О разностных схемах, задающих (n, n)-соответствия между слоями

Доклад на семинаре «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН

Мих. Дмитр. Малых

ФНМ МГУ

23 сент. 2015 г., версия от 24 сентября 2015 г.

XIX век: решения в степенных рядах

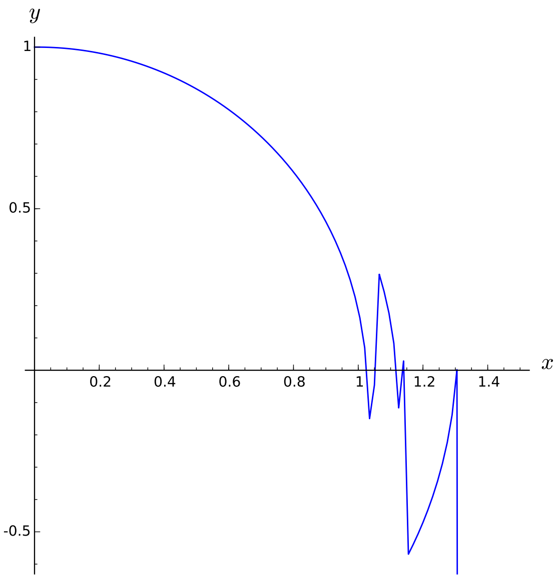
Cauchy, 1842:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \dots$$

Классификация уравнений по особенностям:

Признак	Решение	Тип д.у.
нет особенностей	целая функция	$y' = py + q$; F. Rellich, 1943
$y = \frac{A}{(x-c)^n} + \dots$	отношение целых функций	$y' = py^2 + qy + r$; L. Fuchs, 1860-е г.
$y = \frac{A}{(x-c)^{m/n}} + \dots$	???	$y' = f(x, y)$; Painlevé, 1897

Уравнение y'=-x/y



Соответствие между слоями

Начальная задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

глобально не задает взаимно-однозначного соответствие между начальными и конечными данными как точками двух проективных прямых (слоями).

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Это соответствие — двузначное.

Алгебраические изыскания Пенлеве

Идея: уравнения, общие решения которых зависят от константы алгебраически, наиболее полезны.

Теорема (Painlevé, 1890)

Если общее решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y)$$

зависит от константы алгебраически, то уравнение сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати.

Пример: уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \quad y = (\alpha(x)C + \beta(x))^{-1/(n+1)}$$

Идеи Пенлеве и численные методы

Теорема

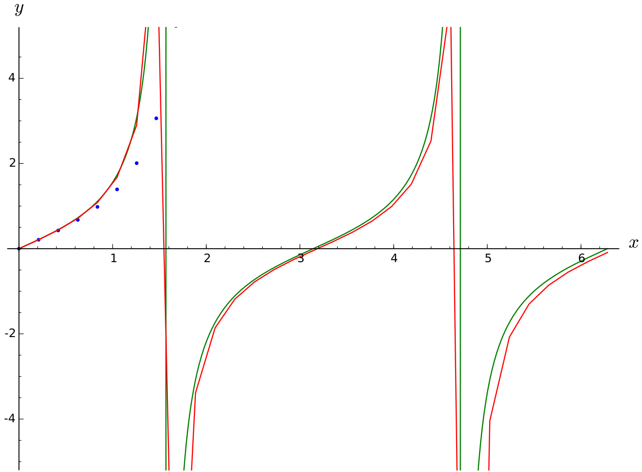
Если общее решение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y)$$

зависит от константы алгебраически, то для него можно составить разностную схему, задающую (n, n)-соответствие между слоями.

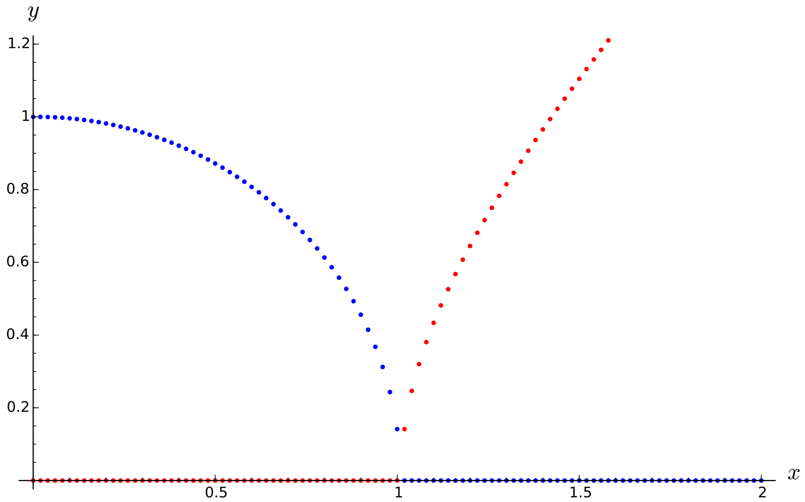
Эти разностные схемы позволяют проходить подвижные особые точки решения без заметного накопления ошибки.

