Об интегрировании дифференциальных уравнений в абелевых функциях: алгебраические идеи в работах Поля Пенлеве

Доклад на научном семинаре «Компьютерная алгебра»

Мих. Дмитр. Малых

20 ноября 2013 г., версия от 21 ноября 2013 г.

1 Вступление

Разрешимость в конечном виде

Можно ли исследовать разрешимость задачи «в конечном виде», не фиксировав список тех операций, которые разрешается выполнять конечное число раз? – Нет. Напр., задача об удвоении куба не решается при помощи циркуля и линейки (Ванцель, 1837), но решается с помощью невсиса. Если список элементарных функций является предметом договора, то почему все общеупотребимые трансцендентные функции были известны еще во времена Гаусса?

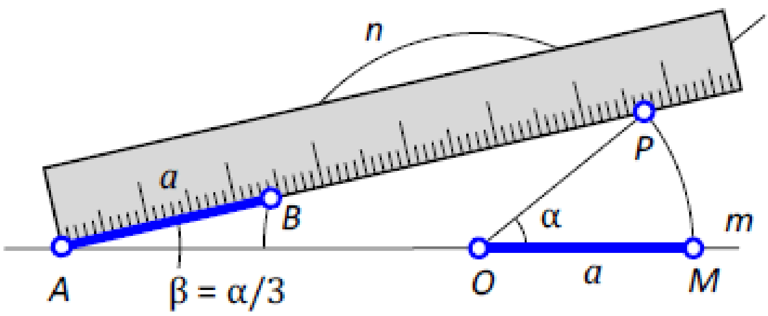


Рис. 1: Решение задачи трисекции угла

Общеупотребимые функции

- элементарные функции: их можно выразить при помощи арифметических операций, а также вычислений exp и ln, причем трансцендента e^t – решение линейного д.у. 1-го порядка [1],[2].
- специальные функции, то есть решения л.д.у. 2-го порядка.
- эллиптические функции и их обобщение – абелевы функции [3], причем, напр., $x = \wp(t)$ – решение нелинейного д.у. 1-го порядка
$$\dot{x}^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Два подхода к выделению класса общеупотребимых функций:

- аналитический: фиксировать свойства решения в малом (Фукс и Пенлеве).
- алгебраический: построить аналог теории Галуа (Лиувилль и Вессио, Ли).

Аналитические идеи в работах Пенлеве

Свойство Пенлеве
Общее решение дифференциального уравнения не имеет подвижных особых точек за исключением, быть может, полюсов.

Общеупотребимые функции можно описать как решения уравнений, обладающих этим свойством, но имеются и уравнения, напр.,
$$\ddot{x} = 6x^2 + t,$$
которые ведут к новым трансцендентам.

Алгебраические идеи в работах Пенлеве

В своих знаменитых Стокгольмских лекциях ([6], 1897)[1] Пенлеве предлагал и другой подход – чисто алгебраический, в рамках которого класс общеупотрибимых функций не расширялся, в чем тогда видели недостаток.

Наблюдение Пенлеве
Зафиксировав *алгебраические* свойства общего решения, можно выделить класс общеупотребимых *трансцендентных* функций.

Эта идея позволяет построить аналог теории Галуа для дифференциальных уравнений, не фиксировав класс допустимых трансцендентных функций.

[1] Для уравнения 1-го порядка см. также: Пенлеве [7], [8] и Форсайт.

2 Задача

Система алгебраических дифференциальных уравнений

Любую систему алгебраических дифференциальных уравнений можно привести к *нормальной форме Вейерштрасса* [9]:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_{n+1}; t), \ldots \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots x_{n+1}; t) \tag{1}$$

где f_i – рациональные функции переменных $x_1, \ldots x_{n+1}$, но сами переменные $x_1, \ldots, x_{n+1}$ связаны алгебраическим уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; t) = 0;$$

при этом коэффициенты функций f_i и многочлена F могут быть какими угодно аналитическими функциями t.

