

О разностных схемах, задающих  
 $(n, n)$ -соответствия между слоями

Доклад на семинаре «Компьютерная алгебра» факультета  
ВМК МГУ и ВЦ РАН

Мих. Дмитр. Малых

ФНМ МГУ

23 сент. 2015 г., версия от 24 сентября 2015 г.

## XIX век: решения в степенных рядах

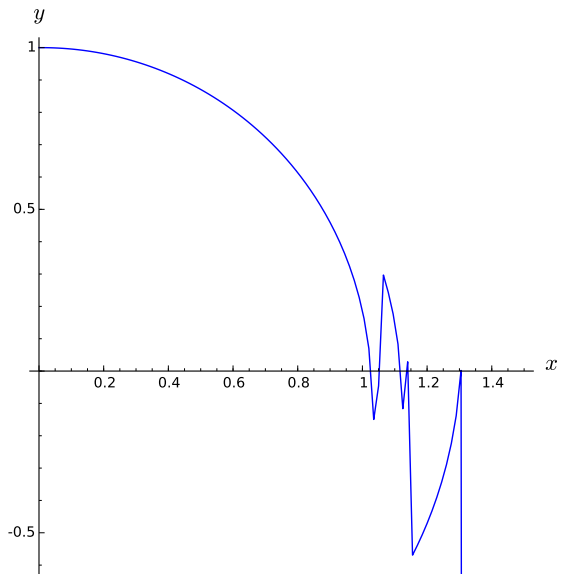
Cauchy, 1842:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \dots$$

Классификация уравнений по особенностям:

Признак	Решение	Тип д.у.
нет особенностей	целая функция	$y' = py + q$ ; F. Rellich, 1943
$y = \frac{A}{(x-c)^n} + \dots$	отношение целых функций	$y' = py^2 + qy + r$ ; L. Fuchs, 1860-е г.
$y = \frac{A}{(x-c)^{m/n}} + \dots$	???	$y' = f(x, y)$ ; Painlevé, 1897

## Уравнение $y' = -x/y$



## Соответствие между слоями

Начальная задача

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

глобально не задает взаимно-однозначного соответствие между начальными и конечными данными как точками двух проективных прямых (слоями).

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Это соответствие — двузначное.

## Алгебраические изыскания Пенлеве

Идея: уравнения, общие решения которых зависят от константы алгебраически, наиболее полезны.

### Теорема (Painlevé, 1890)

*Если общее решение дифференциального уравнения*

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y)$$

*зависит от константы алгебраически, то уравнение сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати.*

Пример: уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \quad y = (\alpha(x)C + \beta(x))^{-1/(n+1)}$$

## Идеи Пенлеве и численные методы

### Теорема

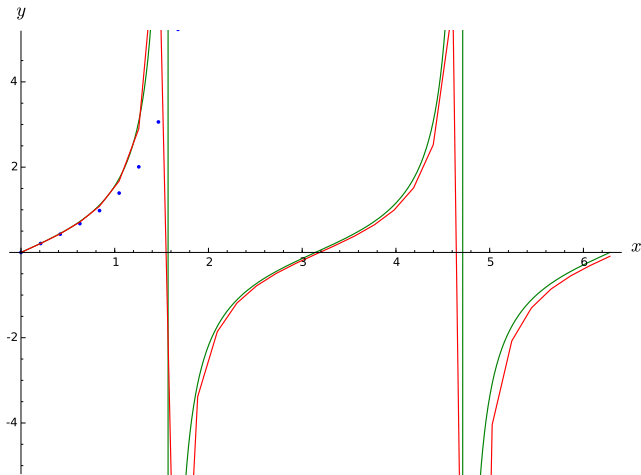
*Если общее решение дифференциального уравнения*

$$y' = f(x, y), \quad f \in \mathbb{C}(x, y)$$

*зависит от константы алгебраически, то для него можно составить разностную схему, задающую  $(n, n)$ -соответствие между слоями.*