Пример: $y' = 1 + y^2$, (1,1)-схема



Зеленый — точное решение, синий — схема Эйлера.

Пример: $y' = -x/y$, (2,2)-схема



Синий — вещественная часть, красный — мнимая.

Обобщение

Пусть уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

задает (n, n)-значное соответствие между слоями

$$F(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad \text{и} \quad F(x_j, y_j, z_j) = 0.$$

Если кривая

$$F(\overline{x}, y, z) = 0$$

имеет род $p > 1$, то существует лишь конечное автоморфизмов. Поэтому задача отыскания $(1, 1)$-схем является чисто алгебраической.

Группа бирациональных автоморфизмов

Изыскания относительно устройства группа бирациональных автоморфизмов алгебраических кривых рода $p > 1$ были начаты еще во второй половине XIX века, тогда было установлено, что

- эта группа — конечная и ее порядок не превосходит $82(p-1)$ (Hurwitz, 1893),
- порядок каждого автоморфизма не превосходит $2(2p+1)$ (Wiman, 1895).

Примеры:

- квартика $x^3y + y^3 + x = 0$ рода $p = 3$ имеет максимально допустимый порядок $82(p-1)$,
- гипрэллиптическая кривая $y^2 = x(x^{2p+1} - 1)$ имеет автоморфизм максимально возможно порядка.

Прогресс в решении задачи средствами CAS

Задача о вычислении группы бирациональных автоморфизмов заданной алгебраической кривой средствами компьютерной алгебры была поставлена еще в 1990-х годах.

> *However, it is not an easy task to compute the automorphism group of a given algebraic curve. Even compiling a list of possible candidates for a small genus g is quite difficult. In* Magaard *et all., 2003 we provide an algorithm which computes such lists. We give a complete list for $g = 3$ and list «large» groups for $g \leq 10$. This work is based on previous work of Breuer, among many others. — Tanush Shaska, 2003.*

Наша задача

Задача

Задана алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$, $F \in \mathbb{Q}[x, y]$, рода $p > 1$. Требуется описать все элементы группы бирациональных автоморфизмов этой кривой (далее обозначаемой как $\mathrm{Bir}(F)$).

Пакет Algcurves в Maple может вычислить:

- род p заданной кривой,
- базис
$$H_1 dx = Q_1 \frac{dx}{F_y}, \dots, H_p dx = Q_p \frac{dx}{F_y}$$
пространства L дифференциалов, всюду конечных на F.

Hurwitz, 1887

Существует такой мономорфизм

$$0 \to \mathrm{Bir}(F) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Gl}(p, \mathbb{C}),$$

что для любого $T \in \mathrm{Bir}(F)$ верно:

$$\int\limits_{O}^{T(x,y)} H_i(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^{p} \pi_{ij}(T) \int\limits_{O}^{(x,y)} H_j(\xi, \eta) d\xi + \mathrm{Const} \quad (i = 1, \ldots, p),$$

и

$$T \sim \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p), \quad \varepsilon_j = \sqrt{1}.$$

Уравнение Гурвица

Введем два набора $a_1, \dots, a_p$ и $b_1, \dots, b_p$ новых переменных. Переменные

$$z = \frac{b_1 H_1 + \dots + b_p H_p}{a_1 H_1 + \dots + a_p H_p}, \quad s = \frac{(a_1 H_1 + \dots + a_p H_p)dx}{dz}$$

связаны некоторым неприводимым уравнением

$$G(s, z; a_1, \dots, b_p) = 0,$$

которое мы будем называть уравнение Гурвица. Его род всегда больше нуля. Значения параметров, при которых $z =$const., исключим из рассмотрения.

Пример: $x^3y + x^2 + y^2 + 1 = 0$

Род $p = 2$, а базисом пространства дифференциалов 1-го типа служат

$$H_1dx = \frac{dx}{x^3 + 2y}, \quad H_2dx = \frac{xdx}{x^3 + 2y}.$$

Уравнение Гурвица:

$$-z^6s^2a_1^6 + 4z^6s^2a_1^2a_2^4 + 4z^6s^2a_2^6 + 6z^5s^2a_1^5b_1 - 8z^5s^2a_1a_2^4b_1 - 16z^5s^2a_1^2a_2^3b_2 - 24z^5s^2a_2^5b_2 - 15z^4s^2a_1^4b_1^2 + 4z^4s^2a_2^4b_1^2 + 32z^4s^2a_1a_2^3b_1b_2 + 24z^4s^2a_1^2a_2^2b_2^2 + 60z^4s^2a_2^4b_2^2 + 20z^3s^2a_1^3b_1^3 - 16z^3s^2a_2^3b_1^2b_2 - 48z^3s^2a_1a_2^2b_1b_2^2 - 16z^3s^2a_1^2a_2b_2^3 - 80z^3s^2a_2^3b_2^3 - 15z^2s^2a_1^2b_1^4 + 24z^2s^2a_2^2b_1^2b_2^2 + 32z^2s^2a_1a_2b_1b_2^3 + 4z^2s^2a_1^2b_2^4 + 60z^2s^2a_2^2b_2^4 + 6zs^2a_1b_1^5 - 16zs^2a_2b_1^2b_2^3 - 8zs^2a_1b_1b_2^4 - 24zs^2a_2b_2^5 + a_2^4b_1^4 - s^2b_1^6 - 4a_1a_2^3b_1^3b_2 + 6a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2 - 4a_1^3a_2b_1b_2^3 + a_1^4b_2^4 + 4s^2b_1^2b_2^4 + 4s^2b_2^6 = 0$$