Поле основных функций

Поле функций переменной t, в котором лежат коэффициенты функций $f_1, \ldots, f_{n+1}, F$ будем называть *полем основных функций* и обозначать как K. Напр., для

$$\dot{x} = tx^2 + e^t$$

за таковое можно принять $K = \mathbb{C}(t, e^t)$. Однако в дальнейшем будет удобно считать K алгебраически замкнутым.

Это поле погрузим в поле K', в котором содержаться все «нужные» аналитические функции, в т.ч. решения дифференциального уравнения (1).

В теории Галуа полю K соответствует поле, над которым рассматривается алгебраическое уравнение, а полю K' – то, в котором это уравнение разлагается на линейные множители.

Рациональные интегралы

Рациональным интегралом (1) будем называть всякую отличную от константы функцию R, рациональную на гиперповерхности

$$F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; t) = 0,$$

и постоянную на любом решении этого уравнения:

$$\mathfrak{D}R = 0, \quad \mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Особого смысла рассматривать интегралы, зависящие от x алгебраически, нет, поскольку они выражаются через рациональные интегралы [9].

Интегралы движения, не вводящие новых трансцендент

Наиболее изученным является тот случай, когда коэффициенты интегралов выражаются алгебраически через коэффициенты исходной системы, т.е. лежат в поле K.

Известные результаты:

- Для уравнения первого порядка такой интеграл движения можно отыскать за конечное число шагов (М.Н. Лагутинским, 1912 [10], [11]).
- Любой такой интеграл движения в задаче n тел выражается через 10 классических интегралов (Брунс, 1880-е, Пенлеве [12]).
- Любой такой интеграл движения в задаче о волчке в общем случае выражается через классические интегралы.

Трансценденты, вводимые интегрированием

Если коэффициенты интегралов как аналитические функции t не принадлежат полю основных функций K, то задача интегрирования системы (1) вводит новые трансценденты.

Главный вопрос

Можно ли перечислить все трансценденты, которые могут возникнуть при интегрировании какой-нибудь системы алгебраических дифференциальных уравнений?

Поскольку система (1) имеет не более n независимых интегралов движения, все трансценденты составляют некоторое расширение поля K – *поле трансцендент*, вводимых интегрированием системы (1); оно будет играть роль поля разложения в теории Галуа.

Исторические замечание

Пенлеве в Стокгольмских лекциях в качестве основного объекта исследования принял общие решения дифференциальных уравнений

$$F(\dot{x}, x; t) = 0 \quad \text{и} \quad F(\ddot{x}, \dot{x}, x; t) = 0,$$

зависящие от констант алгебраически. Иными словами он ограничился самым интересным случаем, когда рациональных интегралов достаточно для интегрирования системы.

Переход от решений к интегралам дает не только большую общность, но и существенно упрощает теорию. Идеи док-ва нижеследующих теорем взяты в существенном из Стокгольмских лекций, однако их формулировки отличаются от оригинальных.

3 Осн. теорема

Поле интегралов

Множество всех рациональных интегралов и констант из $\mathbb{C}$ мы будем называть *полем рациональных интегралов* системы (1) и обозначать как I. Если несколько интегралов $R_1, \ldots R_r$ зависимы над K, то есть

$$S(R_1, \ldots R_n; t) = 0,$$

то они зависимы и над $\mathbb{C}$. Отсюда:

Теорема 1. *Поле интегралов I как расширение поля констант $\mathbb{C}$ бирационально эквивалентно полю рациональных функций на некоторой гиперповерхности, размерность которой в точности равна числу независимых рациональных интегралов движения уравнения* (1).

Основная теорема

Теорема 2. *Если интегрирование системы 1 вводит r трансцендент, то поле интегралов допускает r-параметрическую группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов.*

Доказательство. (i) Базис поля трансцендент над K – функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$ – удовлетворяют алгебраической системе дифференциальных уравнений.

