Обобщённые сепаранты и смешанные идеалы

Лимонов Максим

Московский государственный университет им. Ломоносова

Механико-математический факультет

WWW

Титул

Содерж.

С. 1 из 19

Назад

Размер

Закрыть

Выход

Обозначения

- Пусть $K\{y\} = K[y_0, y_1, y_2, \dots]$ кольцо многочленов от счётного числа переменных.
- На нём определено дифференцирование δ, т.е. линейный оператор $\delta : K\{y\} \to K\{y\}$ такой, что

$$\begin{cases} \delta(y_i) = y_{i+1} \\ \delta(a) = 0, \ \forall a \in K \\ \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g) \ \forall f, g \in K\{y\} \end{cases}$$

- Следующим образом $(G), [G], \{G\}$ мы будем обозначать, соответственно, алгебраический, дифференциальный, радикальный идеал, порождённые множеством G в кольце $K\{y\}$.

1. Введение

Пусть $I \subseteq \mathbb{K}\{y\}$ дифференциальный идеал и $\sqrt{I}$ его радикал. Экспонентой идеала I называется минимальное натуральное число m такое, что

$$(\sqrt{I})^m \subseteq I.$$

В 1941 году Колчин опубликовал свою работу «On the Exponents of Differential Ideals», в которой искал ответ на вопрос: «Чему может быть равна экспонента дифференциального идеала, который порождён одним многочленом $I = [f]$?»

Примеры

- Если идеал I радикальный, тогда экспонента $[f]$ равна 1.
- Если $f = (y_0 - a_1)^{b_1} \dots (y_0 - a_n)^{b_n}$ и существует $b_i > 1$, тогда экспонента идеала $[f]$ равна ∞.
- Если $f = y_1^2 - 2yy_1 + y$, тогда экспонента $[f]$ равна 2.

WWW
Титул
Содерж.
С. 3 из 19
Назад
Размер
Закрыть
Выход

Результаты Колчина

Колчин рассматривал только многочлены $f \in K\{y\}$ порядка 1 и разделил их на два класса: $[f, S_f] \neq (1)$ и $[f, S_f] = (1)$.

- если $[f, S_f] \neq (1)$ и существует сингулярное решение кратности больше 1, тогда экспонента $[f]$ равна ∞
- если $[f, S_f] \neq (1)$ и все сингулярные решения кратности 1 (с некоторыми условиями), тогда экспонента $[f]$ равняется 1 или 2.
- если $[f, S_f] = (1)$ и $[f] + (S_f) = (1)$, тогда экспонента $[f]$ равна 1.

Лемма Трушина

Если $[f, S_f] = (1)$, тогда: идеал $[f]$ содержит квазилинейный многочлен $\Leftrightarrow [f] + (S_f) = (1)$.

Основная задача

Пусть $f \in K\{y\}, \operatorname{ord} f = l$ дифференциальный многочлен с условием $[f, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_l}] = (1)$ и пусть $I = [f] \triangleleft K\{y\}$ дифференциальный идеал. Наша главная цель алгоритмически определить равен ли

$$I + (h_1, \dots, h_t) = (1) \tag{1.1}$$

или не равен.

2. Теорема Гильберта о нулях для бесконечномерного пространства

Пусть $A = \{\alpha\}$ индексирующее множество и I идеал в кольце многочленов $F[x_\alpha]$, $|F| > |A|$.

Множество нулей идеала I — это множество $(\varepsilon_\alpha) \in F^\alpha$ элементов из $\varepsilon_\alpha \in F$ таких, что $f(\varepsilon_\alpha) = 0$ для любого $f \in I$.

Theorem 2.1 (Теорема Гильберта о нулях для бесконечномерного пространства) Пусть F алгебраически замкнутое поле, тогда идеал $I \lhd F[x_\alpha] = (1)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{V}(I) = \emptyset$.

$$[f] + (h_1, \ldots, h_t) = (1) \Leftrightarrow h_1 = \ldots = h_t = f = \ldots = f^{(n)} = \ldots = 0. \tag{2.1}$$