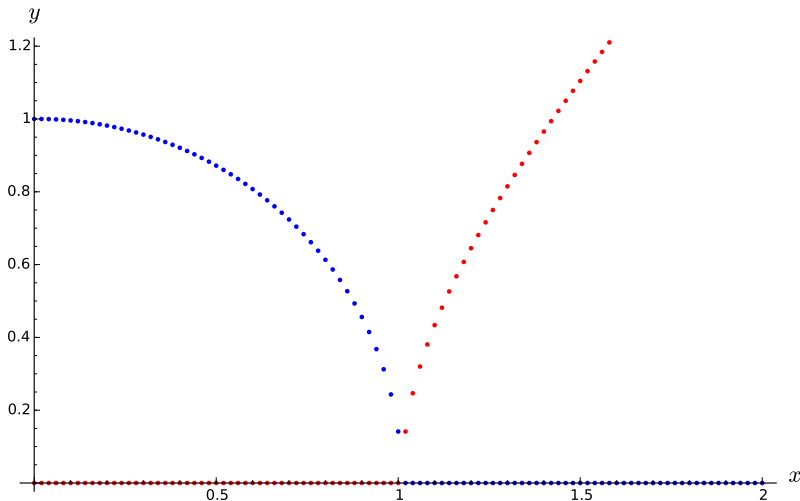
Эти разностные схемы позволяют проходить подвижные особые точки решения без заметного накопления ошибки.

## Пример: $y' = 1 + y^2$ , $(1,1)$ -схема



Зеленый — точное решение, синий — схема Эйлера.

## Пример: $y' = -x/y$ , $(2,2)$ -схема



Синий — вещественная часть, красный — мнимая.



## Обобщение

Пусть уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

задает  $(n, n)$ -значное соответствие между слоями

$$F(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad \text{и} \quad F(x_j, y_j, z_j) = 0.$$

Если кривая

$$F(\bar{x}, y, z) = 0$$

имеет род  $p > 1$ , то существует лишь конечное число автоморфизмов.  
Поэтому задача отыскания  $(1, 1)$ -схем является чисто алгебраической.

## Группа бирациональных автоморфизмов

Изыскания относительно устройства группа бирациональных автоморфизмов алгебраических кривых рода  $p > 1$  были начаты еще во второй половине XIX века, тогда было установлено, что

- эта группа — конечная и ее порядок не превосходит  $82(p - 1)$  (Hurwitz, 1893),
- порядок каждого автоморфизма не превосходит  $2(2p + 1)$  (Wiman, 1895).

Примеры:

- кватрика  $x^3y + y^3 + x = 0$  рода  $p = 3$  имеет максимально допустимый порядок  $82(p - 1)$ ,
- гипрэллиптическая кривая  $y^2 = x(x^{2p+1} - 1)$  имеет автоморфизм максимально возможно порядка.

## Прогресс в решении задачи средствами CAS

Задача о вычислении группы бирациональных автоморфизмов заданной алгебраической кривой средствами компьютерной алгебры была поставлена еще в 1990-х годах.

*However, it is not an easy task to compute the automorphism group of a given algebraic curve. Even compiling a list of possible candidates for a small genus  $g$  is quite difficult. In Magaard et al., 2003 we provide an algorithm which computes such lists. We give a complete list for  $g = 3$  and list «large» groups for  $g \leq 10$ . This work is based on previous work of Breuer, among many others. — Tanush Shaska, 2003.*

## Наша задача

### Задача

Задана алгебраическая кривая  $F(x, y) = 0$ ,  $F \in \mathbb{Q}[x, y]$ , рода  $p > 1$ . Требуется описать все элементы группы бирациональных автоморфизмов этой кривой (далее обозначаемой как  $\text{Bir}(F)$ ).

Пакет `Algcurves` в `Maple` может вычислить:

- род  $p$  заданной кривой,
- базис

$$H_1 dx = Q_1 \frac{dx}{F_y}, \dots, H_p dx = Q_p \frac{dx}{F_y}$$

пространства  $L$  дифференциалов, всюду конечных на  $F$ .