(ii) Заменяя функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$ в интеграле $R(x, \alpha)$ на любое другое решение этой системы, опять получим интеграл. Тем самым будет задан автоморфизм поля интегралов. □

Замечания

- Поле трансцендент является нормальным в том смысле, что ему принадлежит вместе с одним решением $\alpha_1(t), \ldots$ алгебраической системы и любое другое решение этой системы. Так получается от того, что коэффициенты любого интеграла движения по определению лежат в поле трансцендент. Теорему можно обобщить на любые нормальные расширения поля основных функций.

- Употребленный метод восходит к знаменитой работе Лиувилля об интегрировании функций в конечном виде [13], а также [1].

Связь с алгебраической геометрией

Следствие 1 (из теорем 1 и 2). *Если интегрирование системы* (1) *вводит r трансцендент, то поле интегралов эквивалентно полю рациональных функций на гиперповерхности, допускающей r-параметрическую группу бирациональных преобразований в себя.*

Это позволяет превратить любое утверждение теории автоморфизмов гиперповерхностей в утверждение об интегралах системы дифференциальных уравнений.

4 Кривые

Алгебраические кривые

Теорема 3. *Всякая плоская алгебраическая кривая может быть представлена как проекция гладкой пространственной кривой.*

При проектировании возникают особые точки:

- узел, когда проектирующий луч проходит через две точки пространственной кривой,
- точка возврата, когда проектирующий луч касается пространственной кривой.

См. spacecurve.x3d.