Примеры

1. $f=(y_1+1)^2+y_0, h_1=S_f=y_1+1 \Longrightarrow (f,f^{(1)},S_f)=(1)$;
2. $f=(y_1+1)^2+y_0^3, S_f=y_1+1 \Longrightarrow (f,f^{(1)},f^{(2)},f^{(3)},S_f)=(1)$;
3. $f=(y_1+1)^7+y_0^6, S_f=(y_1+1)^6 \Longrightarrow (f,f^{(1)},f^{(2)},f^{(3)},f^{(4)},f^{(5)},f^{(6)},S_f)=(1)$;
4. $f=(y_1+1)^3+y_0^6, S_f=(y_1+1)^2 \Longrightarrow (f,f^{(1)},f^{(2)},f^{(3)},f^{(4)},f^{(5)},f^{(6)},S_f)\neq(1)$

$$[f]+(S_f)\neq(1)?$$

3. Продление решения

Пусть $G = \{h_1, \ldots, h_m, \ldots\} \subset K\{y\}$ счётный набор многочленов. Рассмотрим первые i многочленов $G' = \{h_1, \ldots, h_i\}$,и пусть

$$t = (a_0, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$$

формальное решение системы уравнений $h_1 = \ldots = h_i = 0$. Тогда формальное решение t, будем говорить,продлевается до формального решения системы

$$h_1 = \ldots = h_i = h_{i+1} = 0, \tag{3.1}$$

где $h_{i+1} \subseteq K[y_0, y_1, \ldots y_{n+m}]$, если существует $a_{n+1}, \ldots, a_{n+m} \in K$ такое, что $t' = (a_0, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+m}) \in K^{n+m}$ решение системы (3.1); и продлевается до решения системы G если его можно по очереди продлить до решения систем

$$h_1 = \ldots = h_i = \ldots = h_j = 0$$

для каждого $j > i$.

Пример

$f = y_2^2 + y_1 y_0 + y_0 + 1, h = y_2 + 1$. Рассмотрим точку $a_2 = (-1, 1, -1)$, она является решением системы $f = h = 0$ и эта точка может быть продлена до решения системы

$$h = f = f^{(1)} = \ldots = f^{(n)} = \ldots = 0.$$

Мы построим новую точку $a_3 = (-1, 1, -1, x)$ такую, что $h(a) = f(a) = f^{(1)}(a) = 0$.

$$f^{(1)} = y_3 S_f + y_2 y_0 + y_1^2 + y_1 \Rightarrow f^{(1)}(a_3) = x S_f(a_2) + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{S_f(a_2)}.$$

$f = y_2^2 + y_1 y_0 + y_0 + 1, h = y_2 + 1.$

Если $a_{n-1} = (-1, 1, -1, c_3, \ldots, c_{n-1}) \in K^n$ решение $h = f = f^{(1)} = \ldots = f^{(n-1)} = 0$, тогда построим точку $a_n = (-1, 1, -1, c_3, \ldots, c_{n-1}, x)$такую, что $h(a_n) = f(a_n) = f^{(1)}(a_n) = \ldots = f^{(n)}(a_n) = 0$.

$$f^{(n)} = y_n S_f + Q, x = -\frac{Q(a_{n-1})}{S_f(-1, 1, -1)}.$$

WWW
Титул
Содерж.
С. 10из19
Назад
Размер
Закрыть
Выход

4. Обобщённые сепаранты

Пусть $f \in K\{y\}, \operatorname{ord} f = l$ дифференциальный многочлен, тогда сепаранта f равна по определению $S_f = \frac{\partial f}{\partial y_l}$, а обобщённой сепарантой f является многочлен $S_{f,n,k} = \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(k-l+j)}$.

Lemma 4.1 Пусть $f \in K\{y\}, \operatorname{ord} f = l$ дифференциальный многочлен и $n \in \mathbb{N}, 0 \le k \in \mathbb{Z}$, $n > 2k$, тогда

$$f^{(n)} = \sum_{i=0}^{k} S_{f,n,i}\, y_{n+l-i} + Q,$$

где $\operatorname{ord} Q < n + l - k$.

WWW
Титул
Содерж.
С. 11из19
Назад
Размер
Закрыть
Выход

5. Идея решения

Дан многочлен $\operatorname{ord} f = l$ и $\alpha \in K^{n_0+l-k}$ такое, что

- $f^{(m)}(\alpha) \equiv 0$ для любого $m < n_0$;
- $h_i(\alpha) = 0$ для любого $i \leqslant t$;
- $\alpha \in \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} V(G_i) \Longrightarrow S_{f,n,i}(\alpha) = 0$;

Если $S_{f,n,k}(\alpha) = \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(k-l+j)}(\alpha) \neq 0$ для любого $n > n_0$, тогда α продлевается до решения системы

$$h_1 = \ldots = h_t = f = f^{(1)} = \ldots = f^{(n)} = \ldots = 0.$$

6. Продление решения в общем случае

Если $\alpha = (a_0, \ldots, a_{n_0+l-k-1})$, тогда построим новую точку $\beta = (a_0, \ldots, a_{n_0+l-k-1}, a_{n_0+l-k})$ следующим образом

$$f^{(n_0+1)} = \sum_{i=0}^{k} S_{f,n_0+1,i} y_{n_0+1+l-i} + S_{f,n_0,k} y_{n_0+l-k} + Q_{n_0+1}, \operatorname{ord} Q < n_0 + l - k$$

$$a_{n_0+l-k} = -\frac{f^{(n_0)} - \sum\limits_{j=0}^{k} y_{l+n_0-j} S_{f,n_0,j}}{S_{f,n_0,k}}(\alpha) = -\frac{Q_{n_0+1}}{S_{f,n_0,k}}(\alpha) \Rightarrow f^{(n_0+1)}(\beta) = 0$$