## Hurwitz, 1887

Существует такой мономорфизм

$$0 \rightarrow \text{Bir}(F) \xrightarrow{\pi} \text{Gl}(p, \mathbb{C}),$$

что для любого  $T \in \text{Bir}(F)$  верно:

$$\int_O^{T(x,y)} H_i(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^p \pi_{ij}(T) \int_O^{(x,y)} H_j(\xi, \eta) d\xi + \text{Const} \quad (i = 1, \dots, p),$$

и

$$T \sim \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p), \quad \varepsilon_j = \sqrt{1}.$$

## Уравнение Гурвица

Введем два набора  $a_1, \dots, a_p$  и  $b_1, \dots, b_p$  новых переменных.  
Переменные

$$z = \frac{b_1 H_1 + \dots + b_p H_p}{a_1 H_1 + \dots + a_p H_p}, \quad s = \frac{(a_1 H_1 + \dots + a_p H_p) dx}{dz}$$

связаны некоторым неприводимым уравнением

$$G(s, z; a_1, \dots, b_p) = 0,$$

которое мы будем называть уравнение Гурвица. Его род всегда больше нуля. Значения параметров, при которых  $z = \text{const.}$ , исключим из рассмотрения.

Пример:  $x^3y + x^2 + y^2 + 1 = 0$

Род  $p = 2$ , а базисом пространства дифференциалов 1-го типа служат

$$H_1 dx = \frac{dx}{x^3 + 2y}, \quad H_2 dx = \frac{xdx}{x^3 + 2y}.$$

Уравнение Гурвица:

$$\begin{aligned} & -z^6 s^2 a_1^6 + 4z^6 s^2 a_1^2 a_2^4 + 4z^6 s^2 a_2^6 + 6z^5 s^2 a_1^5 b_1 - 8z^5 s^2 a_1 a_2^4 b_1 - \\ & 16z^5 s^2 a_1^2 a_2^3 b_2 - 24z^5 s^2 a_2^5 b_2 - 15z^4 s^2 a_1^4 b_1^2 + 4z^4 s^2 a_2^4 b_1^2 + \\ & 32z^4 s^2 a_1 a_2^3 b_1 b_2 + 24z^4 s^2 a_1^2 a_2^2 b_2^2 + 60z^4 s^2 a_2^4 b_2^2 + 20z^3 s^2 a_1^3 b_1^3 - \\ & 16z^3 s^2 a_2^3 b_1^2 b_2 - 48z^3 s^2 a_1 a_2^2 b_1 b_2^2 - 16z^3 s^2 a_1^2 a_2 b_2^3 - 80z^3 s^2 a_2^3 b_2^3 - \\ & 15z^2 s^2 a_1^2 b_1^4 + 24z^2 s^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2 + 32z^2 s^2 a_1 a_2 b_1 b_2^3 + 4z^2 s^2 a_1^2 b_2^4 + \\ & 60z^2 s^2 a_2^2 b_2^4 + 6z s^2 a_1 b_1^5 - 16z s^2 a_2 b_1^2 b_2^3 - 8z s^2 a_1 b_1 b_2^4 - 24z s^2 a_2 b_2^5 + \\ & a_2^4 b_1^4 - s^2 b_1^6 - 4a_1 a_2^3 b_1^3 b_2 + 6a_1^2 a_2^2 b_1^2 b_2^2 - 4a_1^3 a_2 b_1 b_2^3 + a_1^4 b_2^4 + \\ & 4s^2 b_1^2 b_2^4 + 4s^2 b_2^6 = 0 \end{aligned}$$

## Ключ к отысканию автоморфизмов

### Теорема

Если кривая  $F$  допускает автоморфизм  $T \sim \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ , то параметры  $a_1, \dots, b_p$  можно подобрать таким образом, чтобы частное уравнение Гурвица удовлетворяло тождеству

$$G(\gamma s, \alpha z) = \delta G(s, z), \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2},$$

а  $\delta$  — произведение некоторых степеней  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Не ограничив общности рассмотрения, можно принять  $a_1 = b_p = 1$ .