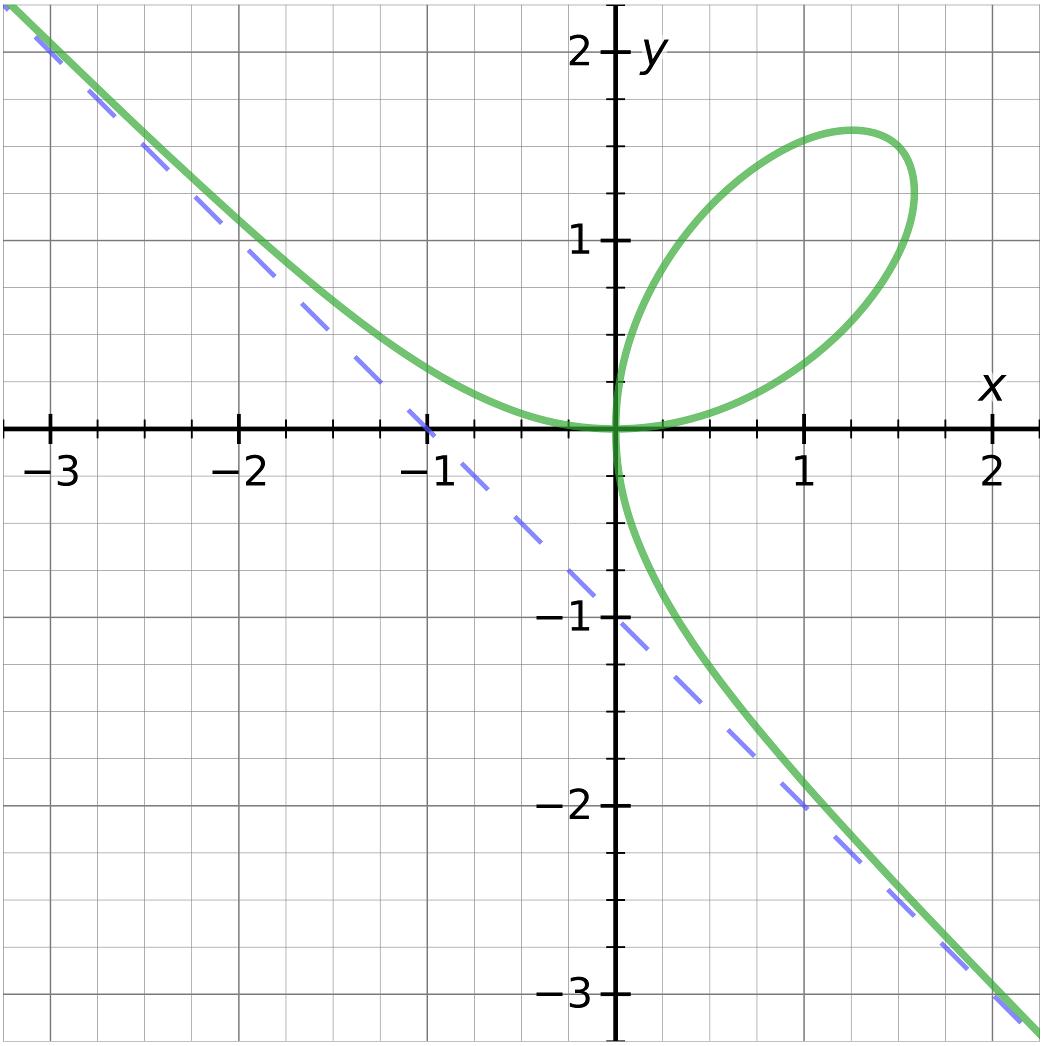
Род кривой

Если между точками двух кривых можно задать вз.-одн. соответствие, выражаемое в обе стороны при помощи рациональных функций координат, то говорят, что эти кривые бирационально эквивалентны.

Порядок n, число узлов δ и число точек возврата χ при бирациональных преобразованиях одной кривой в другую, изменяются. Постоянной остается только комбинация

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - \chi,$$

именуемая *родом* кривой.



См. cubic.kig

Пример: Декартов лист

Кубика с узлом имеет род

$$p = \frac{2 \cdot 1}{2} - 1 = 0$$

и не может быть эквивалентна кубике без узла (род $p = 1$).

Она эквивалентна прямой, поскольку между ее точками и прямыми, выходящими из ее узла, можно установить вз.-одн. соответствие.

Автоморфизмы кривой

Теорема 4 (Шварц, Пикар, 1870-е годы). *Если кривая допускает r-параметрическую группу автоморфизмов, то ее род равен 0 или 1.*

- Кривые рода нуль эквивалентны прямой, группа автоморфизмов – 3-параметрическая группа др.-линейных подстановок:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

- Кривые рода один эквивалентны эллиптическим кривым вида

$$y^2 = P(x), \quad \partial P = 3,\ 4.$$

  Координаты x, y можно представить как эллиптические функции параметра t; сдвиги по t составляют однопараметрическую группу.

Следствия основной теоремы

Из следствия 1 основной теоремы имеем:

Следствие 2. *Если поле интегралов системы* (1) *имеет степень трансцендентности 1, то интегрирование системы вводит не более чем 3 трансцендентны.*

Следствие 3. *Если общее решение уравнения* $F(\dot{x}, x; t) = 0$ *зависит от константы алгебраически, то его можно выразить алгебраически через три частные решения.*

Примеры с родом нуль

- Общее решение однородного линейного уравнения является линейной однородной функцией константы $y = \alpha(t)C$.

- Общее решение неоднородного линейного уравнения является линейной функцией константы $y = \alpha(t)C + \beta(t)$.

- Общее решение уравнения Риккати является дробно-линейной функцией константы

$$y = \frac{\alpha(t)C + \beta(t)}{\gamma(t)C + \delta(t)}.$$

  При этом вводится не более трех трансцендентных функций.

Пример с родом один

$$\dot{x}^2 = P(x) \quad \Rightarrow \quad x = \wp(t + C).$$

Используя теорему сложения можно переписать это равенство

$$x = G(\wp(t), \wp(C))$$

и составить рациональный интеграл с коэффициентами, выражающимися алгебраически через $\wp(t)$. Поэтому интегрирование этого уравнения вводит одну эллиптическую функцию. Равенство

$$\sqrt{P(x)} = \wp'(t + C)$$

позволяет указать еще один рациональный интеграл. Значит, в этом случае поле интегралов эквивалентно полю рациональных функций на эллиптической кривой.

5 Жанр $p > 0$

Жанр поля

С ростом размерности многообразия растет и число независимых инвариантов бирациональных преобразований, но для нас вместо классических инвариантов достаточно использовать объект, отсылающий обратно к теории кривых.

