные компоненты.

# Алгоритм Extract

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

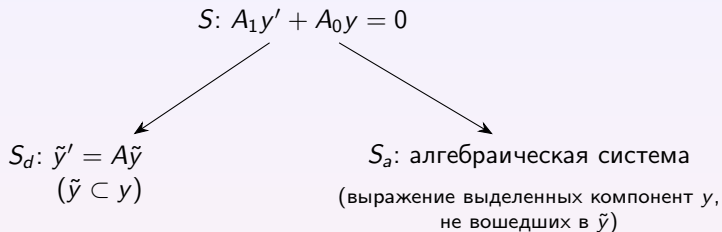
## Алгоритм Extract

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$


$$S_d: \tilde{y}' = A \tilde{y}$$

$(\tilde{y} \subset y)$

## Алгоритм Extract



# Пример работы алгоритма Extract

$$S: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 2x \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, y_3, y_4)^T$ , выделены  $y_1, y_2$

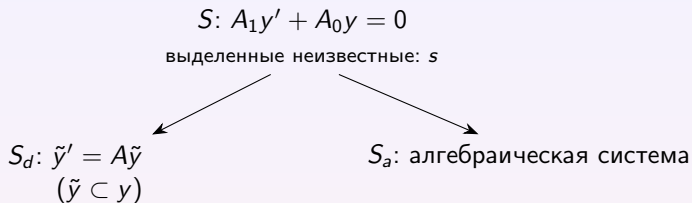
$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ -1/x^2 & 1/x \end{bmatrix} \tilde{y}$$

$\tilde{y} = (\mathbf{y}_2, y_3)^T$

$$S_a: \mathbf{y}_1 = -x \mathbf{y}_2$$



## Алгоритм Extract



## Алгоритм Extract

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

выделенные неизвестные:  $s = s_1 \cup s_2$  ( $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ )

( $s_1$ )

$$S_d: \tilde{y}' = A\tilde{y}$$

( $\tilde{y} \subset y$ )

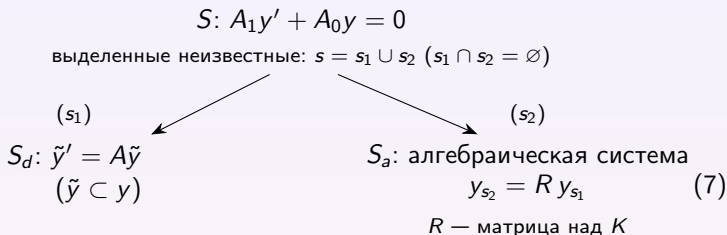
( $s_2$ )

$$S_a: \text{алгебраическая система}$$

$$y_{s_2} = R y_{s_1} \quad (7)$$

$R$  — матрица над  $K$

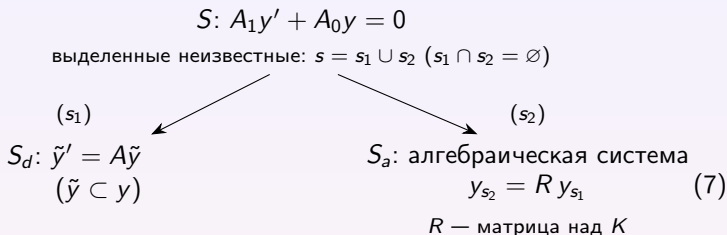
## Алгоритм Extract



## Определение

Системы  $S_d, S_a$  называются *согласованными* с  $(S, s)$ , если проекция пространства решений  $S$  на  $s$  совпадает с проекцией на выделенные неизвестные пространства решений систем  $S_d, S_a$  в произвольном расширении исходного дифференциального поля.

## Алгоритм Extract



## Определение

Системы  $S_d, S_a$  называются *согласованными* с  $(S, s)$ , если проекция пространства решений  $S$  на  $s$  совпадает с проекцией на выделенные неизвестные пространства решений систем  $S_d, S_a$  в произвольном расширении исходного дифференциального поля.

## Предложение

Пусть системы  $S_d, S_a$  согласованы с  $(S, s)$ . Тогда размер  $S_a$  определяется однозначно исходной системой  $S$  и множеством выделенных неизвестных  $s$ .

## Пример работы

$$K = \mathbb{Q}(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0,$$

где  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$  — все компоненты выделены.

1 результат Extract:

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2)^T$$

$$S_a: y_3 = x y_1$$

2 несогласованные системы для поиска рациональных решений:

$$S_d: y_1' = \frac{1}{x} y_1 \quad S_a: \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = x y_1 \end{cases}$$

## Пример работы

$$K = \mathbb{Q}(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0,$$

где  $y = (y_1, y_2, y_3)^T$  — все компоненты выделены.

1 результат Extract:

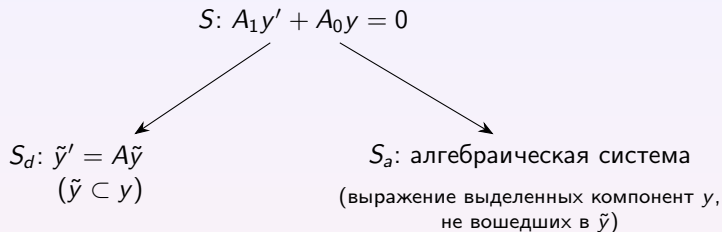
$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2)^T$$

$$S_a: y_3 = x y_1$$

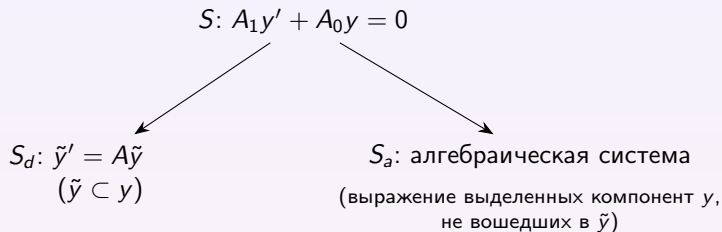
2 несогласованные системы для поиска рациональных решений:

$$S_d: y_1' = \frac{1}{x} y_1 \quad S_a: \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = x y_1 \end{cases}$$

## Алгоритм Extract



## Алгоритм Extract



Для заданной дифференциально-алгебраической системы  $S$  и множества выделенных неизвестных  $s$  существует бесконечное число пар согласованных систем  $S_d, S_a$ . При этом размеры систем  $S_d$  не ограничены.



