Исключение неизвестных и его приложения

Алексей Овчинников[1], Глеб Погудин[2]

[1]Городской университет Нью-Йорка

[2]Нью-йоркский университет, Институт Куранта

Исследования частично поддержаны: CUNY, NSF и NSA

Классическое использование исключения неизвестных

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую гармонический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -kx. \end{cases}$$

Классическое использование исключения неизвестных

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую гармонический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -kx. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v, \\ \ddot{x} = \dot{v}, \\ \dot{v} = -kx. \end{cases}$$

Классическое использование исключения неизвестных

Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую гармонический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -kx. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v, \\ \ddot{x} = \dot{v}, \\ \dot{v} = -kx. \end{cases} \quad \Rightarrow \ddot{x} = -kx.$$

В этом пример мы получили уравнение, зависящее только от x, то есть мы исключили неизвестную v.

Другой пример

Рассмотрим модель пружинного маятника с грузом, трением и внешней силой:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Классическое использование исключения неизвестных
Другой пример

Рассмотрим модель пружинного маятника с грузом, трением и внешней силой:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Продифференцируем дважды:

$$M\dddot{x} + c\ddot{x} + k\dot{x} = \dot{F}(t)$$

$$M\ddddot{x} + c\dddot{x} + k\ddot{x} = \ddot{F}(t)$$

Классическое использование исключения неизвестных
Другой пример

Рассмотрим модель пружинного маятника с грузом, трением и внешней силой:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

Продифференцируем дважды:

$$M\dddot{x} + c\ddot{x} + k\dot{x} = \dot{F}(t)$$
$$M\ddddot{x} + c\dddot{x} + k\ddot{x} = \ddot{F}(t)$$

Решим систему относительно, например, k:

$$k = \frac{\det\begin{pmatrix} \ddot{x} & \dot{x} & F(t) \\ \dddot{x} & \ddot{x} & \dot{F}(t) \\ \ddddot{x} & \dddot{x} & \ddot{F}(t) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \ddot{x} & \dot{x} & x \\ \dddot{x} & \ddot{x} & \dot{x} \\ \ddddot{x} & \dddot{x} & \ddot{x} \end{pmatrix}}$$

Таким образом, мы (дифференциально) исключили M и c.

Приложения. Что такое определимость параметров?

Основной вопрос

Пусть дана (биологическая, химическая, механическая, и т.д.) система и математическая модель, описывающая ее и зависящая от параметров (часть которых может быть заранее неизвестна). Можно ли

определить неизвестные параметры,

то есть, можно ли провести эксперименты для вычисления этих параметров?

Пример

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x + k$, в котором $x(t)$ можно экспериментально найти и k – неизвестный параметр.

Так как $k = \dot{x} - x$, то этот параметр – определяемый.

Приложения. Простой пример

Пример

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x + k$, в котором $x(t)$ можно экспериментально найти и k – неизвестный параметр.

Так как $k = \dot{x} - x$, то этот параметр – определяемый.

Пример

Рассмотрим уравнение $\dot{x} = x + k_1 + k_2$, в котором $x(t)$ можно экспериментально найти и k_1 и k_2 – неизвестные параметры.

Для каждого решения $x(t)$ этого уравнения существует бесконечно много пар (k_1, k_2), таких что $k_1 + k_2 = \dot{x} - x$.

Такие параметры k_1 и k_2 – неопределяемые.

Приложения. Модель Лоттки-Вольтерры

Рассмотрим следующую модель хищник—жертва:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_3 x_2 + k_4 x_1 x_2, \end{cases}$$

в которой k_1, k_2, k_3 и k_4 – неизвестные параметры.

Предположим, что мы можем экспериментально узнать $y(t) := x_1(t)$.

Приложения. Модель Лоттки-Вольтерры

Рассмотрим следующую модель хищник—жертва:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_3 x_2 + k_4 x_1 x_2, \end{cases}$$

в которой k_1, k_2, k_3 и k_4 – неизвестные параметры.

Предположим, что мы можем экспериментально узнать $y(t) := x_1(t)$.

Используя алгоритм исключения неизвестных, можно найти выражения для k_1, k_3, k_4 вида

$$k_i = \frac{P_i(y, \ldots, y^{(5)})}{Q_i(y, \ldots, y^{(5)})}, \quad \text{for } i = 1, 3, 4,$$

а для k_2 выражения найти нельзя, и этот параметр – неопределимый.

Приложения. Модель Лоттки-Вольтерры

Рассмотрим следующую модель хищник—жертва:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_3 x_2 + k_4 x_1 x_2, \end{cases}$$

в которой k_1, k_2, k_3 и k_4 – неизвестные параметры.

Предположим, что мы можем экспериментально узнать $y(t) := x_1(t)$.