Определение

Жанром поля K относительно его подполя k назовем такое неотрицательное целое число p, если можно указать пару R_1 и R_2 элементов поля K, связанную неприводимым уравнением рода p:

$$g(R_1, R_2) = 0, \quad (g \in k[\xi, \eta]),$$

но нельзя указать пару, связанную уравнением, род которого больше p.

Жанр совпадает с родом для полей рациональных функций на кривой.

Жанр поля рациональных функций на поверхности

Семейство кривых на поверхности $S(x, y, z) = 0$ называется *пучком*, если через произвольную точку поверхности проходит в точности одна кривая семейства. Линии уровня рациональной функции $R(x, y, z) = u$ удовлетворяют этому условию; образованный из них пучок называют *линейным*.

Теорема 5. *Если жанр поля рациональных функций на поверхности равен нулю, то всякий пучок на этой поверхности является линейным.*

Напр., на плоскости всякий пучок является линейным.

Абелевы интегралы

Многозначную функцию на многообразии называют *абелевым интегралом*, если ее дифференциал является рациональной функцией. Для кривой абелев интеграл – это просто интеграл от алгебраической функции, на поверхности – интеграл от точной 1-формы, коэффициентами которой – рациональные функции.

Напр., на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

абелевым интегралом будет

$$\ln \frac{x+y}{z}.$$

Две теоремы о роде кривой

Вейерштрасс (1875, [14]) выразил всю теорию абелевых интегралов в двух теоремах:

Теорема 6 (о главной функции)**.** *Для кривой рода p можно указать рациональную функцию, обращающуюся в ∞^1 в $(p+1)$-ой подвижной точке, но нельзя указать функцию, имеющую меньшее число полюсов.*

Эту функцию называют главной. Рассматривая вычеты этой функции в p полюсах как функции $(p+1)$-го полюса, получим двойственное утверждение:

Теорема 7 (о голоморфных интегралах)**.** *Род кривой равен числу линейно независимых голоморфных абелевых интегралов.*

Пример

Эллиптическая кривая $y^2 = P(x)$ имеет один голоморфный абелев интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

В нулях полинома этот интеграл имеет интегрируемую особенность и, следовательно, являются голоморфной функцией локальной переменной. В б.-удаленной точке этот интеграл конечен, поскольку полином растет быстрее первой степени x.

При автоморфизмах голоморфные интегралы переходят в голоморфные интегралы, на этом основано доказательство теоремы Шварца-Пикара.

Нерациональные интегралы движения

Пусть два интеграла движения системы (1) связаны уравнением рода $p > 0$

$$g(R_1, R_2) = 0, \quad (g \in \mathbb{C}[\xi, \eta]),$$

Обозначим один из интегралов первого рода на кривой $g(\xi, \eta) = 0$ как

$$\int H(\xi\eta) d\xi.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{(R_1(x;t), R_2(x;t))} H(\xi\eta) d\xi$$

является *нерациональным* интегралом движения, обладающим рядом весьма специфических свойств.

Абелевы интегралы движения

Нерациональные интеграл движения будем называть абелевым, если:

- Производные этого интеграла по $x_1, x_2, \ldots$ и t являются рациональными функциями на F.
- Как бы ни менялась точка x на F, этот интеграл остается конечным.
- Когда точка x описывает замкнутый контур, этот интеграл меняется на величину (период), не зависящую от t.

Теорема 8. *Если жанр p поля интегралов над $\mathbb{C}$ больше нуля, то система допускает p независимых абелевых интеграла движения.*

Эти интегралы отыскать за конечное число действий.

Линейное пространство $\mathfrak{L}$

Для заданной гиперповерхности $F(x; t) = 0$ можно чисто алгебраическим путем построить множество $\mathfrak{L}$ точных линейных 1-форм

$$P_1(x;t)dx_1 + \cdots + P_n(x;t)dx_n + P_0(x;t)dt$$

обладающих след. свойствами:

- P_i являются рациональными функциями на гиперповерхности F с коэффициентами из K'.