7. Основная проблема реализации идеи

Обобщённая сепаранта зависит от параметра n:

$$S_{f,n,k} = \sum_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \right)^{(k-l+j)}$$

Решение α может не занулять ни одну из компонент обобщённой сепаранты, но при некотором n_0 $S_{f,n_0,k}(\alpha) = 0$. Продлевается ли решение α до решения всей системы?

WWW
Титул
Содерж.
С. 14из19
Назад
Размер
Закрыть
Выход

8. Нули обобщённой сепаранты и уровень решения

Рассмотрим многообразие $V_f = (h_1, \dots, h_t, f, \dots, f^{(n)}, \dots) \subset K^\infty$.

$$\begin{cases} a \in V_f \\ [f, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_l}] = (1) \end{cases} \Longrightarrow \exists k, i \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^{(k-l+i)}(a) \neq 0,$$

Поэтом существует конечное число целых чисел n_0 таких, что $S_{f,n,k}(a) = \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{k-l+j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(k-l+j)}(a) = 0$.

Уровень решения $a \in V_f$ — это минимальное натуральное число k такое, что $G_k \not\subseteq I(a)$ ($I(a)$ множество многочленов g таких, что $g(a) = 0$). Для любого решения 2.1 такое число существует, потому что $[f, S_f] = 1$. Иными словами, уровень решения — это минимальное такое число k, что точка a зануляет все обобщённые сепаранты f до $k-1$ и не зануляет k-ую.

Algorithm

Вход: $K\{y\}$ — кольцо дифференциальных многочленов, K алгебра Ритта, $f, h_1, \dots, h_t \in K\{y\}$ набор дифференциальных многочленов таких, что $[f, S] = (1), S = \{\frac{\partial f}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_l}\}$.

Output: TRUE if $[f] + (h_1, \dots, h_t) = (1)$ and FALSE if $[f] + (h_1, \dots, h_t) \neq (1)$.

1. If $[f, S] \neq (1)$, Return INCORRECT DATA;
2. Find $p_0, \dots, p_l, w \in \mathbb{N}$ such that $\left(f, \dots, f^{(w)}, \dfrac{\partial f}{\partial y_0}, \dots, (\dfrac{\partial f}{\partial y_0})^{(p_0)}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y_l}, \dots, (\dfrac{\partial f}{\partial y_l})^{(p_l)}\right) = (1)$;
3. For all $k \leq p = \max\{p_0 + l, \dots, p_l + 0\}$
4. Let $n_0 := \max\{2p+1, \operatorname{ord} h_1, \dots, \operatorname{ord} h_t, \operatorname{ord} f, w\}$;
5. $g_{k,n} := \sum\limits_{j=0}^{l} C_n^{j+k-l} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^{(j+k-l)}$;
6. While$(n_0 \neq \infty)$
7. If $I_k^{n_0} = \emptyset$, BREAK;
8. Let $A := \emptyset$;
9. For all $I_{k,i}^{n_0} \in I_k^{n_0}$
10. $a_i = \psi(g_{k,n}, I_{k,i}^{n_0})$;
11. If $a_i \leq n_0$, Return FALSE;
12. $A = A \cup \{a_i\}$;
13. $n_0 = \max\{A\}$;
14. Return TRUE;

Детали

- 3. For all $k \leq p = \max\{p_0 + l, \ldots, p_l + 0\}$ — ограничение на диапазон всевозможных уровней решений.
- 7. If $I_k^{n_0} = \emptyset$, BREAK; — the ideal $(h_1, \ldots, h_t, f, \ldots, f^{(n_0+p)}) = (1)$ — при разложении на простые идеалы соответствующие решениям системы уровня k получили, что их нет.
- 10. $a_i = \psi(g_{k,n}, I_{k,i}^{n_0})$;

  11. If $a_i \leq n_0$, Return FALSE; — существует решение уровня k

WWW
Титул
Содерж.
С. 17из19
Назад
Размер
Закрыть
Выход

9. Пути развития

- Заменить один порождающий дифференциальный многочлен, на несколько

$$[f_1, f_2] + (h_1, \ldots, h_t) = (1).$$

- Доразобрать случаи, которые Колчин не разобрал.
- Задача принадлежности смешанному идеалу.

Содержание

WWW

Титул

Содерж.

С. 19из19

Назад

Размер

Закрыть

Выход