Используя алгоритм исключения неизвестных, можно найти выражения для k_1, k_3, k_4 вида

$$k_i = \frac{P_i(y, \ldots, y^{(5)})}{Q_i(y, \ldots, y^{(5)})}, \quad \text{for } i = 1, 3, 4,$$

а для k_2 выражения найти нельзя, и этот параметр – неопределимый.

Если k_1 и k_3 – известные, то k_4 можно выразить (исключая x_2 и k_2) так:

$$k_4 = \frac{k_1 k_3 y^2 - k_3 y \dot{y} - \ddot{y} y + \dot{y}^2}{k_1 y^3 - \dot{y} y^2}.$$

Модель Мэя-Ленарда для конкуренции двух растений

Рассмотрим модель:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{(1-b)x_n}{x_n + \alpha_1 y_n} + b x_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{(1-b)y_n}{\alpha_2 x_n + y_n} + b y_n, \end{cases}$$

Есть результаты о определимости параметров в частных случаях.

Обозначение разностной алгебры: сдвиг x_{n+1} часто обозначается более общо $\sigma(x)$ и включает в себя другие типы преобразований:

$$f(x) \mapsto f(x+1), \quad f(x) \mapsto f(qx).$$

Приложения. Важные задачи

Важные задачи

Разработать и реализовать эффективные алгоритмы, решающие следующие задачи:

- Выяснить, какие из неизвестных параметров системы монжо определить, находя оставшиеся неизвестные системы из экспериментов.

Важные задачи

Разработать и реализовать эффективные алгоритмы, решающие следующие задачи:

- Выяснить, какие из неизвестных параметров системы монжо определить, находя оставшиеся неизвестные системы из экспериментов.
- Найти формулы, выражающие определяемые параметры через неизвестные, находящиеся из экспериментов.

Важные задачи

Разработать и реализовать эффективные алгоритмы, решающие следующие задачи:

- Выяснить, какие из неизвестных параметров системы монжо определить, находя оставшиеся неизвестные системы из экспериментов.
- Найти формулы, выражающие определяемые параметры через неизвестные, находящиеся из экспериментов.
- Найти “лучшие/оптимальные” множества неизвестных, которые будут находиться из экспериментов.

Мы работаем над этим с Хонгом и Япом.

Приложения. Сети химических реакций

Механизм фосфорилирования/деосфорилирования:

$$S_0 + K \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} S_0K \xrightarrow{k_3} S_1 + K \qquad S_1 + F \underset{k_5}{\overset{k_6}{\rightleftharpoons}} S_1F \xrightarrow{k_4} S_0 + F$$

Приложения. Сети химических реакций

Механизм фосфорилирования/деосфорилирования:

$$S_0 + K \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} S_0K \xrightarrow{k_3} S_1 + K \qquad S_1 + F \underset{k_5}{\overset{k_6}{\rightleftharpoons}} S_1F \xrightarrow{k_4} S_0 + F$$

Положим $x_1 = S_0,\ x_2 = K,\ x_3 = S_1,\ x_4 = S_0K,\ x_5 = F,\ x_6 = S_1F$

Механизм фосфорилирования/деосфорилирования:

$$S_0 + K \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} S_0K \xrightarrow{k_3} S_1 + K \qquad S_1 + F \underset{k_5}{\overset{k_6}{\rightleftharpoons}} S_1F \xrightarrow{k_4} S_0 + F$$

Положим $x_1 = S_0,\ x_2 = K,\ x_3 = S_1,\ x_4 = S_0K,\ x_5 = F,\ x_6 = S_1F$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1x_1x_2 + k_2x_4 + k_4x_6, \\ \dot{x}_2 = -k_1x_1x_2 + k_2x_4 + k_3x_4, \\ \dot{x}_3 = k_3x_4 + k_5x_6 - k_6x_3x_5, \\ \dot{x}_4 = k_1x_1x_2 - k_2x_4 - k_3x_4, \\ \dot{x}_5 = k_4x_6 + k_5x_6 - k_6x_3x_5, \\ \dot{x}_6 = -k_4x_6 - k_5x_6 + k_6x_3x_5 \end{cases}$$

Приложения. Сети химических реакций

Механизм фосфорилирования/деосфорилирования:

$$S_0 + K \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} S_0K \xrightarrow{k_3} S_1 + K \qquad S_1 + F \underset{k_5}{\overset{k_6}{\rightleftharpoons}} S_1F \xrightarrow{k_4} S_0 + F$$

Положим $x_1 = S_0,\ x_2 = K,\ x_3 = S_1,\ x_4 = S_0K,\ x_5 = F,\ x_6 = S_1F$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1x_1x_2 + k_2x_4 + k_4x_6, \\ \dot{x}_2 = -k_1x_1x_2 + k_2x_4 + k_3x_4, \\ \dot{x}_3 = k_3x_4 + k_5x_6 - k_6x_3x_5, \\ \dot{x}_4 = k_1x_1x_2 - k_2x_4 - k_3x_4, \\ \dot{x}_5 = k_4x_6 + k_5x_6 - k_6x_3x_5, \\ \dot{x}_6 = -k_4x_6 - k_5x_6 + k_6x_3x_5 \end{cases}$$

Наш результат: достаточно найти из экспериментов $x_2(t)$ и $x_3(t)$ (и вычислить их производные до 6-го порядка), чтобы определить все параметры единственным образом.