- Как бы ни менялась точка x на гиперповерхности F интеграл от этой формы остается конечным.

- Когда точка x замкнутый контур, этот интеграл меняется на величину (период), не зависящую от t.

Это пространство является конечномерным линейным пространством над полем $\mathbb{C}$, а коэффициенты P_i лежат в K.

Построение $\mathfrak{L}$ для поверхности $S(x,y,z)=0$-1

Шаг 1. Сужение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

на сечение $y=$const даст голоморфный интеграл. Базис

$$\{H_1(x,y), \dots H_q(x,y)\}$$

линейного пространства голоморфных интегралов на сечении можно построить за конечное число действий[2], тогда

$$P(x,y) = \lambda_1(y)H_1(x,y) + \dots + \lambda_q(y)H_q(x,y)dx,$$

где $\lambda_i(y)$ подлежат определению.

Построение $\mathfrak{L}$ для поверхности $S(x,y,z)=0$-2

Шаг 2. Форма

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

является точной, поэтому

$$Q(x,y) = \int \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)dx = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx,$$

где интеграл считается по любому пути на сечение $y=$const. Периоды этого интеграла не зависят от y, поэтому он берется в алгебраических функциях.

Условия, при которых интеграл от алгебраических функции берется в алгебраических функциях, были предметом изысканий Чебышева и Пташицкого, расчетные формулы имеются у Вейерштрасса [14]. Эти формулы дают более $2q$ линейных уравнений, связывающих λ_i и их первые производные. Решениями этой системы будут алгебраические функции y.

[2] В Maple этот алгоритм реализован.

Решение в квадратурах

Теорема 9. *Если жанр p поле интегралов больше нуля, то в линейном пространстве $\mathfrak{L}$ имеется подпространство размерности p, образованное абелевыми интегралами движения системы.*

Взяв базис $\mathfrak{L}$ мы можем отыскать коэффициенты в $\mathbb{C}$ для интегралов, решив алгебраические уравнения. Новых трансцендентных функций t здесь получить нельзя. Таким путем получаются p интегралов движения вида

$$\int P_{1i}(x;t)dx_1 + \cdots + P_{ni}(x;t)dx_n = \int A_i(t)dt, \tag{2}$$

где $A_i(t)$ – функция из K и $i = 1, \ldots, p$.

Решение в абелевых функциях

Мероморфную $2p$-периодическую функцию p переменных $u_1, \ldots u_p$ будем называть абелевой функцией.

Теорема 10. *Если жанр p поле интегралов больше нуля, то исходная система допускает p рациональных интегралов движения, коэффициенты которых выражаются алгебраически через p абелевых функций вида*

$$\mathrm{Al}\left(\int A_1(t)dt, \ldots, \int A_p(t)dt\right).$$

Пример: гироскоп

Движение твердого тела с одной закрепленной точкой удается проинтегрировать в двух частных случаях:

- Случай Лагранжа-Пуассона: $J_x = J_z$ и $x_0 = y_0 = 0$. Неизвестные функции выражаются через t при помощи эллиптических функций.
- Случай С.В. Ковалевской: $J_x = J_y = 2J_z$ и $y_0 = z_0 = 0$. Неизвестные функции даются как $\mathrm{Al}(C_1, t + C_2)$.

Обращение абелева интеграла

При $\partial P < 5$ интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = u$$

берется: x можно выразить как мероморфную периодическую функцию u. При $\partial P = 2$ эта функция имеет один период, при $\partial P = 3, 4$ – два

Гироскоп Бонненбергера (Bohnenberger, Tübinger Stadtmuseum, XVIII c.)

комплексных периода. В 1833 г. Якоби обнаружил, что при $\partial P > 4$ этот интеграл имеет слишком много периодов и поэтому x нельзя выразить через u при помощи мероморфных функций.

Задача Якоби

Якоби «подправил» задачу [3]: если имеется p уравнений

$$\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{(a,b)}^{(\xi_j,\eta_j)} H_i(\xi\eta)d\xi = u_i \quad (i = 1, \ldots, p),$$

то $\xi_1, \ldots \xi_p$ можно найти как корни алгебраического уравнения p-ой степени, коэффициенты которого являются мероморфными $2p$-периодическими функциями $u_1, \ldots, u_p$. Эти функции получили название абелевых функций.