Ключ к отысканию автморфизмов

Теорема

Если кривая F допускает автоморфизм $T \sim \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, то параметры $a_1, \dots, b_p$ можно подобрать таким образом, чтобы частное уравнение Гурвица удовлетворяло тождеству

$$G(\gamma s, \alpha z) = \delta G(s, z), \tag{1}$$

где

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2},$$

а δ — произведение некоторых степеней ε_1 и ε_2.

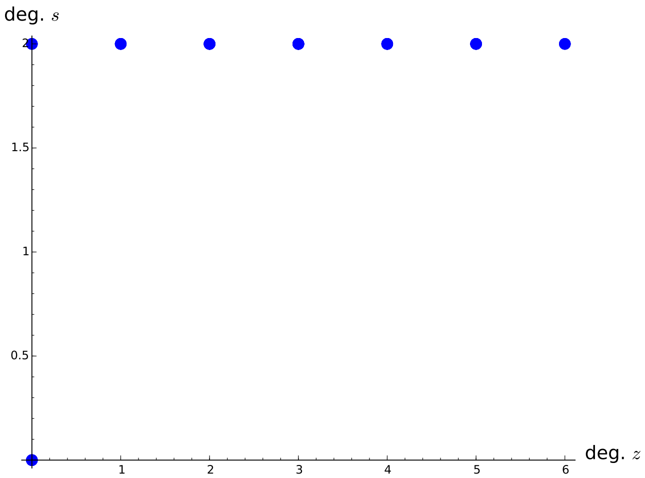
Не огранивая общности рассмотрения, можно принять $a_1 = b_p = 1$.

Алгоритм

Чтобы получить список автоморфизм заданного порядка N заданной кривой $F(x,y)=0$, следует:

1. составить общее уравнение Гурвица $G(s,z;a_1,\dots,b_p)=0$;
2. приравнять коэффициенты при одинаковых степенях s и z в левой и правой частях равенства
$$G(\gamma s,\alpha z)=\delta G(s,z)$$
и получить систему (S) для отыскания параметров;
3. перебрать все возможные комбинации значений $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и δ среди корней N-го порядка и выписать все случаи, когда система (S) совместна,
4. выписать явно преобразования, очистив при необходимости список от ложных срабатываний.

Уравнение Гурвица для кривой $y^2 = x(x^2-1)(x^2-4)$



Автоморфизмы кривой $y^2 = x(x^2-1)(x^2-4)$

Преобразование	Экв. матрица	Порядок
$x' = x,\ y' = y$	$\mathrm{diag}(1,1)$	1
$x' = x,\ y' = -y$	$\mathrm{diag}(-1,-1)$	2
$x' = \frac{2}{x},\ y' = \frac{2\sqrt{2}y}{x^3}$	$\mathrm{diag}(1,-1)$	2
$x' = \frac{2}{x},\ y' = -\frac{2\sqrt{2}y}{x^3}$	$\mathrm{diag}(-1,1)$	2
$x' = -\frac{2}{x},\ y' = \frac{2\sqrt{2}iy}{x^3}$	$\mathrm{diag}(1,-1)$	2
$x' = -\frac{2}{x},\ y' = -\frac{2\sqrt{2}iy}{x^3}$	$\mathrm{diag}(-1,1)$	2
$x' = -x,\ y' = iy$	$\mathrm{diag}(i,i)$	4
$x' = -x,\ y' = -iy$	$\mathrm{diag}(-i,-i)$	4

Затруднения

Составление уравнения Гурвица является весьма ресурсоемким.

- Исключающие идеалы в Sage (при небольших степенях обычно работает).
- Исключающие идеалы в Malple (не работает).
- Результатнты над полем $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, b_p)$ (возникают алгоритмические трудности).

Пример

Для кривой

$$y^3 + x^4 + x^2 = 0.$$

не удается составить общее уравнение Гурвица не удается, а в частных уравнения получаются на удивление большие числовые коэффициенты:

```
sage: A.<x,y,z,s>=PolynomialRing(QQ,4)
sage: F=y^3+x^4+x^2
sage: hurwitz_equation(F,x+2*y,63*x+y).
    coefficient({s:0,z:0}).factor()
13^6 * 1231^6
sage: hurwitz_equation(F,x+2*y,63*x+y).
    coefficient({s:2,z:0}).factor()
-1 * 2 * 5^7 * 43 * 73 * 107 * 1163 * 16381
    * 32003 * 250049
```

Конец