Приложения. Замечание

Для таких приложениях достаточно лишь знать определяемость параметров для проверки модели.

Приложения. Замечание

Для таких приложениях достаточно лишь знать определяемость параметров для проверки модели.

В таком случае вместо выполнения “полного” исключения неизвестных достаточно знать конкретные (численные, не асимптотические) оценки на число дифференцирований необходимых для исключения (5 раз для каждой из x_2 и x_3 в предыдущем примере).

Приложения. Замечание

Для таких приложениях достаточно лишь знать определяемость параметров для проверки модели.

В таком случае вместо выполнения “полного” исключения неизвестных достаточно знать конкретные (численные, не асимптотические) оценки на число дифференцирований необходимых для исключения (5 раз для каждой из x_2 и x_3 в предыдущем примере).

Имея такие оценки, определяемость параметров можно проверить, оценивая размер общего слоя проекций аффинных многообразий. Базисы Гребнера, треугольные множества, алгоритмы из численной алгебраической геометрии (и прочие возможные методы) можно для этого использовать, что обычно быстрее, чем полное исключение неизвестных.

Приложения. Замечание

Для таких приложениях достаточно лишь знать определяемость параметров для проверки модели.

В таком случае вместо выполнения “полного” исключения неизвестных достаточно знать конкретные (численные, не асимптотические) оценки на число дифференцирований необходимых для исключения (5 раз для каждой из x_2 и x_3 в предыдущем примере).

Имея такие оценки, определяемость параметров можно проверить, оценивая размер общего слоя проекций аффинных многообразий. Базисы Гребнера, треугольные множества, алгоритмы из численной алгебраической геометрии (и прочие возможные методы) можно для этого использовать, что обычно быстрее, чем полное исключение неизвестных.

Вывод

Важны конкретные оценки на число дифференцирований.

Приложения. Замечание

В таких приложения, которые будут описаны на следующем слайде, определяемость параметров уже заранее известна, и теперь задача - вычислить значения параметров на основании наблюдений/экспериментов.

Приложения. Замечание

В таких приложения, которые будут описаны на следующем слайде, определяемость параметров уже заранее известна, и теперь задача - вычислить значения параметров на основании наблюдений/экспериментов.

Вывод

Исключение неизвестных само по себе важно для нахождения формул, выражающих параметры через неизвестные, которые можно найди из экспериментов и их производные.

Приложения. Пример моделирования ВИЧ

Miao, Dykes, Demeterb, Cavenaugh, Park, Perelson, Wu, “Modeling and Estimation of Kinetic Parameters and Replicative Fitness of HIV-1 from Flow-Cytometry-Based Growth Competition Experiments”, *Bulletin of Mathematical Biology* (2008)

$$\begin{cases} T_t = (\rho - k_m T_m - k_w T_w - k_r T_{mw})T, \\ (T_m)_t = (\rho_m + k_m T - q_m T_w)T_m + 0.25 k_r T_{mw} T, \\ (T_w)_t = (\rho_w + k_w T - q_w T_m)T_w + 0.25 k_r T_{mw} T, \\ (T_{mw})_t = (\rho_{mw} + 0.5 k_r T)T_{mw} + (q_m + q_w)T_w T_m. \end{cases}$$

Приложения. Пример моделирования ВИЧ

Miao, Dykes, Demeterb, Cavenaugh, Park, Perelson, Wu, “Modeling and Estimation of Kinetic Parameters and Replicative Fitness of HIV-1 from Flow-Cytometry-Based Growth Competition Experiments”, *Bulletin of Mathematical Biology* (2008)

$$\begin{cases} T_t = (\rho - k_m T_m - k_w T_w - k_r T_{mw})T, \\ (T_m)_t = (\rho_m + k_m T - q_m T_w)T_m + 0.25 k_r T_{mw} T, \\ (T_w)_t = (\rho_w + k_w T - q_w T_m)T_w + 0.25 k_r T_{mw} T, \\ (T_{mw})_t = (\rho_{mw} + 0.5 k_r T)T_{mw} + (q_m + q_w)T_w T_m. \end{cases}$$

Мы можем выразить значения параметров через T, T_m, T_w, T_{mw} и их производные порядков 1, 2 и 3.