Доказательство мероморфности основано на теореме сложения и не требует исследования свойств матрицы периодов, что составляет главную трудность в теории *абстрактных* абелевых функций.

Вычисление квадратур

Поскольку периоды квадратур (2) совпадают с периодами интегралов

$$\int H_i(\xi\eta)d\xi$$

на жанровой кривой G, функции

$$\mathrm{Al}_i(\int P_{11}(x;t)dx_1 + \cdots + P_{n1}(x;t)dx_n, \ldots) = R_i(x;t) \quad (i = 1, \ldots, p)$$

являются однозначными функциями x на F. Они не могут иметь существенных особенностей, поскольку интегралы никогда не становятся бесконечно большими, где абелевы функции имеют существенную особенность. Поэтому эти функции являются рациональными функциями x, а соотношения

$$\mathrm{Al}_i(\int A_1(t)dt + C_1, \ldots) = R_i(x;t) \quad (i = 1, \ldots, p)$$

вкупе с теоремой сложения ведут к док-ву теоремы 10.

6 Жанр $p = 0$

Случай нулевого жанра

Если род кривой равен нулю, то имеется рациональная функция, имеющая один простой полюс; эта функция задает бирациональное отображение кривой на прямую.

Теорема 11. *Если жанр поля интегралов равен нулю, то для любых двух зависимых интегралов можно указать третий, через который они выражаются рационально.*

Случай: жанр = 0, ст. тр. = 1

Если степень трансцендентности поля интегралов равна 1, то все интегралы выражаются рационально через один $R(x;t)$ и при автоморфизмах поля интегралов этот элемент испытывает дробно-линейные подстановки.

Теорема 12. *Если система допускает лишь один рациональный интеграл, а все прочие через него выражаются, и не допускает абелева интеграла, то ее интегрирование вводит не более 3-х трансцендент – решений уравнения Риккати.*

Уравнение 1-го порядка

Теорема 13 (Пенлеве, 1890 г.[7])**.** *Если общее решение алгебраического дифференциального уравнения*

$$\dot{x} = f(x;t) \quad (f \in K(x))$$

зависит от константы алгебраически, то его можно алгебраической заменой свести к уравнению Риккати.

Напр., уравнение Бернулли

$$\dot{x} + a(t)x = b(t)x^n$$

заменой $x = \sqrt[1-n]{y}$ сводится к линейному.

Случай: жанр = 0, ст. тр. = 2

Если жанр поля рациональных функций на поверхности S равен нулю, то

- в силу теоремы 5 всякий пучок на поверхности S является линейным,

- по теореме Кастельнуово-Энрикеса-Севери на поверхности отсутствуют голоморфные 1-формы,

- система (1) не имеет абелевых интегралов движения:

$$\int P(x;t)dx_1 + Q(x;t)dx_2 = \int A(t)dt.$$

Эти интегралы не ассоциированы с алгебраической кривой и их обращение, вообще говоря, не сводится к классической задаче Якоби. У Пенлеве такие интегралы появлялись при рассмотрении общих решений уравнения 2-го порядка, наша теория от них избавлена.

Сведение к геометрическая задача

Задача классификации всех трансцендент сводится к классификации групп автоморфизмов многообразий, обладающих двумя свойствами:

- оно допускает r-параметрическую группу бирациональных автоморфизмов,

- всякий пучок подмногообразий является линейным.

Для поверхностей эта задача решена Энрикесом, а трансценденты, вводимые интегрированием, обязательно оказываются решениями системы линейных дифференциальных уравнений.

7 Итоги

Итоги

- Теория разрешимости уравнений $\dot{x} = g(x;t)$ в интегралах движения, алгебраически зависящих от x, подобна теории Галуа, только вместо групп перестановок n элементов используются непрерывные группы автоморфизмов многообразий.