## Алгоритм

Чтобы получить список автоморфизм заданного порядка  $N$  заданной кривой  $F(x, y) = 0$ , следует:

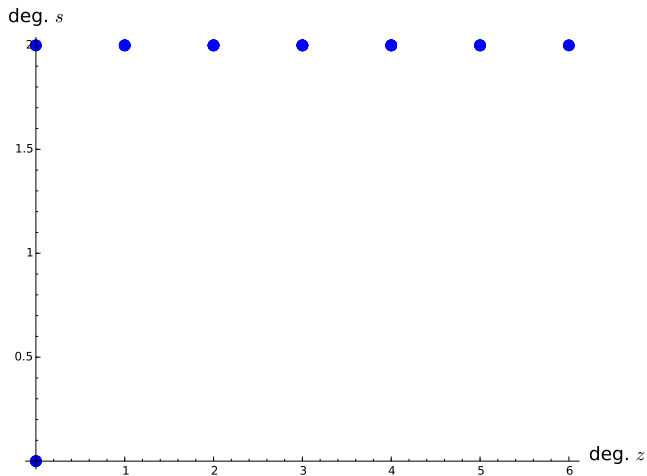
- 1 составить общее уравнение Гурвица  $G(s, z; a_1, \dots, b_p) = 0$ ;
- 2 приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  и  $z$  в левой и правой частях равенства

$$G(\gamma s, \alpha z) = \delta G(s, z)$$

и получить систему (S) для отыскания параметров;

- 3 перебрать все возможные комбинации значений  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\delta$  среди корней  $N$ -го порядка и выписать все случаи, когда система (S) совместна,
- 4 выписать явно преобразования, очистив при необходимости список от ложных срабатываний.

# Уравнение Гурвица для кривой $y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$



# Автоморфизмы кривой $y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

Преобразование	Экв. матрица	Порядок
$x' = x, y' = y$	$\text{diag}(1, 1)$	1
$x' = x, y' = -y$	$\text{diag}(-1, -1)$	2
$x' = \frac{2}{x}, y' = \frac{2\sqrt{2}y}{x^3}$	$\text{diag}(1, -1)$	2
$x' = \frac{2}{x}, y' = -\frac{2\sqrt{2}y}{x^3}$	$\text{diag}(-1, 1)$	2
$x' = -\frac{2}{x}, y' = \frac{2\sqrt{2}iy}{x^3}$	$\text{diag}(1, -1)$	2
$x' = -\frac{2}{x}, y' = -\frac{2\sqrt{2}iy}{x^3}$	$\text{diag}(-1, 1)$	2
$x' = -x, y' = iy$	$\text{diag}(i, i)$	4
$x' = -x, y' = -iy$	$\text{diag}(-i, -i)$	4

## Затруднения

Составление уравнения Гурвица является весьма ресурсоемким.

- Исключающие идеалы в Sage (при небольших степенях обычно работает).
- Исключающие идеалы в Maple (не работает).
- Результаты над полем  $\mathbb{Q}(a_1, \dots, b_p)$  (возникают алгоритмические трудности).

## Пример

Для кривой

$$y^3 + x^4 + x^2 = 0.$$

не удастся составить общее уравнение Гурвица не удастся, а в частных уравнения получаются на удивление большие числовые коэффициенты:

```
sage: A.<x,y,z,s>=PolynomialRing(QQ,4) 1
sage: F=y^3+x^4+x^2 2
sage: hurwitz_equation(F,x+2*y,63*x+y). 3
      coefficient({s:0,z:0}).factor()
13^6 * 1231^6 4
sage: hurwitz_equation(F,x+2*y,63*x+y). 5
      coefficient({s:2,z:0}).factor()
-1 * 2 * 5^7 * 43 * 73 * 107 * 1163 * 16381 6
      * 32003 * 250049
```

# Конец



© 2015 г., Михаил Дмитриевич Малых. Текст доступен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.