Приложения. Пример моделирования ВИЧ

Miao, Dykes, Demeterb, Cavenaugh, Park, Perelson, Wu, “Modeling and Estimation of Kinetic Parameters and Replicative Fitness of HIV-1 from Flow-Cytometry-Based Growth Competition Experiments”, *Bulletin of Mathematical Biology* (2008)

$$\begin{cases} T_t = (\rho - k_m T_m - k_w T_w - k_r T_{mw})T, \\ (T_m)_t = (\rho_m + k_m T - q_m T_w)T_m + 0.25 k_r T_{mw} T, \\ (T_w)_t = (\rho_w + k_w T - q_w T_m)T_w + 0.25 k_r T_{mw} T, \\ (T_{mw})_t = (\rho_{mw} + 0.5 k_r T)T_{mw} + (q_m + q_w)T_w T_m. \end{cases}$$

Мы можем выразить значения параметров через T, T_m, T_w, T_{mw} и их производные порядков 1, 2 и 3.

Таким образом, мы уменьшаем число используемых измерений в экспериментах с 20 (получено в вышеуказанной статье) до 16.

Эффективное ислючение неизвестных для обыкновенных дифференциальных/разностных уравнений
Набросок алгоритма

Вход: Система полиномиальных обыкновенных дифференциальных/разностных уравнений от $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ и подмножество переменных $x_1(t), \ldots, x_m(t)$.

Выход: Ненулевое уравнение, зависящее только от $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ и являющееся следствием системы или НЕТ, если такого уравнения не существует.

1. Продифференцировать/сдвинуть все уравнения N раз.
2. Попытатья получить полиномиальные следствия, зависящие только от $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ и их производных / сдвигов.
3. Если такое следствие существует, то подать его на выход. В противном случае выдать НЕТ.

Существующие алгоритмы

Дифференциальное исключение можно выполнять при помощи алгоритма Розенфельд-Гребнер. В большинстве рассмотренных нами примеров алгоритм, описанный выше (с подходящим N) оказывался быстрее.

Существующие алгоритмы

Дифференциальное исключение можно выполнять при помощи алгоритма Розенфельд-Гребнер. В большинстве рассмотренных нами примеров алгоритм, описанный выше (с подходящим N) оказывался быстрее.

Насколько нам известно, не найдены явные оценки для числа дифференцирований, производимых алгоритмом исключения Розенфельд-Гребнер.

Существующие алгоритмы

Дифференциальное исключение можно выполнять при помощи алгоритма Розенфельд-Гребнер. В большинстве рассмотренных нами примеров алгоритм, описанный выше (с подходящим N) оказывался быстрее.

Насколько нам известно, не найдены явные оценки для числа дифференцирований, производимых алгоритмом исключения Розенфельд-Гребнер.

Проверку существования разностного исключения в несколько другой но связанной с этой задаче можно при помощи алгоритма Гао-Луо-Юан.

Первая оценка для N в задаче исключения неизвестных в системах обыкновенных дифференциальных уравнений

В совместной работе с Во мы получили первую оценку на число дифференцирований для исключения неизвестных. Эта оценка зависит:

- полиномиально от степеней уравнений;

Первая оценка для N в задаче исключения неизвестных в системах обыкновенных дифференциальных уравнений

В совместной работе с Во мы получили первую оценку на число дифференцирований для исключения неизвестных. Эта оценка зависит:

- полиномиально от степеней уравнений;
- экспоненциально от числа переменных, которые требуется исключить;

Первая оценка для N в задаче исключения неизвестных в системах обыкновенных дифференциальных уравнений

В совместной работе с Во мы получили первую оценку на число дифференцирований для исключения неизвестных. Эта оценка зависит:

- полиномиально от степеней уравнений;
- экспоненциально от числа переменных, которые требуется исключить;
- дважды экспоненциально от размерности многообразия, заданного исходными уравнениями, рассматриваемыми как полиномиальные уравнения от переменных, которые требуется исключить.

Численные значения оценки в дифференциальном случае

s	(r,m) \ (d_0,d_1)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,2)$
2	$(2,0)$	1	4	9	16	16
	$(2,1)$	4	10	18	28	52
3	$(2,1)$	4	26	84	196	164
	$(3,1)$	4	52	252	784	328
4	$(2,2)$	23	$2,196$	$36,051$	$266,504$	$263,240$
	$(3,1)$	4	164	$1,710$	$9,232$	$1,160$

- s — размерность объемлющего пространства от исключаемых переменных;
- d_0 — минимальная степень по исключаемым переменным;
- d_1 — максимальная степень по исключаемым переменным;
- r — число уравнений;
- m — размерность многообразия исходных уравнений в объемлющем пространстве от исключаемых переменных.