## Extract: пример

Дифференциальная система  $S_d$ , получаемая алгоритмом Extract, не всегда имеет минимальный размер.

$$S: \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ , выделены  $y_1, y_2$

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$S_a: \emptyset$

## Extract: пример

Дифференциальная система  $S_d$ , получаемая алгоритмом Extract, не всегда имеет минимальный размер.

$$S: \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = 0$$

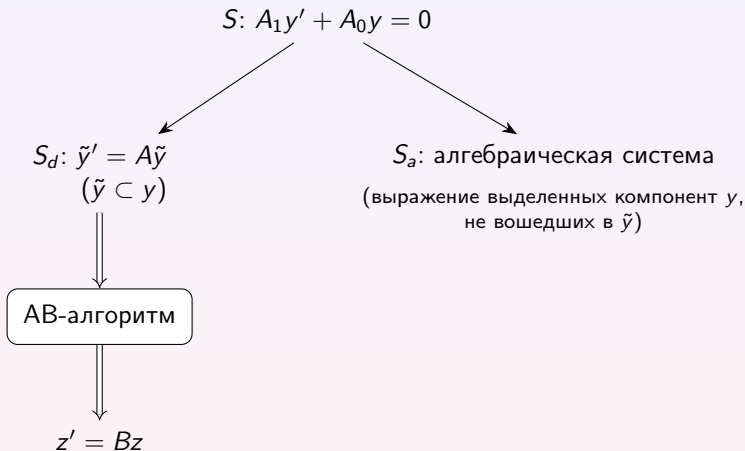
$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ , выделены  $y_1, y_2$

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$$

$$\tilde{y}' = \begin{bmatrix} -1/x & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_1, y_2)^T$$

 $S_a: \emptyset$

# ExtrAB = Extract + AB-алгоритм



# Алгоритм ExtrAB

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$S_d^{AB}: z' = Bz$$

( $z$  — часть выделенных компонент  $y$   
и некоторые их производные)

$S_a$ : алгебраическая система

(выражение выделенных компонент  $y$ ,  
не вошедших в  $z$ )

# Алгоритм ExtrAB

$$S: A_1 y' + A_0 y = 0$$

$$S_d^{AB}: z' = Bz$$

( $z$  — часть выделенных компонент  $y$   
и некоторые их производные)

$S_a$ : алгебраическая система

(выражение выделенных компонент  $y$ ,  
не вошедших в  $z$ )

## Теорема

Получаемые алгоритмом ExtrAB системы  $S_d^{AB}$  и  $S_a$

- 1 являются согласованными с  $(S, s)$ ;
- 2 имеют минимально возможные размеры.

## Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Данная система не имеет лорановых решений, с ненулевыми  $y_1, y_2$ . Однако у неё есть решения, в которых  $y_1, y_2$  представляются ненулевыми лорановыми рядами. Для их поиска используем алгоритм ExtrAB.

# Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$ , выделены  $y_1, y_2$

**Шаг 1:** Extract

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x + 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_2, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a: y_1 = -x y_2$$

# Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$ , выделены  $y_1, y_2$

**Шаг 1:** Extract

$$S_d: \tilde{y}' = \begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{y}, \quad \tilde{y} = (y_2, y_3, y_5, y_6)^T$$

$$S_a: y_1 = -x y_2$$

**Шаг 2:** AB-алгоритм

$$S_d \implies S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (y_2, y_2')^T$$



## Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (y_2, y_2')^T \quad S_a: y_1 = -x y_2$$

## Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (y_2, y_2')^T \quad S_a: y_1 = -x y_2$$

Рациональные решения для компонент  $y_1, y_2$ :

$$S_d^{AB} \Rightarrow y_2 = C/x, \quad S_a \Rightarrow y_1 = C$$

## Пример работы алгоритма ExtrAB

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$$y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T, \quad \text{выделены } y_1, y_2$$

Построенные системы:

$$S_d^{AB}: z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix} z, \quad z = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2')^T \quad S_a: \mathbf{y}_1 = -x \mathbf{y}_2$$

Рациональные решения для компонент  $y_1, y_2$ :

$$S_d^{AB} \Rightarrow \mathbf{y}_2 = C/x, \quad S_a \Rightarrow \mathbf{y}_1 = C$$

Лорановы решения для компонент  $y_1, y_2$ :

$$S_d^{AB} \Rightarrow \mathbf{y}_2 = (C_1 e^x + C_2)/x, \quad S_a \Rightarrow \mathbf{y}_1 = C_1 e^x + C_2$$

# Реализация

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -(x+1) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y = 0$$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$ , выделены  $y_1, y_2$

> Extract(A1, A0, {1,2}, R)

$$\begin{bmatrix} 1 - 1/x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/x & 0 \\ 1 & 0 & x + 1 & 1 \end{bmatrix}, \{[2, 1]\}, [-x], \{[1, 1]\}$$

> ReducedSystem(%[1], {1}, R)

$$\left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/x & 1 - 2/x \end{bmatrix}, \{[1, 1]\} \right]$$