- Если жанр этого многообразия больше нуля, то коэффициенты интегралов выражаются алгебраически через абелевы функции вида $\mathrm{Al}(\int A_1(t), \dots)$, а сами интегралы движения можно отыскать за конечное число шагов.

- Если жанр многообразия равен нулю, то по крайней мере при малых размерностях коэффициенты являются решениями системы *линейных* дифференциальных уравнений. Дальнейшее изучение этого случая требует решения чисто геометрической задачи.

Комментарий

Изложенная теория не исключает возможности других подходов к интегрированию дифференциальных уравнений. Но только если система имеет n рациональных интегралов в нашем смысле, ее общее решение зависит от констант интегрирования алгебраически, поэтому

- начальные и краевые задачи сводятся к алгебраическим задачам,
- для вычисления решения нужно составить таблицу значений нескольких трансцендентных функций t, а не общего решения как функции двух переменных t, C; нет проблем с интерполяцией функции двух переменных.

Будет ли прок от интеграла движения, зависящего от x непрерывным образом?

Дополнение: Автоморфизмы поверхностей

Согласно Энрикесу (1905 г., 3-c-6b, no. 39), поверхности, допускающие бесконечное число автоморфизмов, бирационально эквивалентны след.:

- плоскость (группа всех ее автоморфизмов названа в честь Кремоны)
- абелевы многообразия размерности 2
- эллиптические поверхности, т.е. поверхности, координаты которых можно выразить рационально через параметр u и пару эллиптических функций $\wp(v)$, $\wp'(v)$ параметра v.
- линейчатые поверхности

Дополнение: Автоморфизмы плоскости

Автоморфизмы плоскости удивительно богаты; согласно Энрикесу (1893 г., 3-c-11, no. 64), подгруппы группы Кремоны, зависящие от конечного числа параметров, суть

- 8-параметрическая группа группа проективных преобразований плоскости (коллинеаций)
- 6-параметрическая группа квадратичных преобразований, переставляющая коники линейной системы кривых второго порядка, имеющих две различные базовые точки

- $(n+5)$-параметрическая группа преобразований Жонкьера произвольного порядка n, переставляющие элементы пучка прямых и линейной ∞^{n+1}-системы кривых n-го порядка с базовой точкой кратности $(n-1)$ в центре пучка прямых и $(n-1)$-ой неподвижной касательной в этой точке.

Список литературы

[1] *Ritt J.F.* Integration in Finite Terms. N.-Y., 1949

[2] *Хованский А. Г.* Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: Изд-во МЦНМО, 2008.

[3] *Маркушевич А.И.* Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979.

[4] *Кудряшов Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[5] *Соболевский С.Л.* Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 2006

[6] *Painlevé P.* Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. Paris, 1897 = Œuvres. T. 1. Paris, 1971

[7] *Painlevé P.* Memoire sur les equations differentielles du primier ordre // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. Pag. 237-461.

[8] *Painlevé P.* Приложение к книге P. Boutroux // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. P. 767-813

[9] *Koenigsberger L.* Lerbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhägigen Variabeln. Leipzig: Tuebner, 1889.

[10] *Лагутинский М.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальных алгебраических уравнений // Записки Имп. Харьковского университета. 1912 г.

[11] *Maciejewski A.J., Strelcyn J.-M.* On the algebraic non-integrability of the Halphen system // Препринт `http://ru.arxiv.org/abs/solv-int/9505002v1`, 2007 г.

[12] *Painlevé P.* // Bull. astr., t. 15, p. 81-113 = Œuvres. T. 3. Paris, 1974. P. 666-698.

[13] *Liouville J.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes // J. Reine Angew. Math. Bd. 13, p. 93-118. (1835)

[14] *Weierstrass K.* Math. Werke. Bd. 4. Berlin, 1902. Первые две части в моем пересказе доступны на malykhmd.narod.ru.

[15] *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* Трансцендентные функции, вводимые интегрированием дифференциальных уравнений // Динамика сложных систем — XXI век. №3 за 2010 г.

Конец