Численные значения оценки в “радикальном” случае

m	$(D_0, \ldots, D_m)$	N если $D_0 = 0$	N если $D_0 > 0$
0	(D_0)	0	1
1	$(D_0, 1)$	3	4
	$(D_0, 2)$	9	10
	$(D_0, 3)$	19	20
2	$(D_0, 0, 1)$	19	20
	$(D_0, 1, 1)$	22	23
	$(D_0, 2, 1)$	28	29
	$(D_0, 0, 2)$	$1,033$	$1,034$
	$(D_0, 1, 2)$	$1,036$	$1,037$
	$(D_0, 2, 2)$	$1,042$	$1,043$

- m — размерность многообразия исходных уравнений в объемлющем пространстве от исключаемых переменных;
- D_j — сумма степеней простых компонент размерности j $(0 \leqslant j \leqslant m)$.

Пример: эпидемиологическая модель SIRS с “proportional mixing”

Эта система уравнений – из моделирования в биологии:

$$\begin{cases} S'(t) = b_1 S(t) + p b_2 I(t) + (b_3 + e) R(t) - d S(t) - \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t)+I(t)+R(t)} \\ I'(t) = q b_2 - (d + \epsilon + c) I(t) + \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t)+I(t)+R(t)} \\ R'(t) = -(d + \delta + e) R(t) + c I(t) \end{cases}$$

Если требуется исключить $R(t)$ и $I(t)$, то

- Согласно общей таблице мы бы дифференцировали 164 раз;

Пример: эпидемиологическая модель SIRS с “proportional mixing”

Эта система уравнений – из моделирования в биологии:

$$\begin{cases} S'(t) = b_1 S(t) + p b_2 I(t) + (b_3 + e) R(t) - d S(t) - \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ I'(t) = q b_2 - (d + \epsilon + c) I(t) + \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ R'(t) = -(d + \delta + e) R(t) + c I(t) \end{cases}$$

Если требуется исключить $R(t)$ и $I(t)$, то

- Согласно общей таблице мы бы дифференцировали 164 раз;
- Добавим ур-е 1 к ур-ю 2 и избавимся от знаменателей;

Пример: эпидемиологическая модель SIRS с “proportional mixing”

Эта система уравнений – из моделирования в биологии:

$$\begin{cases} S'(t) = b_1 S(t) + p b_2 I(t) + (b_3 + e) R(t) - d S(t) - \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ I'(t) = q b_2 - (d + \epsilon + c) I(t) + \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ R'(t) = -(d + \delta + e) R(t) + c I(t) \end{cases}$$

Если требуется исключить $R(t)$ и $I(t)$, то

- Согласно общей таблице мы бы дифференцировали 164 раз;
- Добавим ур-е 1 к ур-ю 2 и избавимся от знаменателей;
- Полученный радикальный идеал – степени 2 и размерности 1 от переменных $I, R, I', R' \implies$ дифференцировали бы 9 раз;

Пример: эпидемиологическая модель SIRS с “proportional mixing”

Эта система уравнений – из моделирования в биологии:

$$\begin{cases} S'(t) = b_1 S(t) + p b_2 I(t) + (b_3 + e) R(t) - d S(t) - \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ I'(t) = q b_2 - (d + \epsilon + c) I(t) + \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ R'(t) = -(d + \delta + e) R(t) + c I(t) \end{cases}$$

Если требуется исключить $R(t)$ и $I(t)$, то

- Согласно общей таблице мы бы дифференцировали 164 раз;
- Добавим ур-е 1 к ур-ю 2 и избавимся от знаменателей;
- Полученный радикальный идеал – степени 2 и размерности 1 от переменных $I, R, I', R' \implies$ дифференцировали бы 9 раз;
- Вместо этого: дифференцирование ур-е 1 единожды не изменяет объемлющего пространства, но уменьшает размерность до 0;

Пример: эпидемиологическая модель SIRS с “proportional mixing”

Эта система уравнений – из моделирования в биологии:

$$\begin{cases} S'(t) = b_1 S(t) + p b_2 I(t) + (b_3 + e) R(t) - d S(t) - \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ I'(t) = q b_2 - (d + \epsilon + c) I(t) + \lambda \frac{S(t) I(t)}{S(t) + I(t) + R(t)} \\ R'(t) = -(d + \delta + e) R(t) + c I(t) \end{cases}$$

Если требуется исключить $R(t)$ и $I(t)$, то

- Согласно общей таблице мы бы дифференцировали 164 раз;
- Добавим ур-е 1 к ур-ю 2 и избавимся от знаменателей;
- Полученный радикальный идеал – степени 2 и размерности 1 от переменных $I, R, I', R' \implies$ дифференцировали бы 9 раз;
- Вместо этого: дифференцирование ур-е 1 единожды не изменяет объемлющего пространства, но уменьшает размерность до 0;
- Таблица $\implies$ достаточно продифференцировать еще один раз. Эта оценка – точная!

