

# Совместность систем полиномиальных уравнений с частными производными

Р. Густавсон, М.В. Кондратьева и А.И. Овчинников

# Задача совместности

Пусть дана система полиномиальных уравнений с частными производными, например:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 0 \end{cases}$$

Вопрос: Есть ли у нее решения?

(Ищутся решения в расширениях поля коэффициентов уравнения)

# Задача совместности

Пусть дана система полиномиальных уравнений с частными производными, например:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 0 \end{cases}$$

Вопрос: Есть ли у нее решения?

(Ищутся решения в расширениях поля коэффициентов уравнения)

Ответ: ДА

# Задача совместности

Пусть дана система полиномиальных уравнений с частными производными, например:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 1 \end{cases}$$

Вопрос: Есть ли у нее решения?

(Ищутся решения в расширениях поля коэффициентов уравнения)

# Задача совместности

Пусть дана система полиномиальных уравнений с частными производными, например:

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 1 \end{cases}$$

Вопрос: Есть ли у нее решения?

(Ищутся решения в расширениях поля коэффициентов уравнения)

Ответ: НЕТ

$$u_{xx} + v_{yx} = 0 \quad \text{и} \quad u_{yy} - v_{yx} = u_{yy} - v_{xy} = 0.$$

# Полиномиальная система

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = 0 \\ z_3 - z_4 = 0 \\ (z_5 + z_6)^2 + (z_7 + z_8)^2 = 0 \end{array} \right.$$

Дифф. система совместна

$\implies$

Полином. система совместна

# Полиномиальная система

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 1 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = 0 \\ z_3 - z_4 = 0 \\ (z_5 + z_6)^2 + (z_7 + z_8)^2 = 1 \end{array} \right.$$

Несовместная система

Совместная система

Обратное не всегда верно.

# Эффективная теорема о нулях

Многие над этим работали в XX-м веке.

Точные оценки появились в 1980-х. Из результатов Коллара 1988 года следует:

$$f_i \in K[x_1, \dots, x_n], \quad \deg(f_i) \leq d, \quad 1 \leq i \leq r$$

и

$$1 \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

влечет существование

$$g_i \in K[x_1, \dots, x_n], \quad \deg(g_i) \leq d^n, \quad 1 \leq i \leq r,$$

таких что

$$1 = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r.$$



# Дифференциальная теорема о нулях

Обозначение  $F^{(\leq k)}$

множество производных элементов  $F$  порядка  $\leq k$

Теорема Система уравнений с частными производными

$F = 0$  не имеет решений



$\exists k \geq 0$  такое, что  $1 \in \langle F^{(\leq k)} \rangle$ .

Пример

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_y - v_x = 0 \\ (u_{xx} + u_{yy})^2 + (v_{xx} + v_{yy})^2 = 1 \end{cases} \quad k = 1$$

# Задача

Даны неотрицательные целые числа  $m, n, h, d$ .

Найти  $k(m, n, h, d)$ , такое что:

Система уравнений с частными производными  $F = 0$

от  $m$  независимых переменных,

$n$  зависимых переменных,

порядка  $h$

и степени  $d$

не имеет решений



$$1 \in \left\langle F(\leq k(m, n, h, d)) \right\rangle$$

# Известные результаты (начало)

[Зайденберг, 1956] Предложил получить оценку путем анализа алгоритма дифференциальных исключений.

[Григорьев, 1989] Трижды экспоненциальная оценка в случае одного дифференцирования.

[Голубицкий-Кондратьева-Овчинников-Занто, 2009]:

$$k(m, n, h, d) \leq A(m + 8, \max(n, h, d)).$$

Здесь  $A(m, n)$  – функция Аккермана.

# Функция Аккермана

## Определение

$$A(0, n) = n + 1$$

$$A(m + 1, 0) = A(m, 1)$$

$$A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n)).$$

Некоторые значения [Википедия]:

	0	1	2	3	4	$n$
0	1	2	3	4	5	$n + 1$
1	2	3	4	5	6	$n + 2$
2	3	5	7	9	11	$2n + 3$
3	5	13	29	61	125	$2^{n+3} - 3$
4	13	65533	$2^{65536} - 3$	$2^{2^{65536}} - 3$	$A(3, A(4, 3))$	$\underbrace{2^{\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}_{n+3} - 3$
5	65533	$\underbrace{2^{\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}_{65536} - 3$	$A(4, A(5, 1))$	$A(4, A(5, 2))$	$A(4, A(5, 3))$	$A(4, A(5, n - 1))$
$m$						

# Оценки снизу

Некоторые известные примеры,  $m = 1$ :

1.  $k(1, 1, 1, d) \geq d$ :

$$\begin{cases} y^d = 0, \\ y' - 1 = 0. \end{cases}$$

2.  $k(1, n, 1, d) \geq d^n$ :

$$\begin{cases} y_1^d = 0, \\ y_1 - y_2^d = 0, \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_n^d = 0, \\ 1 - y_n' = 0. \end{cases}$$

3. Линейный случай ( $d = 1$ ),  $h^{2^{O(m)}}$  (Садик, через оценки для базисов Гребнера Майера–Мейра).

# Новые результаты

Пусть  $m=1$  и дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты.

Д'Альфонсо-Херонимо-Солерно (J. Complexity, 2014):

$$k(1, n, h, d) \leq (2hd)^{2^{C(nh)^3}},$$

где  $C$  – константа.

Пока неизвестно, является ли эта оценка строгой.

# Новый метод

Если  $m = 1$  (обыкновенные уравнения),  $F = 0$  первого порядка ( $F \subset K[y_1, \dots, y_n, \partial y_1, \dots, \partial y_n]$ ) несовместная система, тогда радикальный идеал

$$\sqrt{\langle f, \partial f \mid f \in \sqrt{\langle F \rangle} \rangle} \cap K[y_1, \dots, y_n, \partial y_1, \dots, \partial y_n]$$

– меньшей размерности, чем  $\dim \sqrt{\langle F \rangle}$ .

Таким образом, дифференцируем и проектируем до тех пор, пока не достигнем размерности 0. При порядке  $h > 1$  дифференцируем  $h$  раз, чтобы понизить размерность.

# Падение размерности – продолжение

Для частных производных оценка сверху  $V(m, n, h)$  на число операций дифференцирования для понижения размерности (Густавсон-Леон Санчез):

- $m = 2$  (две частные производные),  $2^n h$ , где  $h$  – порядок.
- $n = 1$  (одна неизвестная):
  - если  $m = 3$ ,  $2^{h+2} - 4$ ,
  - если  $m$  – любое,  $A(m, h - 1) - 1$ .
- $n = 2$ :
  - если  $m = 3$ ,  $2^{2^{h+2}-2} - 3$ ,
  - если  $m$  – любое,  $A(m, A(m, h - 1) - 1) - 1$ .
- и так далее.



# Наш результат

Без ограничений на  $m$  (число частных производных), коэффициенты не обязаны быть константами.

Наша оценка для эффективной дифференциальной теоремы Гильберта о нулях:

$$k \leq \begin{cases} (nhd)^{2^{Cn^3h^3}} & m = 1 \\ (nhd)^{2^{Cn^3\alpha(B(m,n,h),m)^3}} & m \geq 2, \end{cases}$$

где  $C$  - константа, а  $B(m, n, h)$  - оценка, полученная ранее, а  $\alpha(x, y) = \binom{x+y}{y}$ .

Замечание. При любом  $m$  оценка - полиномиальная по  $d$ .

Замечание. Дважды экспоненциальная добавка берется из оценки на степени образующих радикала идеала ( $h^3$  – по техническим причинам).