Первая оценка для N в задаче исключения неизвестных в системах обыкновенных разностных уравнений

Совместно со Скенлоном:

$$B(d, D) = \begin{cases} D & \text{если } d = 0, \\ 1 + D^2 + \frac{D(D-1)(D-2)}{6} & \text{если } d = 1, \\ B(d-1, D) + D^{B(d-1,D)+1} & \text{если } d > 1. \end{cases}$$

Здесь d – размерность, а D – степень аффинного многообразия.

Первая оценка для N в задаче исключения неизвестных в системах обыкновенных разностных уравнений

Совместно со Скенлоном:

$$B(d, D) = \begin{cases} D & \text{если } d = 0, \\ 1 + D^2 + \frac{D(D-1)(D-2)}{6} & \text{если } d = 1, \\ B(d-1, D) + D^{B(d-1,D)+1} & \text{если } d > 1. \end{cases}$$

Здесь d – размерность, а D – степень аффинного многообразия.

Таблица значений при типичном использовании:

$d \setminus D$	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5
1	2	5	11	21	36

Первая оценка для N в задаче исключения неизвестных в системах обыкновенных разностных уравнений

Совместно со Скенлоном:

$$B(d, D) = \begin{cases} D & \text{если } d = 0, \\ 1 + D^2 + \frac{D(D-1)(D-2)}{6} & \text{если } d = 1, \\ B(d-1, D) + D^{B(d-1,D)+1} & \text{если } d > 1. \end{cases}$$

Здесь d – размерность, а D – степень аффинного многообразия.

Таблица значений при типичном использовании:

$d \setminus D$	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5
1	2	5	11	21	36

Многие модели из систем разностных уравнений – “квадратные”. Эта табилица применима к задачам исключения $\lceil n/2 \rceil$ или менее неизвестных из n.

Точность оценки

Наша оценка точна при $d = 0$: для любого D рассмотрим

$$\begin{cases} x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-D+1) = 0, \\ \sigma(x) - x - 1 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) не имеет решений в $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, потому что компоненты решений могут лишь принимать значения $0, 1, \ldots, D-1$ и строго возрастать.

С другой стороны система из $0, \ldots, D-1 = (B(0, D) - 1)$ продолжений (1) имеет решение

$$\sigma^i(x) = i, \quad 0 \leqslant i \leqslant D.$$

Поэтому необходимо применить еще один сдвиг, чтобы выразить $1 = 0$ через уравнения (1) (то есть, исключить x).

Точность оценки

Этот пример основан на пример, построенном Амзаллагом и Густавсоном. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} f_1 := x\sigma(x) = 0, \\ f_2 := x - \sigma(x) - \sigma^2(x) + 1 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть X – аффинное многообразие, заданное (2) в трехмерном пространстве с координатами $x, \sigma(x), \sigma^2(x)$. Имеем $\dim X = 1$ и $\deg X = 2$. Поэтому $B(d, D) = 5$. Вычисление показывает:

$$1 \in \left(f_1, \ldots, \sigma^4(f_1), \sigma^5(f_1), f_2, \ldots, \sigma^4(f_2), \sigma^5(f_2)\right)$$
$$1 \notin \left(f_1, \ldots, \sigma^4(f_1), f_2, \ldots, \sigma^4(f_2)\right).$$

Поэтому наша оценка для $d = 1$ и $D = 2$ – точная.

“Stage structured” модель Лезли-Гауэра

J. Cushing, S. Henson, and L. Roeger. *Coexistence of competing juvenile-adult structured populations.* Journal of Biological Dynamics, 1(2):201–231, 2007.

$$\begin{cases} J_{n+1} = b_1 \frac{1}{1+d_1 A_n} A_n \\ A_{n+1} = s_1 \frac{1}{1+J_n+c_1 j_n} J_n \\ j_{n+1} = b_2 \frac{1}{1+d_2 a_n} a_n \\ a_{n+1} = s_2 \frac{1}{1+c_2 J_n + j_n} j_n, \end{cases} \tag{3}$$

Для проверки исключимости J и j из системы (3) рассмотрим аффинное многообразие, заданное (3) над полем

$$\mathbb{Q}(b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, s_1, s_2, a, A, \sigma(a), \sigma(A))$$

с координатами $j, \sigma(j), J, \sigma(J)$. Получим, что $d = 0$ и $D = 1$, так как система линейна по $j, \sigma(j), J, \sigma(J)$. Тогда $B(d, D) = 1$. Вычисление также показывает, что этот один сдвиг также необходимо сделать. Так что наша оценка – точная для этого примера.

Основные составляющие получения дифференциальной оценки (теоретически)

Мы поступаем примерно следующим образом (это упрощение; в решении – много технических нюансов):

- разложим на простые компоненты (представленные треугольными множествами)

Основные составляющие получения дифференциальной оценки (теоретически)

Мы поступаем примерно следующим образом (это упрощение; в решении – много технических нюансов):

- разложим на простые компоненты (представленные треугольными множествами)
- “дифференцируем” компоненты (дифференцируются элементы треугольных множеств)

Основные составляющие получения дифференциальной оценки (теоретически)

Мы поступаем примерно следующим образом (это упрощение; в решении – много технических нюансов):

- разложим на простые компоненты (представленные треугольными множествами)
- “дифференцируем” компоненты (дифференцируются элементы треугольных множеств)
- повторяем процедуру пока не будет выполнен критерий остановки, основанный на вычислении размерности аффинных многообразий

Основные составляющие получения дифференциальной оценки (теоретически)

Мы поступаем примерно следующим образом (это упрощение; в решении – много технических нюансов):

- разложим на простые компоненты (представленные треугольными множествами)
- “дифференцируем” компоненты (дифференцируются элементы треугольных множеств)
- повторяем процедуру пока не будет выполнен критерий остановки, основанный на вычислении размерности аффинных многообразий
- собираем вместе результаты, полученные для каждой из компонент в отдельности

Некоторые детали

Задача исключения сводится к задаче несоместности путем расширения скаляров.

Некоторые детали

Задача исключения сводится к задаче несовместности путем расширения скаляров.

Например, упрощая, для $I \subset K[x, y, x', y']$, имеем

$$\exists f \in K[x, x'] \text{ такой что } f \in I \iff 1 \in I \cdot K(x, x')[y, y'].$$

Некоторые детали

Задача исключения сводится к задаче несоместности путем расширения скаляров.

Например, упрощая, для $I \subset K[x, y, x', y']$, имеем

$$\exists f \in K[x, x'] \text{ такой что } f \in I \iff 1 \in I \cdot K(x, x')[y, y'].$$

Шаг с вычислением размерности частично основан на следующем факте:

Лемма

Пусть I – радикальный идеал в кольце $R := K[y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n]$, такой что соответствующая система дифференциальных уравнений – несовместная. Тогда

$$\dim\left(\sqrt{I^{(\leq 1)} \cap R}\right) < \dim I.$$

Пример

Рассмотрим идеал

$$I = (y_1 y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \subset K(x_1, x_2)\,[y_1, y_2, y_1', y_2']\,,$$

Пример

Рассмотрим идеал

$$I = (y_1 y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \subset K(x_1, x_2)\,[y_1, y_2, y_1', y_2']\,,$$

имеем

$$\sqrt{I} = (y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \cap (y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2)\,,$$

Пример

Рассмотрим идеал

$$I = (y_1 y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \subset K(x_1, x_2)\,[y_1, y_2, y_1', y_2']\,,$$

имеем

$$\sqrt{I} = (y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \cap (y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2)\,,$$

размерность которого равна 1.

Пример

Рассмотрим идеал

$$I = (y_1 y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \subset K(x_1, x_2)\,[y_1, y_2, y_1', y_2']\,,$$

имеем

$$\sqrt{I} = (y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \cap (y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2)\,,$$

размерность которого равна 1. Но

$$\begin{aligned}(y_1 y_2, y_1' y_2 + y_1 y_2', y_1' - x_1, y_1'' - x_1', y_2' - x_2, y_2'' - x_2')\\ = (y_1 y_2, \mathbf{x_1 y_2} + \mathbf{x_2 y_1}, y_1' - x_1, y_1'' - x_1', y_2' - x_2, y_2'' - x_2')\,,\end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим идеал

$$I = (y_1y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \subset K(x_1, x_2)\,[y_1, y_2, y_1', y_2'] \,,$$

имеем

$$\sqrt{I} = (y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \cap (y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \,,$$

размерность которого равна 1. Но

$$\begin{aligned}
&(y_1y_2, y_1'y_2 + y_1y_2', y_1' - x_1, y_1'' - x_1', y_2' - x_2, y_2'' - x_2') \\
&\qquad = (y_1y_2, \mathbf{x_1y_2 + x_2y_1}, y_1' - x_1, y_1'' - x_1', y_2' - x_2, y_2'' - x_2') \,,
\end{aligned}$$

пересекая с $K(x_1, x_2, x_1', x_2')\,[y_1, y_2, y_1', y_2']$, получим

$$(y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \,,$$

Пример

Рассмотрим идеал

$$I = (y_1y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \subset K(x_1, x_2)\,[y_1, y_2, y_1', y_2'] \,,$$

имеем

$$\sqrt{I} = (y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \cap (y_2, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \,,$$

размерность которого равна 1. Но

$$\begin{aligned}(y_1y_2, y_1'y_2 + y_1y_2', y_1' - x_1, y_1'' - x_1', y_2' - x_2, y_2'' - x_2') \\ = (y_1y_2, \mathbf{x_1y_2} + \mathbf{x_2y_1}, y_1' - x_1, y_1'' - x_1', y_2' - x_2, y_2'' - x_2') \,,\end{aligned}$$

пересекая с $K(x_1, x_2, x_1', x_2')\,[y_1, y_2, y_1', y_2']$, получим

$$(y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, y_1' - x_1, y_2' - x_2) \,,$$

наблюдая падение размерности (идеал – нульмерный).

Некоторые детали для разностных уравнений

Задача исключения опять сводится к задаче несовместности путем расширения скаляров.

Некоторые детали для разностных уравнений

Задача исключения опять сводится к задаче несоместности путем расширения скаляров.

Например, упрощая, для $I \subset K[x, y, \sigma(x), \sigma(y)]$, имеем

$$\exists f \in K[x, \sigma(x)] \text{ такой что } f \in I \iff 1 \in I \cdot K(x, \sigma(x))[y, \sigma(y)].$$

Некоторые детали для разностных уравнений

Задача исключения опять сводится к задаче несоместности путем расширения скаляров.

Например, упрощая, для $I \subset K[x, y, \sigma(x), \sigma(y)]$, имеем

$$\exists f \in K[x, \sigma(x)] \text{ такой что } f \in I \iff 1 \in I \cdot K(x, \sigma(x))[y, \sigma(y)].$$

Но метод с продолжением-проекцией напрямую не работает. Используется намного более тонкий подход.

Пример

Рассмотрим систему разностных уравнений, заданную любыми образующими идеала $I := I_1 \cap I_2$ в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x, \sigma(x), y, \sigma(y), z, w]$, где

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= (\sigma(y)z - 1, x, \sigma(x) - y), \\
I_2 &:= (\sigma(x), \sigma(y) - 1, (y - 1)z - 1, (x - 1)w - 1).
\end{aligned}
$$

Пример

Рассмотрим систему разностных уравнений, заданную любыми образующими идеала $I := I_1 \cap I_2$ в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x, \sigma(x), y, \sigma(y), z, w]$, где

$$\begin{aligned} I_1 &:= (\sigma(y)z - 1, x, \sigma(x) - y), \\ I_2 &:= (\sigma(x), \sigma(y) - 1, (y-1)z - 1, (x-1)w - 1). \end{aligned}$$

Вычисление показывает, что

$$1 \in \left(I, \sigma(I), \sigma^2(I), \sigma^3(I), \sigma^4(I)\right).$$

То есть система является несовместной.

Пример

Рассмотрим систему разностных уравнений, заданную любыми образующими идеала $I := I_1 \cap I_2$ в кольце многочленов $\mathbb{Q}[x, \sigma(x), y, \sigma(y), z, w]$, где

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= (\sigma(y)z - 1, x, \sigma(x) - y),\\
I_2 &:= (\sigma(x), \sigma(y) - 1, (y-1)z - 1, (x-1)w - 1).
\end{aligned}
$$

Вычисление показывает, что

$$1 \in \left(I, \sigma(I), \sigma^2(I), \sigma^3(I), \sigma^4(I)\right).$$

То есть система является несовместной. С другой стороны

$$I = (I, \sigma(I)) \cap \mathbb{Q}[x, \sigma(x), y, \sigma(y), z, w]$$

то есть не только не уменьшается размерность, но даже не увеличивается идеал.

Спасибо за внимание. Мероприятия по теме доклада

Спасибо за внимание!

Спасибо за внимание. Мероприятия по теме доклада

Спасибо за внимание!

Конференция ISSAC 2018, 16-19 июля, CUNY Graduate Center
`http://www.issac-conference.org/2018/`

Спасибо за внимание. Мероприятия по теме доклада

Спасибо за внимание!

Конференция **ISSAC 2018**, 16-19 июля, CUNY Graduate Center
`http://www.issac-conference.org/2018/`

Темы из доклада затрагиваются в **CUNY Graduate Center**:

- **Колчинский семинар** (по пятница с 10:15 по времени Нью-Йорка, начиная с февраля) и
- **Семинар символьно-численных вычислений** (по некоторым четвергам с 15:00 по времени Нью-Йорка, начиная с марта)

Заседания наших семинаров можно смотреть на расстоянии:

- видео в реальном времени: `http://videostreaming.gc.cuny.edu/`
- и также в записи **Kolchin Seminar in Differential Algebra** канал в **YouTube**!